

Zur mathematischen Modellierung großräumiger Wellen- und Strömungsvorgänge

Dem Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Hannover

eingereichte Dissertation

zur Erlangung des Grades

DOKTOR-INGENIEUR

von

Dipl.-Math. Peter Milbradt

Hannover, 19.12.1994

Zusammenfassung

Es wurde ein auf der Methode der Finiten Elemente basierendes Simulationsmodell zur Beschreibung von Wellen- und Strömungsvorgängen in Küstengebieten entwickelt. Das Modell beschreibt für monochromatischen Seegang und über die Tiefe konstante Strömung wesentliche Effekte, wie Refraktion infolge Tiefenänderung und Strömung, Diffraktion, das Brechen von Wellen, welleninduzierte Strömungen, die Änderung des mittleren Wasserspiegels infolge Welleneinflusses, Austauschprozesse, Bodenreibung sowohl bei den Wellen- als auch den Strömungsvorgängen und Überflutungs- und Trockenfallprozesse in Küstennähe.

Die neu entwickelten Gleichungen zur Beschreibung der Wellenausbreitung, ihrem Typ nach instationäre Transportgleichungen, erlauben eine geschlossene numerische Behandlung. Durch die vorgenommene Erweiterung eines *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren auf vektorwertige Unbekannte entstand ein für allgemeine Transportgleichungen besonders geeignetes Verfahren.

Das vorgestellte computergestützte mathematische Modell wird zunächst anhand von analytischen und experimentell gewonnen Lösungen diskutiert, um die Richtigkeit der numerischen Simulation im Rahmen der verwendeten Theorie zu überprüfen. Die Leistungsfähigkeit und die Möglichkeiten des entwickelten Modells zur Beschreibung großräumiger Wellen- und Strömungsvorgänge wurden im Anschluß bei Untersuchungen sowohl in einer idealisierten Strandtopographie als auch einer natürlichen Topographie gezeigt.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde durch meine Tätigkeit in den Jahren 1991 bis 1993 am Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover angeregt. Wesentlicher Schwerpunkt meiner Arbeit in dieser Zeit waren großräumige Seegangssimulationen im Rahmen des Forschungsprojektes “Optimierung Küstenschutz Sylt “.

Für die zahlreichen wertvollen Diskussionen in dieser Zeit, seine stetige fachliche Begleitung im gesamten Verlauf der Arbeit und schließlich für die Übernahme des Korreferates bedanke ich mich besonders bei Herrn Prof. K.-P. Holz.

Am Institut für Bauinformatik wurde mir ab 1994 der Freiraum gewährt, der es mir ermöglichte, mich intensiv mit neuen Approximationen des Seegangs- und Strömungsgeschehens in Küstenbereichen zu beschäftigen. Hierfür und für die stetige Unterstützung sowie für die Übernahme des Referates möchte ich mich besonders bei Herrn Prof. R. Damrath bedanken.

Für sein Interesse und für die Übernahme des Korreferates möchte ich mich bei Herrn Prof. W. Zielke bedanken.

Für die langjährige gute Zusammenarbeit und die vielen anregenden Gespräche sowie Hilfestellungen in fachlicher und menschlicher Hinsicht möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen sowohl des Instituts für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen als auch denen des Institutes für Bauinformatik ganz herzlich Dank sagen. Besonders hervorheben möchte ich hierbei Herrn H. Arnold, der durch zahlreiche Diskussionen und kritische Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Schließlich danke ich meiner Familie für das Verständnis und die moralische Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit.

Peter Milbradt

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Vorwort	3
Inhaltsverzeichnis	I
1 Einleitung	1
1.1 Allgemeines	1
1.2 Gegenwärtiger Stand	3
1.3 Zielsetzung	6
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Grundlegende Gleichungen	10
2.2 Vertikal integriertes Strömungsmodell	14
2.2.1 Gemittelte Kontinuitätsgleichung	15
2.2.2 Gemittelte Gleichung der Impulserhaltung	15
2.3 Geschwindigkeitspotential von Wellen	20
2.3.1 Grundlegende Annahmen	21
2.3.2 Grundlegende Funktionen und Randbedingungen	22
2.3.3 Potentialformulierung	25

2.3.4	Dispersionsbeziehung	29
3	Mathematische Formulierung der Wellengleichung	31
3.1	Betrachtung der Wellenausbreitung	31
3.2	Dynamische Eigenschaften der Wellenbewegung	40
3.3	Radiation Stress	48
3.4	Wellenbrechen	51
3.5	Turbulenzerscheinungen	53
3.6	Reibungsformulierung	55
4	Anfangs- und Randwerte	57
4.1	Anfangsbedingungen	57
4.2	Randbedingungen	58
4.2.1	Wattstrategie	58
4.2.2	Strömung	60
4.2.3	Wellen	60
5	Numerische Realisierung	63
5.1	Methode der gewichteten Residuen	66
5.2	Numerische Ortsintegration mit der Methode der Finiten Elemente	68
5.2.1	Petrov-Galerkin-Verfahren	69
5.2.2	Finite Element Zerlegung	70
5.2.3	Optimale upwinding Parameter	71
5.2.4	Petrov-Galerkin-Approximation der Wellengleichungen	75
5.2.5	Petrov-Galerkin-Approximation des Strömungsmodells	79
5.3	Generierung des globalen FEM-Schemas	82

5.4	Einarbeiten der Randbedingungen	84
5.5	Entwicklung eines expliziten Algorithmus	86
5.6	Numerische Zeitintegration	88
5.7	Praktische Aspekte	92
6	Modellverifikation und Anwendungen	95
6.1	Wellenmodell	96
6.1.1	Wellenrefraktion	96
6.1.2	Wellenshoaling	98
6.1.3	Wellenbrechen	99
6.1.4	Wellendiffraktion	100
6.1.5	Zweidimensionale Anwendung	101
6.2	Strömungsmodell	104
6.2.1	Dispersionstest	104
6.2.2	Schwallwelle	105
6.2.3	Tidesimulation	106
6.3	Gekoppeltes Modell	106
6.3.1	Idealisierte Strandtopographie	111
6.3.2	Testfeld Rantum auf Sylt	111
7	Zusammenfassung und Ausblick	117
7.1	Zusammenfassung	117
7.2	Zukünftige Erweiterungen	118
	Literaturverzeichnis	121

Abbildungsverzeichnis

124

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Allgemeines

Für den Entwurf, die Planung und Beurteilung von Küstenschutzmaßnahmen ist die Kenntnis der hydrodynamischen Gegebenheiten im Küstenbereich von großer Bedeutung. Hier kommt es zu einer Überlagerung vielfältiger physikalischer Prozesse. Sowohl gezeiten- als auch seegangsinduzierte hydrodynamische Effekte unterliegen infolge des flachen Wassers einer sehr starken Dynamik. Die Verteilung des Seegangs wird sehr komplex und eine Beurteilung der damit zusammenhängenden Effekte schwer. Speziell üben brechende Wellen eine Initialwirkung auf die in der Brandungszone stattfindenden Prozesse aus. Die Intensität und die Randbedingungen des Wellenbrechens, wie z.B. der Winkel des Wellenkammes zur Küste, sind maßgeblich verantwortlich für die Größenordnung und die räumliche Verteilung der welleninduzierten Strömung und des Materialtransports. Die Geschwindigkeiten solcher Strömungen sind oftmals von größerer bzw. von gleicher Ordnung wie tide- und windinduzierte Strömungen. Im Gegensatz zu den Seegangerscheinungen auf den freien und tiefen Ozeanen besteht im flachen Wasser eine starke Abhängigkeit der Hydrodynamik und speziell des Seegangs von den topographischen Verhältnissen.

Im Rahmen des Küsteningenieurwesens haben neben statistischen Untersuchungen und physikalischen Experimenten in den letzten Jahren mathematisch-numerische Modelle zur Beschreibung der hydrodynamischen Verhältnisse ihren festen Platz gefunden. Ausgehend von dem immer besseren Verständnis der Naturprozesse wächst die Bedeutung von Modelluntersuchungen als prognostisches Instrumentarium zur Beurteilung von Eingriffen in die Natur.

Gerade solche Küstenabschnitte, in die der Mensch regulierend eingreifen muß, zeich-

nen sich durch die Überlagerung einer Vielzahl von Prozessen wie Shoaling, Refraktion, Diffraktion, Wellenbrechen und komplexe Strömungen aus. Durch das Auftreffen des Seegangs auf die Küste werden welleninduzierte Strömungen, sogenannte *nearshore currents*¹, erzeugt. Diese beeinflussen das Wellenfeld und die Brechvorgänge zum einen über den Wasserstand und zum anderen durch die Strömungsgeschwindigkeit.

Der Simulation der oben genannten physikalischen Vorgänge wurde in der Vergangenheit in zahlreichen wissenschaftlichen Abhandlungen nachgegangen. Eine direkte Simulation der hydrodynamischen Vorgänge auf der Grundlage der physikalischen Grundgleichungen in ihrer vollen Komplexität ist im allgemeinen nicht möglich. Die physikalischen Grundgleichungen stellen eine komplexe nichtlineare Modellvorstellung der realen Hydrodynamik dar. Neben den mathematischen Rahmenbedingungen, wie beispielsweise den Nichtlinearitäten in den Gleichungen, spielt auch die Leistungsfähigkeit heutiger und zukünftiger Computer eine wesentliche Rolle bei der Anwendbarkeit mathematisch-numerischer Modelle. In der numerischen Praxis erfolgt deshalb häufig eine getrennte Betrachtung und Modellierung der physikalischen Vorgänge (Seegang, Strömung, Transportvorgänge). Jedes dieser Modelle besitzt typische Gültigkeits- und Anwendungsbereiche, innerhalb deren sie die physikalischen Prozesse hinreichend gut beschreiben. Zum Aufbau komplexer Simulationsmodelle wird größten Teils auf das von DE VRIEND [13] vorgeschlagene modulare Konzept zurückgegriffen. Dabei werden für die unterschiedlichen physikalischen Vorgänge separate numerische Modelle entwickelt und diese über externe Kopplungen verbunden. In der numerischen Praxis führt dies zu einer iterativen und damit indirekten Kopplung. Diese Art und Weise der Kopplung hat zwar große Vorteile bei der Verbindung unterschiedlicher Modellklassen, kann jedoch bei großer zeitlicher Variabilität der dynamischen Vorgänge zu physikalisch unbegründeten Schwingungserscheinungen führen. Eine direkte Kopplung der verschiedenen physikalischen Vorgänge in einer Modellklasse ist daher für sehr komplexe hydrodynamische Vorgänge anzustreben.

Ausgehend von der Notwendigkeit der ganzheitlichen Betrachtungsweise bei Eingriffen in die natürlichen Gegebenheiten in Form von Küstenschutzmaßnahmen, betragen die Ausdehnungen der zu betrachtenden Gebiete bis zu 1000km^2 . Die Großräumigkeit der betrachteten Prozesse bewirkt auf Grund der Leistungsfähigkeit der heutigen und wohl auch noch der nächsten Rechnergeneration eine Ausgrenzung von hochauflösenden Modellen und eine Einschränkung der Gültigkeitsbereiche.

Für die Beschreibung der großräumigen Strömungen wird im allgemeinen von den NAVIER-STOKES-Gleichungen ausgegangen und es werden tiefenintegrierte Betrachtungsweisen verwendet. Die entstehenden partiellen Differentialgleichungen können mit der Methode der Finiten Elemente, der Finiten Volumen oder der Methode der Finiten

¹In der Arbeit werden, wenn keine passenden deutschen Übersetzungen existieren oder im Sprachgebrauch üblich sind, die englischen Fachausdrücke *rekursiv* geschrieben verwendet.

Differenzen, im weiteren häufig mit FEM, FVM bzw. FDM bezeichnet, numerisch approximiert werden. Im Gegensatz dazu gibt es zur Beschreibung des Wellenfeldes eine Vielzahl von Modellvorstellungen. Entsprechend der Bedeutung des Seegangs für die Beurteilung der küstennahen Verhältnisse liegt ein Schwerpunkt in der Forschung auf dem Gebiet des Küsteningenieurwesens in der Entwicklung und Weiterentwicklung von Seegangmodellen.

Auf Grund der wachsenden Bedeutung numerischer Modelle für die prognostische Beurteilung von Küstenschutzmaßnahmen spielt die praktische Anwendbarkeit der entwickelten Modelle eine zentrale Rolle.

1.2 Gegenwärtiger Stand

Zur Berechnung des Seegangs und der Strömungsverhältnisse im Küstennahbereich gibt es heute ein weites Spektrum von Modellen. Die Grundlage aller Modelle zur Beschreibung der großräumigen Strömungsverhältnisse bilden die NAVIER-STOKES-Gleichungen. Hierbei wird zwischen einer dreidimensionalen und der vertikal integrierten zweidimensionalen Betrachtungsweise unterschieden. Wesentliche Unterschiede zeigen sich in der numerischen Approximation der partiellen Differentialgleichungen. Dabei wird zwischen der Methode der Finiten Elemente, der der Finiten Volumen und der Methode der Finiten Differenzen unterschieden. Aber auch innerhalb jeder dieser Methoden existieren eine Vielzahl von Varianten, so z.B. bezüglich der Ordnung der Approximation. Ein wesentliches Maß für die Brauchbarkeit dieser Modelle ist die Berücksichtigung von Trockenfall- und Überflutungsprozessen.

LONGUET-HIGGINS et al. haben in einer Reihe von Veröffentlichungen [29], [30], [31], [32] die Grundlagen zum Verständnis der Interaktion von Seegang und Strömung geschaffen. Basierend auf der linearen Wellentheorie wurde das Konzept des *radiation stress* eingeführt, mit dem der Einfluß des winderzeugten Wellengeschehens auf die Strömungen oder auf langperiodische Wellen erfaßt werden kann. Der *radiation stress* ist dabei als der Impulsüberschuß infolge Wellenbewegung definiert. Hierdurch können seegangsinduzierte Erscheinungen, wie Änderungen des mittleren Wasserspiegels (*wave set-up* und *wave set-down*), küstennahe Strömungen (*nearshore currents*) sowie langperiodische Wellenerscheinungen (*surf-beat* und *edge waves*), bestimmt werden. BOWEN [7], LONGUET-HIGGINS [28] und THORNTON [44] haben gezeigt, daß mit dem *radiation stress* welleninduzierte Strömungen berechnet werden können.

Der Seegang kann durch einfache lineare Wellenstrahlmodelle für monochromatische Wellen bis hin zu nichtlinearen Modellen, mit denen unregelmäßige Wellenfolgen beschrieben werden können, simuliert werden. Die Seegangsmodele können, in Abhängig-

keit von der Stufe der Modellvereinfachung und damit einhergehend vom benötigten Diskretisierungsaufwand, in drei Gruppen unterteilt werden.

– Die erste Gruppe sind die wellenauffösenden Modelle, wobei eine minimale Anzahl von Rechenpunkten je Wellenlänge gewährlleistet sein muß. Zu dieser Gruppe gehören sowohl die BOUSSINESQ-Modelle [40] als auch die Modelle auf der Grundlage der *mild-slope-equation* [6].

– Um die Abhängigkeit von einer sehr feinen Auflösung zu umgehen, wurden harmonische Ansätze für die primären Unbekannten, wie z.B. die Wasserspiegelauslenkung, gewählt [25], [48]. Die so entstehenden Entwicklungsmodelle werden in einer zweiten Gruppe zusammengefaßt.

– Für großräumige Anwendungen können im allgemeinen Effekte durch Reflexion vernachlässigt werden. Dies erlaubte die Entwicklung anderer effizienter Wellenmodelle, die auf periodengemittelte tiefenintegrierte Gleichungen basieren. Die typischsten Vertreter dieser Modellgruppe sind die Wellenstrahlmodelle auf der Grundlage der optischen Strahlentheorie [36]. Obwohl die Wellenstrahlverfahren zu den ältesten Verfahren gehören, wird immer wieder auf sie zurückgegriffen. Auch beim Übergang zu Spektralmodellen werden häufig Wellenstrahlen in der einen oder anderen modifizierten Art verwendet. Ein Überblick über großräumige Spektralmodelle ist in dem Buch zum SWAMP-Projekt [43] zu finden.

parabolischer Art findet sich in

Eine umfassende Darstellung der klassischen Grundlagen der dritten Modellklasse wird von HAYES [18] gegeben. Die Modellvorstellung geht dabei von monochromatischen Wellen aus, die der linearen Wellentheorie entsprechen. HAYES gibt folgende Beschreibung der kinematischen Wellentheorie: „Die kinematische Theorie der Wellenausbreitung basiert auf den Annahmen, in einem asymptotischen Sinne, daß Wellen annähernd lokale plane Wellen sind, d.h. sie lassen sich in einem Raum (\vec{x}, t) unter Verwendung der Phasenfunktion beschreiben.“ Die Gleichungen zur Beschreibung dieser Vorgänge sind die Wellenzahl- und Wellenenergieerhaltungsgleichungen:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\sigma_r + \vec{K} \vec{U}] = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_1} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [E(C_{g_i} + U_i)] + \sum_{i,j=1}^2 S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = 0, \quad (1.3)$$

wobei:

$$\begin{aligned}
E & - \text{Wellenenergie,} \\
\vec{K} = (K_1, K_2) & - \text{Wellenzahlvektor,} \\
\sigma_r & - \text{relative Kreisfrequenz der Welle,} \\
d & - \text{Wassertiefe,} \quad \text{ist.} \\
\vec{U} = (U_1, U_2) & - \text{tiefengemittelte Strömung,} \\
\vec{C}_g = (C_{g1}, C_{g2}) & - \text{Vektor der Gruppengeschwindigkeit} \\
S_{ij} & - \text{radiation stress-Tensor}
\end{aligned}$$

Neben der Lösung dieser Gleichungen mittels Charakteristikenverfahren (Wellenstrahl- und Wellenfrontverfahren [34]) wurden Versuche unternommen, diese partiellen Differentialgleichungen direkt mit der Methode der Finiten Elemente bzw. Finiten Differenzen zu lösen.

KAWAHARA et al. [24] haben die obigen Gleichungen in

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 (C_{gj} + U_j) \frac{\partial K_i}{\partial x_j} + f \frac{\partial d}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^2 K_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (1.4)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [E(C_{gi} + U_i)] + \sum_{i,j=1}^2 S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = 0 \quad (1.5)$$

umgeformt. Dabei hat die Funktion f die folgende komplizierte Form:

$$f = \frac{g k^2}{2 \sigma_r} \text{sech}^2(k d). \quad (1.6)$$

Wird in den Modellen keine Diffraktion, wie bei KAWAHARA et al. berücksichtigt, ist die Wellenzahl k identisch mit der Länge des Wellenzahlvektors \vec{K} .

Auf Grund der komplizierten Formulierung der Gleichungen mit einer Vielzahl verschiedener hyperbolischer Funktionen und der damit zusammenhängenden Schwierigkeit den Typ der Gleichungen zu bestimmen, wurde ein *lumping*-Verfahren eingesetzt, was zu einer starken numerischen Dispersion führte. Auf Grund der Formulierung ist eine physikalische Interpretation der Terme der Gleichung sehr schwierig. Eine Weiterentwicklung dieses Modells erfolgte bei KAWAHARA nicht.

YOO [47] führte eine neue Dispersionsbeziehung zur Beschreibung bei schwach bis mittel geneigtem Seegrund ein. Unter Ausnutzung dieser und der BATTJES-Gleichung zur Beschreibung von Diffraktionseffekten erweiterte er die obigen Gleichungen. Die so

entstandenen Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 (C_{g_j} + U_j) \frac{\partial K_i}{\partial x_j} + \frac{G \sigma_r}{2d} \frac{\partial d}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^2 K_j \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^2 \frac{C_g}{2ka} \frac{\partial^3 a}{\partial x_i \partial x_j^2} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} [E(C_{g_i} + U_i)] + \sum_{i,j=1}^2 S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = 0. \quad (1.8)$$

Bei der Herleitung dieser Gleichungen mußten jedoch verschiedene Terme höherer Ordnung, die im Zusammenhang mit der neuen Dispersionsbeziehung standen, vernachlässigt werden. Die numerische Approximation dieser Gleichungen mit der Methode der Finiten Differenzen war ebenfalls problematisch. Eine Stabilisierung der Gleichungen wurde durch die Verwendung eines *staggered grid* Verfahrens erreicht.

Alle diese Gleichungen und Modelle konnten sich in der Praxis nicht durchsetzen, obwohl sie durch ihren Charakter (hyperbolische partielle Differentialgleichungen) sehr geeignet wären in Verbindung mit den NAVIER-STOKES-Gleichungen ein geschlossenes Seegang-Strömungs-Modell für großräumige Anwendungen darzustellen.

1.3 Zielsetzung

Ausgehend vom gegenwärtigen Stand der Entwicklung großräumiger Seegangs- und Strömungsmodelle ist es ein Ziel dieser Arbeit, eine neue Formulierung eines Seegangmodells zu entwickeln, welche geeignet ist, im Zusammenhang mit den NAVIER-STOKES-Gleichungen ein geschlossenes Seegang-Strömungs-Modell für großräumige Anwendungen darzustellen. Andererseits soll eine geschlossene exemplarische numerische Approximation entwickelt werden. Im Vordergrund soll die exakte mathematische Herleitung sowohl des partiellen Differentialgleichungssystems zur Beschreibung des Seegangs- und Strömungsgeschehens als auch des numerischen Verfahrens stehen.

Nach dieser Einleitung werden im Kapitel 2 zunächst die grundlegenden Gleichungen, Randbedingungen und Vereinfachungen zur Entwicklung eines Seegang-Strömungsmodells dargelegt. Neben der Herleitung eines vertikal-integrierten Strömungsmodells wird in diesem Kapitel besonders auf das von YOO [47] entwickelte Wellenpotential eingegangen. Unter Zuhilfenahme dieses Wellenpotentials wird eine Dispersionsbeziehung vorgestellt, die nicht nur für ebenen Seegrund, sondern auch für schwach bis mittelt geneigten Seeboden gilt.

Kapitel 3 widmet sich ganz der Entwicklung eines Seegangmodells auf der Grundlage der linearen Wellentheorie und der von YOO entwickelten Dispersionsbeziehung. Im Rahmen dieser Arbeit ist es das Ziel, neue Gleichungen zur Beschreibung der Wellenausbreitung zu entwickeln, die ein hohes Maß an Allgemeingültigkeit und zudem einen einfachen mathematischen Aufbau besitzen. Ihre Form soll unabhängig von der Komplexität der berücksichtigten Wellentransformationen wie Refraktion, Shoaling, Diffraktion oder Strömungseinfluß sein. Daneben werden die Formulierungen zur Berechnung der Wellenenergie und -amplitude dargestellt. Im weiteren erfolgt eine Konkretisierung der *radiation stress* bezüglich des verwendeten Wellenpotentials. Zum Abschluß dieses Kapitels wird auf einige physikalische Effekte eingegangen, die im Zusammenhang mit den hydrodynamischen Vorgängen im Küstenbereich beachtet werden müssen. Hierbei wird im allgemeinen eine in der Literatur beschriebene charakteristische Modellvorstellung dargelegt. Es wird in diesem Zusammenhang auf die Realisierung von Wellenbrechvorgängen mit Hilfe spezieller Dissipationsterme und die mit dem Wellenbrechen zusammenhängenden Brechkriterien eingegangen. Weitere Bereiche sind benötigte Turbulenz- und Reibungsansätze. Auf eine Vollständigkeit in der Darstellung dieser Effekte wird auf Grund der Zielsetzung der Arbeit verzichtet.

Der Problematik der Anfangs- und Randwerte ist das gesonderte Kapitel 4 gewidmet, wobei auch auf die Modellvorstellung von Trockenfall- und Überflutungsprozessen eingegangen wird.

Ein zweiter Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in einer geschlossenen exemplarischen numerischen Approximation der entwickelten Gleichungen zur Beschreibung der Interaktion von Seegang und Strömung. Hierzu wird im Kapitel 5 auf der Grundlage einer Finiten-Element-Zerlegung eine allgemeine Herleitung eines *streamline-upwinding*-Verfahrens vorgestellt. Ausgehend von einer Erweiterung des Verfahrens auf vektorwertige Unbekannte soll sowohl für das Wellen- als auch für das Strömungsmodell das gleiche numerische Verfahren verwendet werden. Spezielles Augenmerk wird auf die Entwicklung eines semidiskreten Schemas gelegt, welches die Verwendung expliziter Zeitintegrationsverfahren erlaubt. Für die numerische Zeitintegration sollen Verfahren unterschiedlicher Ordnung und mit Schrittweitensteuerung eingesetzt werden.

Anhand von einfachen Testfällen sollen zunächst die Simulationsergebnisse auf Plausibilität und deren Übereinstimmung mit analytischen Lösungen überprüft werden. An einem komplexen Beispiel aus dem Bereich des Küsteningenieurwesens an der Westküste von Sylt soll die Anwendbarkeit sowohl der Modellgleichungen als auch deren exemplarische numerische Approximation auf praxisrelevante Problemstellungen demonstriert werden. Im Rahmen dieser Verifikationen im Kapitel 6 sollen sowohl unter physikalischen als auch numerischen Aspekten wichtige Eigenschaften des entwickelten Modells sowie dessen Grenzen aufgezeigt werden.

Zum Abschluß erfolgt in Kapitel 7 eine Diskussion des in der Arbeit entwickelten Modells und ein Ausblick auf zukünftige Entwicklungsrichtungen.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden alle grundlegenden Gleichungen, Voraussetzungen und Vereinfachungen hergeleitet und beschrieben, die zur Entwicklung des Seegangmodells wie auch des verwendeten Strömungsmodells nötig sind. Dabei wird kurz auf die zugrundeliegenden NAVIER-STOKES-Gleichungen und die benötigten Randbedingungen eingegangen. Da dieses Gleichungssystem nicht linear ist, ist es im allgemeinen nicht möglich, eine geschlossene analytische Lösung zu bestimmen. Es wird sich zeigen, daß unter bestimmten Voraussetzungen eine getrennte Betrachtungsweise der sich überlagernden physikalischen Prozesse möglich ist. Die Modellvorstellung einer Überlagerung von großräumiger Strömung, Wellengeschehen und turbulenten Erscheinungen ermöglicht die Verwendung effizienter Simulationsverfahren zur Beschreibung dieser Komponenten. Die großräumige und langperiodische Strömung wird im allgemeinen durch wellenperioden- und tiefenintegrierte Modellvorstellungen beschrieben. Die Voraussetzungen und Vereinfachungen einer solchen tiefenintegrierten Betrachtungsweise werden im Rahmen dieses Kapitels dargelegt. Zur Beschreibung des Wellengeschehens existiert keine dominante Modellvorstellung. Es wird bei den Wellenmodellen zwischen wellenauflösenden, Entwicklungs- und großräumigen Wellenmodellen unterschieden. Zum Abschluß dieses Kapitels werden durch die Herleitung eines von YOO [47] vorgeschlagenen Wellenpotentials die Grundlagen für ein zeitabhängiges großräumiges Wellenmodell gelegt. Die Beschreibung des turbulenten Anteils ist auf Grund seines stochastischen Charakters sehr schwierig. Im Rahmen dieser Arbeit werden die turbulenten Erscheinungen durch Parametrisierungen im Rahmen des Strömungs- und Wellenmodells realisiert.

2.1 Grundlegende Gleichungen

Als Grundlage aller folgenden Herleitungen und Anwendungen wird zunächst in diesem Abschnitt auf die zugrundeliegenden Gleichungen eingegangen. Ausgehend von den NAVIER-STOKES-Gleichungen zur Beschreibung der Dynamik einer inkompressiblen Flüssigkeit werden nötige Bezeichnungen eingeführt und es werden Einschränkungen gemacht, die im folgenden erläutert werden.

Für die in dieser Arbeit betrachtete Problemklasse der Schwerewellen und der welleninduzierten Strömungen wird von einer inkompressiblen Flüssigkeit (i.allg. Wasser) ausgegangen. Die Variation der Wasserdichte ist von untergeordneter Bedeutung. Die grundlegenden Erhaltungsgesetze können durch die NAVIER-STOKES-Gleichungen beschrieben werden:

Kontinuität:

$$\nabla \vec{u} = 0, \quad (2.1)$$

Impulserhaltung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \right) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p + \rho g x_3 - \vec{\tau}) + \vec{\Omega}. \quad (2.2)$$

Dabei bedeuten:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) && - \text{Ortsvektor,} \\ \vec{u}(\vec{x}, t) &= (u_1, u_2, u_3) && - \text{Geschwindigkeitsvektor,} \\ p(\vec{x}, t) &&& - \text{Druck,} \\ \rho &&& - \text{(konstante) Dichte,} \\ g &&& - \text{Erdbeschleunigung,} \\ \vec{\tau} &&& - \text{Tensor der Reibungsspannungen,} \\ \vec{\Omega} &&& - \text{Corioliskrafttensor und} \\ \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) && - \text{Nabla-Operator.} \end{aligned}$$

Die vertikale Koordinate x_3 ist dabei positiv nach oben gerichtet. Die Konkretisierung der einzelnen Größen erfolgt in den entsprechenden Kapiteln. Um die Gleichungen 2.1 und 2.2 für die Unbekannten \vec{u} und p lösen zu können, müssen Bedingungen an den Rändern des Lösungsgebietes vorgegeben werden. Ausgehend von der untersuchten Problemklasse sind folgende Ränder zu betrachten:

- Gebietsbegrenzungen in der Ebene (x_1, x_2) ,

- Bedingungen am Boden und
- Bedingungen an der freien Oberfläche.

Bei den Gebietsbegrenzungen in der Ebene wird im allgemeinen zwischen offenen und geschlossenen Rändern unterschieden.

Offene Ränder beschreiben hierbei die Einbettung des Lösungsgebietes in ein größeres. An offenen Rändern wird die zeitliche Entwicklung der betrachteten Zustandsgrößen \vec{u} und p vorgegeben.

Für **geschlossene Ränder** und den **Seegrund**, der sich bei $x_3 = -h$ befindet, wird die Bedingung der Undurchlässigkeit gestellt. Es wird vorausgesetzt, daß der Normalenanteil der Strömung in bezug zum Boden bzw. zum geschlossenen Rand Null ist.

Im folgenden wird am Beispiel des Bodens eine solche Randbedingung genauer spezifiziert. Wird der Boden durch eine implizite Funktion $B(\vec{x}, t) := x_3 + h(x_1, x_2) = 0$ beschrieben, so ergibt sich der äußere Normalenvektor an den Boden wie folgt:

$$\vec{n}_B = \nabla B / \|\nabla B\| \quad \text{mit} \quad \nabla B = \left(\frac{\partial B}{\partial x_1}, \frac{\partial B}{\partial x_2}, 1 \right). \quad (2.3)$$

Die Randbedingung am Boden hat somit die Form:

$$\vec{u} \vec{n}_B = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = -h. \quad (2.4)$$

Alternativ zu dieser Randbedingung am Seegrund wird häufig eine *no-slip*-Bedingung verwendet. Sie besagt, daß alle Strömungskomponenten am Boden Null sind:

$$u_i(x_1, x_2, -h) = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Die Grenzfläche zwischen der Luft und dem Wasser, die sogenannte freie Oberfläche, ist eine wichtige und schwer beschreibbare Randbedingung. Sie wird durch die kinematische und die dynamische Randbedingung beschrieben.

Bei der **kinematischen Randbedingung** wird von der Modellvorstellung ausgegangen, daß ein Flüssigkeitsteilchen, das sich auf der freien Oberfläche befindet, welche durch die Funktion $\xi(x_1, x_2, t)$ beschrieben wird, für alle Zeit dort verbleibt. Formal stellt sich diese Tatsache wie folgt dar:

$$u_3 = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \quad \text{bei} \quad x_3 = \xi(x_1, x_2, t). \quad (2.6)$$

Die **dynamische Randbedingung** besagt, daß der Druck an der freien Oberfläche gleich dem atmosphärischen Druck sein muß:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \right) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{1}{\rho} g x_3 - \vec{\tau} \right) - \vec{\Omega} = 0 \quad \text{bei} \quad x_3 = \xi(x_1, x_2, t). \quad (2.7)$$

Die Nichtlinearität der letztgenannten Randbedingungen 2.6 und 2.7 sowie die Tatsache, daß diese Bedingungen auf der unbekanntenen freien Oberfläche ξ gelten, erschweren die Lösung dieses dreidimensionalen Problems. Im allgemeinen Fall existiert keine geschlossene mathematische Lösung.

Die soeben beschriebene Modellvorstellung ist Grundlage sowohl des zu entwickelnden Wellen- als auch des verwendeten Strömungsmodells.

Für das weitere Herangehen ist es hilfreich, die Dynamik des Wasserkörpers detaillierter zu betrachten. Ausgehend von der Modellvorstellung einer REYNOLDS-Zerlegung [41] einer natürlichen Strömung in Mittelwert und zufällige Fluktuation, wird eine Zerlegung der Strömung im Küstenbereich in drei Komponenten vorgenommen. Der stochastische hochfrequente Anteil wird mit u'_i und ξ' bezeichnet und seine zeitliche Variation bewegt sich im Bereich von 1-100Hz.

Der Anteil der Wellenbewegung wird mit \tilde{u}_i und $\tilde{\xi}$ bezeichnet. Diese Größen haben jedoch im Gegensatz zu den turbulenten Erscheinungen einen regulären periodischen Charakter in der Größenordnung von 2 - 20 Sekunden.

Existiert eine großräumige und langperiodische Grundströmung, wie etwa eine tideinduzierte Strömung, so wird diese mit \bar{u}_i und $\bar{\xi}$ bezeichnet.

Wird ein Mittelungsoperator für eine beliebige Funktion $f(t)$ über eine Zeit T (im weiteren ist T die Periode des betrachteten Seegangs bzw. T' das Mittelungsintervall der turbulenten Erscheinung) wie folgt eingeführt:

$$\overline{f(t)} := \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad (2.8)$$

so kann eine Zerlegung im weiteren vorgenommen werden. Das Mittelungsintervall muß dabei lang in bezug auf die charakteristische Periode der Schwankungsgröße sein und

kurz im Vergleich zu den Perioden der mittleren Größen. Wird die Periode T des See-
gangs als bekannt vorausgesetzt, so kann diese als ein Mittelungsintervall genommen
werden. Dies bedeutet jedoch auch gleichzeitig, daß die drei betrachteten Frequenzbe-
reiche voneinander hinreichend weit entfernt sein müssen.

Ausgehend von einem realen hydrodynamischen Ereignis, ist es durch zeitliche In-
tegration über unterschiedliche Zeitskalen möglich, die einzelnen Komponenten dieser
Größen zu bestimmen:

$$u'_i := u_i - \frac{1}{T'} \int_{t-\frac{T'}{2}}^{t+\frac{T'}{2}} u_i(t) dt, \quad (2.9)$$

$$\tilde{u}_i := u_i - u'_i - \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{1}{T'} \int_{t-\frac{T'}{2}}^{t+\frac{T'}{2}} u_i(t) dt dt, \quad (2.10)$$

$$\bar{u}_i := u_i - u'_i - \tilde{u}_i. \quad (2.11)$$

Mittels dieser Definitionen läßt sich jede beliebige Strömung in der Form

$$u_i(\vec{x}, t) = \bar{u}_i + \tilde{u}_i + u'_i \quad (2.12)$$

darstellen. Eine analoge Form ergibt sich für die Wasserspiegelauslenkung ξ .

Die oben dargestellten Erscheinungen können mit Hilfe der hydrodynamischen Be-
wegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung beschrieben werden. Um eine ge-
trennte Betrachtungsweise der einzelnen Komponenten durchführen zu können, muß
im weiteren vorausgesetzt werden, daß die Größen \bar{u}_i , \tilde{u}_i und u'_i bezüglich des Mitt-
lungsoperators unkorreliert sind, d.h. es muß gelten:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{u}_i u'_i} &= 0, & \overline{\tilde{\xi} \xi'} &= 0, \\ \overline{\bar{u}_i \tilde{u}_i} &= 0, & \overline{\bar{\xi} \tilde{\xi}} &= 0, \\ \overline{\bar{u}_i u'_i} &= 0, & \overline{\bar{\xi} \xi'} &= 0. \end{aligned}$$

Die Annahme der Unkorreliertheit ist berechtigt, falls sich die Zeitskalen der unter-
schiedlichen Bewegungsanteile um Größenordnungen voneinander unterscheiden. In der
Praxis kann von dieser Eigenschaft im allgemeinen ausgegangen werden. Die Eigenschaft
der Unkorreliertheit wird in der weiteren Darstellung häufig zu Hilfe genommen.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird auf die Approximation der unterschiedli-
chen Anteile in 2.12 eingegangen.

2.2 Vertikal integriertes Strömungsmodell

In diesem Abschnitt wird der Anteil der Grundströmung $(\bar{u}_i, \bar{\xi})$ an den betrachteten hydrodynamischen Vorgängen beschrieben. Die Grundströmung soll hier der Teil sein, der bei der zeitlichen Mittelung über eine Seegangswellenperiode übrig bleibt.

Zum besseren Verständnis wird zwischen der vertikalen Koordinate $z = x_3$ und den horizontalen x_i mit $i = 1, 2$ unterschieden. Die zugehörigen Geschwindigkeiten seien mit $w = u_3$ und u_i bezeichnet. Um eine Reduzierung der Anzahl der Unbekannten zu erreichen werden die Betrachtungen für die vertikal integrierten Gleichungen und Größen vorgenommen. Die mittleren horizontalen Geschwindigkeiten werden wie folgt definiert:

$$U_i(x_1, x_2, t) := \frac{1}{\bar{\xi} + h} \overline{\int_{-h}^{\xi} u_i dz}, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Dabei ist $\xi(x_1, x_2, t)$ die freie Oberfläche. Die bezüglich der Periode des Seegangs mittlere Wasserspiegelauslenkung ist:

$$\eta := \bar{\xi}. \quad (2.14)$$

Physikalisch betrachtet stellt der Ausdruck $\rho U_i(\bar{\xi} + h)$ den mittleren Durchfluß durch eine vertikale Fläche mit konstanter x_1 -Koordinate dar. Aus diesem Grund wird der Vektor (U_1, U_2) auch Durchflußgeschwindigkeit genannt. Bezeichnet man die Abweichung vom Mittel mit \hat{u}_i , so gilt

$$u_i(x_1, x_2, z, t) = U_i(x_1, x_2, t) + \hat{u}_i(x_1, x_2, z, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

wobei formal U_3 die Nullfunktion ist.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß unter Zuhilfenahme der Definitionen 2.9 und einer Vertauschung der zeitlichen und vertikalen Integration über die Wassertiefe, \hat{u}_i die folgende Darstellung hat:

$$\hat{u}_i(x_1, x_2, z, t) = u_i^d + \tilde{u}_i + u_i', \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.16)$$

Der Term u_i^d ist eine Funktion, welche die Abweichung des Profils der Grundströmung über die Tiefe von einem konstanten Strömungsprofil beschreibt:

$$u_i^d = U_i - \bar{u}_i. \quad (2.17)$$

Kann von einem über die Tiefe relativ konstanten Strömungsprofil ausgegangen werden, so ist u_i^d vernachlässigbar.

Aus der Definition von \hat{u}_i folgt $\overline{\int_{-h}^{\xi} \hat{u}_i dz} = 0$. Diese Identität spielt eine wichtige Rolle bei den weiteren Herleitungen.

In Analogie zu 2.16 kann die Abweichung der Wasserspiegelauslenkung $\hat{\xi}$ von der über die Seegangperiode gemittelten Wasserspiegelauslenkung, häufig auch mit $\eta = \bar{\xi}$ bezeichnet, wie folgt beschrieben werden:

$$\hat{\xi}(x_1, x_2, t) = \tilde{\xi} + \xi'. \quad (2.18)$$

2.2.1 Gemittelte Kontinuitätsgleichung

Die vertikale integrierte Kontinuitätsgleichung 2.1 hat die Form

$$\sum_{i=1}^2 \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dz + w|_{z=\xi} - w|_{z=-h} = 0. \quad (2.19)$$

Die Anwendung der LEIBNIZ-Regel ergibt

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\xi} u_i dz + \left[-\sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} + w \right]_{z=\xi} - \left[\sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + w \right]_{z=-h} = 0.$$

Unter Verwendung der kinematischen Randbedingung an der freien Oberfläche 2.6 und unter Annahme einer *no-slip*-Randbedingung am Seegrund ($u_i = 0$ für $z = -h$), vereinfacht sich 2.19 zu

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\xi} u_i dz = 0. \quad (2.20)$$

Dieselbe Gleichung kann unter einer anderen Voraussetzung entwickelt werden, wenn angenommen wird, daß ein ebener Seegrund ($\partial h / \partial x_i = 0$) vorhanden ist. Diese Voraussetzung wird verwendet, wenn gebundene Wellen betrachtet werden.

Durch Mittelung dieser Gleichung über die Periode T des Seegangs, ergibt sich die gemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i(\eta + h)) = 0. \quad (2.21)$$

2.2.2 Gemittelte Gleichung der Impulserhaltung

Es wird zunächst die NAVIER-STOKES-Gleichung 2.2 betrachtet, jedoch ohne den Corioliskraftanteil. Für die horizontalen Komponenten gilt ($i = 1, 2$):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + w \frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Für die vertikale Komponente gilt:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \rho g z) + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{j3}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z}. \quad (2.23)$$

Dabei ist δ_{ij} das KRONECKER-Symbol und τ_{ij} der Tensor der Reibungsspannungen:

$$\tau_{ij} := 2\mu e_{ij} \quad (2.24)$$

mit

$$e_{ij} := \frac{\partial u_i}{2\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{2\partial x_i}. \quad (2.25)$$

Die dynamische Viskosität wird mit μ und die kinematische mit $\nu := \mu/\rho$ bezeichnet.

Durch Integration der Gleichung 2.22 über die Tiefe ergibt sich für die Terme der linken Seite:

$$\begin{aligned} \rho \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial u_i}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} [\rho u_i dz - \rho u_i]_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \rho \int_{-h}^{\xi} \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dz &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\xi} \rho u_j u_i dz - \sum_{j=1}^2 [\rho u_j u_i]_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 [\rho u_j u_i]_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \\ \rho \int_{-h}^{\xi} w \frac{\partial u_i}{\partial z} dz &= \rho [w u_i]_{z=\xi} - \rho [w u_i]_{z=-h}. \end{aligned}$$

Durch Summation der Terme, durch Beachtung der kinematischen Randbedingung an der freien Oberfläche 2.6 und der *no-slip*-Randbedingung 2.5 am Boden ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} \rho u_i dz + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\xi} \rho u_j u_i dz = \int_{-h}^{\xi} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial z} dz.$$

Analog wird die rechte Seite berechnet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} \rho u_i dz + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\xi} \rho u_j u_i dz =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\xi} -p\delta_{ij} + \tau_{ij} dz + \tau_{i3}]_{z=\xi} - \tau_{i3}]_{z=-h} \\ & - \sum_{j=1}^2 \left\{ [-p\delta_{ij} + \tau_{ij}]_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} - [-p\delta_{ij} + \tau_{ij}]_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

An der freien Oberfläche muß ein Gleichgewicht zwischen den atmosphärischen und den Flüssigkeitskräften herrschen, dies impliziert

$$\sum_{j=1}^2 \{ (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j \} + \tau_{i3}n_3 = \tau_i^F \quad \text{für } z = \xi \text{ und } i = 1, 2, \quad (2.27)$$

wobei τ_i^F die äußere horizontale Spannungskomponente ist, welche durch den atmosphärischen Druck und die meteorologischen Daten gegeben ist.

Wird der äußere Normalenvektor an ξ mit $\vec{n}_\xi := (n_1, n_2, n_3)$ bezeichnet und die freie Oberfläche durch die implizite Funktion $F(x_1, x_2, z, t) := z - \xi(x_1, x_2, t) = 0$ beschrieben, so ergibt sich der Normalenvektor durch

$$\vec{n}_\xi = \nabla F / \|\nabla F\| \quad \text{mit} \quad \nabla F = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right).$$

Gleichung 2.27 kann in der Form:

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ [-p\delta_{ij} + \tau_{ij}]_{z=\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} + \tau_{i3}]_{z=\xi} = \tau_i^F \|\nabla F\| \quad (2.28)$$

geschrieben werden.

Für den Boden wird $B(x_1, x_2, z, t) := z + h(x_1, x_2) = 0$ gesetzt. Unter Verwendung der horizontalen Schubspannung am Boden ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{j=1}^2 \tau_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} + \tau_{i3} = -\tau_i^B \|\nabla B\|, \quad \text{bei } z = -h. \quad (2.29)$$

Durch das Einsetzen von 2.28 und 2.29 in die Gleichung 2.26 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} \rho u_i dz + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\xi} \rho u_j u_i dz &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\xi} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) dz \\ &+ p]_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \tau_i^F \|\nabla F\| - \tau_i^B \|\nabla B\|. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Physikalisch repräsentiert Gleichung 2.30 die Momentenbalance in der vertikalen Flüssigkeitssäule der Höhe $\xi + h$ und der Grundfläche $dx_1 = dx_2 = 1$. Die Terme der linken Seite stellen die Beschleunigung in x_i -Richtung und den Netto-Momentenfluß durch die vertikalen Seiten der Flüssigkeitssäule dar. Die Terme der rechten Seite repräsentieren die Netto-Oberflächenspannung auf den vertikalen Seiten der Säule, den Druck des Bodens gegen die Flüssigkeit und die Flächenspannung an der freien Oberfläche und am Boden. Durch Mittelung der Gleichung über die Periode T ergibt sich für die linke Seite

$$\rho (\bar{\xi} + h) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) + \rho \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\left(\int_{-h}^{\xi} \hat{u}_i \hat{u}_j dz \right)}. \quad (2.31)$$

Wird der mittlere dynamische Druck am Boden als

$$\bar{p} := \bar{p}|_{z=-h} - \rho g (\bar{\xi} + h)$$

definiert, so ergibt sich

$$\bar{p}|_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x_i} = \bar{p} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \rho g (\bar{\xi} + h)^2 \right) - \rho g (\bar{\xi} + h) \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i}. \quad (2.32)$$

Unter den Voraussetzungen einer geringen Viskosität (die bei Wasser gegeben ist) und einer mittleren Bodenneigung (die bezüglich der Wellenamplitude a und der Wellenzahl k wie folgt spezifiziert werden kann, $\|\nabla h\| \leq O(ka)$) ist der Term $\bar{p} \frac{\partial h}{\partial x_j}$ vernachlässigbar [33].

Durch Einsetzen von 2.31 und 2.32 in 2.30 und unter Verwendung einer Definition der Terme S_{ij} bekommen die gemittelten Impulserhaltungsgleichungen für $i = 1, 2$ die Form

$$\begin{aligned} \rho (\bar{\xi} + h) \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \\ - \rho g (\bar{\xi} + h) \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i} + \overline{\tau_i^F \|\nabla F\|} - \overline{\tau_i^B \|\nabla B\|} \\ + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -S_{ij} + \overline{\int_{-h}^{\xi} \tau_{ij} dz} \right\}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

wobei

$$S_{ij} := \overline{\int_{-h}^{\xi} p \delta_{ij} + \rho \hat{u}_i \hat{u}_j dz} - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\xi} + h)^2 \delta_{ij}.$$

Physikalisch stellen die S_{ij} die Komponenten des Spannungstensors dar, der den Überschuß am Momentenfluß repräsentiert. Da

$$\frac{1}{2}\rho g (\bar{\xi} + h)^2 = \int_{-h}^{\bar{\xi}} \rho g (\bar{\xi} - z) dz$$

gilt, können die S_{ij} auch als

$$S_{ij} = \left[\int_{-h}^{\bar{\xi}} p dz - \int_{-h}^{\bar{\xi}} \rho g (\bar{\xi} - z) dz \right] \delta_{ij} + \overline{\int_{-h}^{\bar{\xi}} \rho \hat{u}_i \hat{u}_j dz} \quad (2.34)$$

geschrieben werden.

Die Größen S_{ij} werden als *radiation stress* bezeichnet. Physikalisch sind die S_{ij} die Summe der i -ten Komponente des hydrodynamischen Überdruckes, definiert als Differenz zwischen dem über die Tiefe und die Zeit gemittelten tatsächlichen Druck und dem entsprechenden hydrostatischen Druck auf, und dem Netto-Momentenflusses durch, eine Fläche normal zur j -ten Richtung. Die Größe $\overline{\int_{-h}^{\bar{\xi}} \tau_{ij} dz}$ stellt den mittleren Momentenflußtensor, der durch die molekulare Fluktuation erzeugt wird, dar.

Für die weiteren Herleitungen erfolgt eine Vernachlässigung der atmosphärischen Einflüsse $\overline{\tau_j^F ||\nabla F||}$. Durch die Division der Gleichung mit $\rho (\bar{\xi} + h)$ entsteht die in vielen Strömungsmodellen verwendete Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -g \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho (\bar{\xi} + h)} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \\ &+ \frac{1}{\rho (\bar{\xi} + h)} (T_i - T_i^B) \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit

$$\begin{aligned} T_i &:= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\int_{-h}^{\bar{\xi}} \tau_{ij} dz} \\ T_i^B &:= \overline{\tau_j^B ||\nabla B||}. \end{aligned}$$

Der Term $(\bar{\xi} + h) =: d$ wird im weiteren als absolute Wassertiefe bezeichnet.

Bei der konkreten Realisierung der Bodenreibung T_i^B sowie des turbulenten Austausches T_i kann auf eine Vielzahl in der Literatur beschriebener Modellvorstellungen zurückgegriffen werden. Es ist jedoch zu beachten, daß hierbei nicht nur die mittleren, langperiodischen Strömungen berücksichtigt werden müssen, sondern auch die Orbitalbewegungen der Wellen. Einige Ansätze hierzu werden in den Abschnitten 3.5 und 3.6 konkretisiert.

2.3 Geschwindigkeitspotential von Wellen

Ausgehend von der Annahme, daß die hydrodynamischen Größen u_i ($i=1,2,3$) und ξ als Überlagerung von drei Strömungsanteilen (wie in 2.12 dargestellt) betrachtet werden können, richtet sich nun das Interesse auf den wellenbezogenen Anteil \tilde{u}_i und $\tilde{\xi}$.

Der klassischen Herangehensweise folgend, wird für den Wellenanteil eine Potentialformulierung verwendet. Wie allgemein bekannt, ist eine Potentialformulierung nur anwendbar, falls eine rotationsfreie Strömung vorausgesetzt werden kann. Die Rotationsfreiheit einer Strömung ist gewährleistet, falls

- keine Schubspannungen auftreten (im allgemeinen gegeben, wenn von der Reibungsfreiheit der Teilchen ausgegangen wird) und
- alle äußeren Kräfte konservativ sind.

Da Fluidteilchen nur durch Schubspannungen in Drehung versetzt werden können, bleibt eine ideale Strömung drehungsfrei, wenn sie anfänglich drehungsfrei war und umgekehrt. Damit lautet die dritte allgemeine Voraussetzung, daß die Strömung zu irgendeinem Zeitpunkt rotationsfrei sein muß.

Dies führt jedoch zu einem gewissen Widerspruch. Treten Turbulenzen auf, so ist die Bedingung der Rotationsfreiheit nicht mehr gegeben. Nicht nur das Wellenbrechen ist eine Quelle hoher Turbulenz, sondern auch die turbulente Grenzschicht in Bodennähe.

Bei der Herleitung des Geschwindigkeitspotentials wird das Brechen von Wellen zunächst ausgeschlossen. Es werden die Betrachtungen auf zähme Wellen kleiner Amplitude ($2a/d \ll 1$) und geringer Steilheit ($2a/L \ll 1$) beschränkt. Auf die Berücksichtigung des Wellenbrechens im Modell wird gesondert eingegangen. Bezüglich der turbulenten Grenzschicht wird vorausgesetzt, daß diese keinen signifikanten Einfluß auf die Wellenbewegung ausübt. Bei den betrachteten zahmen Wellen hat man es mit einer 5 bis 10cm starken turbulenten Grenzschicht zu tun.

Im weiteren wird nun angenommen, daß eine skalarwertige Funktion $\Phi(\vec{x}, t)$ existiert, so daß

$$u_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

gilt. Die Funktion Φ heißt dann Potential zum Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x}, t)$.

Wie schon erwähnt, kann auf Grund der Definition der periodengemittelten Größen \bar{u}_i und $\bar{\xi}$ von einer Gleichmäßigkeit bezüglich des betrachteten Skalenbereichs der Wellenlänge und -periode ausgegangen werden. Wird vorausgesetzt, daß die vertikale Kom-

ponente \bar{w} der Grundströmung im Verhältnis zum vertikalen Wellenanteil \tilde{w} vernachlässigbar klein ist, so hat das Potential zur Beschreibung der hydrodynamischen Verhältnisse bei der Interaktion von Seegang und Strömung die allgemeine Form:

$$\Phi = -\bar{u}_1 x - \bar{u}_2 y + \tilde{\Phi}. \quad (2.37)$$

Wird von einer über die Tiefe relativ gleichmäßigen Verteilung der Grundströmung ausgegangen, so kann Φ auch wie folgt:

$$\Phi = -\bar{U}_1 x - \bar{U}_2 y + \tilde{\Phi}. \quad (2.38)$$

geschrieben werden.

Durch eine geeignete Koordinatentransformation können alle folgenden Betrachtungen ohne Grundströmung durchgeführt werden. Es wird dabei auch auf die Tilde über dem Buchstaben Φ verzichtet. Ausgehend vom Anwendungsbereich werden bei der weiteren Modellentwicklung nur noch periodische, progressive Schwerewellen betrachtet. Für das Geschwindigkeitsfeld einer Welle wird ein Potential, wie es bei Yoo [47] vorgeschlagen wurde, verwendet.

2.3.1 Grundlegende Annahmen

Wie bereits bei der Beschreibung des tiefenintegrierten Strömungsmodells erwähnt, stellt die Beschreibung der freien Wasseroberfläche ein schwieriges nichtlineares Problem dar. Um die näherungsweise Erfassung der Wellenbewegung zu ermöglichen, wurden verschiedene Wellentheorien und numerische Verfahren entwickelt. Eine der ältesten Modellvorstellungen für den Seegang ist die lineare Wellentheorie. Ausgehend von den NAVIER-STOKES-Gleichungen 2.1 und 2.2 wird ein mathematisches Modell auf der Grundlage der linearen Wellentheorie zur Beschreibung des Seegangs entwickelt. Dafür ist es nützlich, alle in den letzten Abschnitten festgelegten Annahmen zusammenzufassen. Vorausgesetzt wird im folgenden:

- eine konstante Dichte der Flüssigkeit,
- eine inkompressible Flüssigkeit,
- eine ideale Flüssigkeit, d.h. keine Reibung und Viskosität,
- die Existenz eines Gravitationsfeldes,
- eine rotationsfreie Bewegung,

- schwere Wellen, d.h. atmosphärische Druckschwankungen werden ignoriert, und
- Wellen kleiner Amplitude ($2a/d \ll 1$) und kleiner Steilheit ($a k/\pi \ll 1$), d.h. die lineare Wellentheorie gilt.

Der Vollständigkeit halber werden an dieser Stelle auch alle weiteren noch zu verwendenden Voraussetzungen [47] wiedergegeben:

- Wellenfrequenz hoch genug, um die Rotationskomponenten zu vernachlässigen,
- plane oder fast plane Wellen, d.h. die Variation der Amplitude ist kleiner als die der Phase,
- Vernachlässigbarkeit nichtlinearer Interaktionen mit Einzelwellen,
- vernachlässigbare Wellenreflexion, d.h. progressive Wellen,
- Wellen mit einer Länge kleiner als die Längenskala der Scherströmung, d.h. $\|\nabla\|\vec{U}\| \ll k\|\vec{U}\|$,
- die zeitliche Änderung der unidirektionalen Strömung ist kleiner als die der oszillierenden Bewegung $\left|\frac{\partial\|\vec{U}\|}{\partial t}\right| \ll \sigma\|\vec{U}\|$ und
- mittlere Boden­neigung $\|\nabla d\| \ll kd$.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß die Forderung an die Boden­neigung bezüglich der absoluten Wassertiefe gilt und im allgemeinen ungleich der Boden­neigung $\|\nabla h\|$ ist.

Um im Rahmen der hier betrachteten Modell­klasse Effekte auf die Wellen­transformation, die durch geneigten Boden hervorgerufen werden, einbeziehen zu können, wird vorausgesetzt, daß die Boden­neigung flach genug ist, um keine signifikante Wellen­energie zu reflektieren.

In den folgenden Darstellungen ist es häufig sinnvoll, zwischen den Koordinaten x_1 , x_2 und der Koordinate $z = x_3$ zu unterscheiden. Weiterhin wird, solange keine Mißverständnisse möglich sind, die EINSTEIN'sche Summen­konvention verwendet.

2.3.2 Grundlegende Funktionen und Randbedingungen

Ausgehend von Naturbeobachtungen, wonach periodische Wasserwellen ein fast sinusförmiges Profil haben, wird nun eine spezielle Form der freien Wasseroberfläche betrachtet.

Für sinusförmige langkämmige Wellen der Periode T läßt sich die Wasserspiegelauslenkung wie folgt beschreiben:

$$\xi(x_1, x_2, t) = \eta + a(x_1, x_2) \cos(S(x_1, x_2, t)), \quad (2.39)$$

dabei ist

η der mittlere Wasserstand bezüglich der Wellenperiode T ,

a die Wellenamplitude,

$S(x_1, x_2, t) := k \cos(\theta)x_1 + k \sin(\theta)x_2 - \sigma t$ die Phasenfunktion,

$\sigma := \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz und

θ die Wellenanlaufriechung.

Da von einer rotationsfreien Bewegung des Fluids ausgegangen wird, kann zu einer Potentialformulierung der Bewegungsgleichung übergegangen werden. Zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes unter einer Welle wird ein Geschwindigkeitspotential gesucht, welches die Identität:

$$u_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.40)$$

erfüllt.

Durch Einsetzen dieser Identität in die Kontinuitätsgleichung 2.1 erhält man die Feldgleichung für das Potential Φ , die LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0. \quad (2.41)$$

Aus der Gleichung der Impulserhaltung 2.2 und unter Vernachlässigung der Corioliskraft sowie der Viskosität entwickelte BERNOULLI die Gleichung der Energieerhaltung:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\rho} (p_s + p) + gz = F(t) \quad (2.42)$$

mit der Integrationskonstante $F(t)$. Dabei ist p_s der atmosphärische und p der dynamische Druck. Wird die Konstanz des totalen Druckes $(p_s + p)$ angenommen und auf

Grund der Tatsache, daß das Potential Φ bis auf eine beliebige Zeitfunktion eindeutig bestimmt ist, vereinfacht sich die dynamische Randbedingung an der freien Oberfläche zu

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right)^2 + gz = 0 \quad \text{bei} \quad z = \xi(x_1, x_2, t). \quad (2.43)$$

Die kinematische Randbedingung an der freien Oberfläche hat für Potentialströmungen die Form:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial\xi}{\partial x_i} \quad \text{bei} \quad z = \xi. \quad (2.44)$$

Beschränkt man sich auf Wellen kleiner Amplitude, die der linearen Wellentheorie entsprechen, so muß folgendes gelten:

- für Tiefwasser : $2ak \ll 1$,
- bei flachem Wasser muß zusätzlich $2a/d \ll 1$ gelten.

Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich (siehe STOKER (1957) [42]), die Randbedingung an der freien Oberfläche durch Reihenentwicklung zu linearisieren. Diese sind dann:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = g\xi \quad \text{und} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \text{bei} \quad z = 0. \quad (2.46)$$

Durch das Zusammenführen dieser beiden Randbedingungen 2.45 und 2.46 ergibt sich die kombinierte (dynamische und kinematische) Oberflächenrandbedingung für die Wellenbewegungen:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad \text{bei} \quad z = 0. \quad (2.47)$$

Die kinematische Randbedingung am Boden kann leicht formuliert werden, wenn der Seeboden als undurchlässig betrachtet wird. Dann wird angenommen, daß die Normalengeschwindigkeit am Boden Null ist:

$$u_3 = - \sum_{i=1,2} u_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \text{bei} \quad z = -h, \quad (2.48)$$

wobei h die Tiefe des Bodens ist.

Nutzt man die Definition 2.40, so kann die Randbedingung am Boden 2.48 in der Form:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \text{bei} \quad z = -h \quad (2.49)$$

geschrieben werden.

2.3.3 Potentialformulierung

Der LAPLACE-Typ der partiellen Differentialgleichung 2.41 wird im allgemeinen mit der Methode der Separation der Variablen gelöst.

Ausgehend von der Annahme der Gültigkeit der linearen Wellentheorie wird, wie in [47] vorgeschlagen, angenommen, daß sich das Potential Φ als Produkt zweier Funktionen $Z(z, (x_i))$ und $B(x_i, t)$ darstellen läßt. Die Vertretbarkeit dieser Annahme ergibt sich im Nachhinein aus der Existenz eines Potentials dieser Form. Das Potential habe also folgende Form:

$$\Phi(x_i, t) := Z(z, (x_i))B(x_i, t), \quad (2.50)$$

$$B(x_i, t) := A(x_i) \cos S(x_i, t). \quad (2.51)$$

Folgt man der Argumentation von YOO [47], so ist Z nicht nur eine Funktion von z , sondern hängt auch schwach von x_i ab. Wird Φ nun in die LAPLACE-Gleichung eingesetzt, so erhält diese die Form:

$$\frac{1}{Z} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i^2} \right) = - \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}. \quad (2.52)$$

Da Z wie angenommen nur schwach von x_i abhängig ist, wird die zweite Ableitung bezüglich x_i auf der rechten Seite vernachlässigt. Die Zulässigkeit dieser Annahme wird später an Hand der gefundenen Funktion Z gerechtfertigt. Im weiteren wird also folgende Relation betrachtet:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \simeq - \frac{1}{B} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2}. \quad (2.53)$$

Die linke Seite ist also quasi unabhängig von x_i . Da die rechte Seite aber von z unabhängig ist, müssen beide Seiten gleich einer wohlbestimmten Konstanten k^2 sein, wobei k der Trennfaktor ist.

In der klassischen Ingenieurdarstellung wird k als Länge des Wellenzahlvektors interpretiert. Diese eventuell bestehende Verbindung soll an dieser Stelle völlig außer acht gelassen werden. Später wird sich zeigen (siehe Abschnitt 2.3.4), daß eine solche Verbindung zwar existiert, sie jedoch im Gegensatz zur klassischen Darstellung eine andere Form hat.

Die folgende Herleitung entspricht der klassischen Herangehensweise in der Ingenieurwissenschaft für die Theorie Wellen kleiner Amplitude. Folglich wird angenommen, daß sich die obige Gleichung in der Form:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \simeq k^2 Z \quad \text{und} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2} = -k^2 B \quad (2.55)$$

schreiben läßt.

Lösungen der linearen Differentialgleichung 2.54 lassen sich als Kombination von Exponentialfunktionen darstellen:

$$Z = b \exp[k(z + h)] + c \exp[-k(z + h)]. \quad (2.56)$$

Um die Integrationskonstanten b und c bestimmen zu können, müssen die Randbedingungen formuliert werden.

Durch das Einsetzen der Annahmen 2.50 und 2.51 in die Randbedingung am Boden 2.49 ergibt sich:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_i} \sin(S) \quad \text{bei} \quad z = -h(x_1, x_2). \quad (2.57)$$

Diese Gleichung muß zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein, d.h. sie muß von t unabhängig sein. Folglich muß gelten:

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad \text{bei} \quad z = -h(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_i} \sin(S) = 0. \quad (2.59)$$

Durch das Einsetzen der Annahme 2.56 in die Gleichung 2.58 ergibt sich die Identität

$$b - c = s(b + c) \quad (2.60)$$

mit

$$s = -\frac{1}{k} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i}. \quad (2.61)$$

Um die Eindeutigkeit der Lösung zu sichern, wird für Wellen kleiner Amplitude angenommen, daß die Funktion Z einen bestimmten Wert an der mittleren Oberfläche hat aber über die Tiefe variiert:

$$Z = 1 \quad \text{bei} \quad z = \eta. \quad (2.62)$$

Aus den Gleichungen 2.62 und 2.56 ergibt sich eine weitere Beziehung:

$$b \exp[kd] + c \exp[-kd] = 1, \quad \text{wobei} \quad d = \eta + h \quad \text{ist.} \quad (2.63)$$

Unter Zuhilfenahme dieser beiden Beziehungen kann nun b und c bestimmt werden:

$$b = \frac{1 + s}{(1 + s) \exp[kd] + (1 - s) \exp[-kd]}, \quad (2.64)$$

$$c = \frac{1 - s}{(1 + s) \exp[kd] + (1 - s) \exp[-kd]}. \quad (2.65)$$

Somit hat die Funktion Z die Form

$$Z = \frac{(1 + s) \exp[k(z + h)] + (1 - s) \exp[-k(z + h)]}{(1 + s) \exp[kd] + (1 - s) \exp[-kd]}. \quad (2.66)$$

Diese kann weiter zu

$$Z = \cosh(k(z - \eta)) + T^* \sinh(k(z - \eta)) \quad (2.67)$$

mit

$$T^* = \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)} \quad (2.68)$$

umgeformt werden.

Durch das Einsetzen der Gleichungen 2.50, 2.51 und 2.62 in die Bedingung 2.47 an der freien Oberfläche und unter Ausnutzung der Definition 2.39 kann

$$A = -\frac{g a}{\frac{\partial S}{\partial t}} \quad (2.69)$$

bestimmt werden.

Wird weiterhin die Wellenfrequenz als

$$\sigma := \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.70)$$

definiert, so hat die Potentialfunktion der Orbitalgeschwindigkeit der Welle die Form:

$$\Phi = \frac{g a}{\sigma} [\cosh(k(z - \eta)) + T^* \sinh(k(z - \eta))] \cos(S). \quad (2.71)$$

Dies ist das Geschwindigkeitspotential für die Bewegung von progressiven Wellen über schwach geneigtem Boden. Das so gefundene Potential Φ erfüllt die LAPLACE-Gleichung und die Randbedingungen. Werden nun die partiellen Ableitungen der Funktion Z zum einen nach z und zum anderen nach x_i abgeleitet, so ist auch die Zulässigkeit der zweiten Annahme, die Vernachlässigung der partiellen Ableitung nach x_i , gegeben.

Dieses Potential geht für flachen Boden ($s=0$) in das wohlbekannte klassische Wellenpotential über:

$$\Phi = \frac{g a}{\sigma} \frac{\cosh(k(z + \eta))}{\cosh(k d)} \cos(S). \quad (2.72)$$

Abschließend soll der Separationsfaktor k in Relation zum Wellenzahlvektor \vec{K} gebracht werden. Durch das Einsetzen von 2.51 in die Gleichung 2.55 und unter Zuhilfenahme der Definition des Wellenzahlvektors

$$K_i := \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad (2.73)$$

ergibt sich die von BATTJES [3] entwickelte Gleichung

$$K^2 = k^2 + \delta^* \quad (2.74)$$

mit

$$\delta^* = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2}. \quad (2.75)$$

Geht man von der Definition des Wellenpotentials aus, so können die Geschwindigkeitskomponenten durch Differentiation des Potentials ermittelt werden.

2.3.4 Dispersionsbeziehung

Zum Abschluß wird der Zusammenhang zwischen Separationsfaktor k und Kreisfrequenz spezifiziert. Durch Substitution der Gleichungen 2.50 und 2.51 in die Randbedingung an der Oberfläche 2.47 ergibt sich die Dispersionsbeziehung für schwach bis mittelt geneigten Boden.

Die unter allgemeineren Voraussetzungen gültige Dispersionsrelation lautet:

$$\sigma^2 = gk \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)} = gk T^* \quad (2.76)$$

mit

$$s = -\frac{1}{k} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \quad \text{und}$$

$$A = -\frac{g a}{\sigma}.$$

Bei der Verwendung dieser Dispersionsbeziehung ist zu beachten, daß die Kreisfrequenz σ der Welle auf beiden Seiten der Gleichung vertreten ist. Dies erschwert bei der numerischen Realisierung die Lösung dieser Gleichung.

Beim Übergang zu flachem Seegrund, d.h. $\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{\partial d}{\partial y} = 0$ wird $s = 0$ und aus 2.76 entsteht die klassische Dispersionsrelation

$$\sigma^2 = gk \tanh(kd). \quad (2.77)$$

Kapitel 3

Mathematische Formulierung der Wellengleichung

In diesem Kapitel wird das mathematische Modell zur Beschreibung des Seegangs entwickelt. Ausgehend von der allgemeinen kinematischen Wellentheorie und der von YOO vorgestellten Dispersionsbeziehung wird im ersten Teil eine neue Formulierung zur Beschreibung der Wellenausbreitung hergeleitet. Im zweiten Abschnitt wird die Herleitung der Wellenenergieerhaltungsgleichung vorgestellt. Nachdem die konkrete Form der *radiation stress* bestimmt wurde, werden zum Abschluß die Parametrisierungen des Wellenbrechens, von Turbulenz- sowie Reibungserscheinungen und deren Integration in die Gleichung der Energieerhaltung beschrieben.

3.1 Betrachtung der Wellenausbreitung

Zunächst werden die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung des Einflusses der Strömung und der variablen Tiefe auf die Wellenausbreitung dargelegt. Für die betrachtete Problemklasse der Hydrodynamik im Küstenbereich ist es erlaubt anzunehmen, daß die charakteristischen Zeitspannen und räumlichen Ausdehnungen der Grundströmung (im allgemeinen tideinduziert) wesentlich größer sind als die des Seegangs.

Hierfür ist es notwendig, die Ordnung der Geschwindigkeitskomponenten sowohl der Orbitalgeschwindigkeiten des Seegangs als auch die der zugrundeliegenden Strömung abzuschätzen. Ausgehend von der Definition des Wellenpotentials 2.40 können die Geschwindigkeitskomponenten durch Differentiation des Wellenpotentials 2.71 bestimmt

werden:

$$u_i = \frac{K_i g a}{\sigma} [\cosh(k(z - \eta)) + T^* \sinh(k(z - \eta))] \sin(S), \quad (3.1)$$

$$u_3 = -\frac{k g a}{\sigma} [\sinh(k(z - \eta)) + T^* \cosh(k(z - \eta))] \cos(S). \quad (3.2)$$

Anhand dieser Gleichungen ergibt sich sofort die Abschätzung:

$$u_i = O[(k a) \sqrt{g d}]. \quad (3.3)$$

Dabei ist $O()$ das große LANDAU-Symbol. Die verwendete Nomenklatur ist analog zu Kapitel 2. Diese Abschätzung entspricht der Abschätzung bei der Verwendung des klassischen Wellenpotentials. Es kann nun der klassischen Argumentation gefolgt werden.

In den letzten Jahrzehnten erfuhr die Entwicklung der kinetischen Wellentheorie eine geschlossene Darstellung. Insbesondere sei hier die umfassende Arbeit von Hayes [18] genannt. Hayes gibt folgende Beschreibung der kinematischen Wellentheorie: "Die kinematische Theorie der Wellenausbreitung basiert auf den Annahmen, in einem asymptotischen Sinne, daß Wellen annähernd lokale plane Wellen sind, d.h. sie lassen sich in einem Raum (\vec{x}, t) beschreiben." (S.210,[18]). Für ebene Wellen ergeben sich Wellenzahlvektor \vec{K} und Kreisfrequenz σ aus dem Ortsgradienten bzw. der zeitlichen Ableitung der Phasenfunktion S :

$$K_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad (3.4)$$

$$\sigma = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Werden nun die gemischten zweiten Ableitungen gebildet, so ergibt dies

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial S}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right). \quad (3.7)$$

Diese vier Gleichungen 3.4 - 3.7 zusammen mit der Dispersionsgleichung 2.76 ergeben die Gleichungen zur Beschreibung der Wellenausbreitung:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad (3.9)$$

$$\sigma^2 = gk \frac{\tanh(k d) + s}{1 + s \tanh(k d)}. \quad (3.10)$$

Da die Dynamik der Wellenbewegung in bzw. auf einem bewegten Medium wesentlich anders ist als auf einem ruhenden Medium, folgen zunächst einige Bemerkungen und Definitionen.

Wird die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit über die Tiefe vernachlässigt, so können zunächst zwei Koordinatensysteme eingeführt werden.

Das absolute Koordinatensystem ist fest auf der Ebene und wird mit dem Index 'a' bezeichnet. Das zweite Koordinatensystem ist das Galilei-transformierte des absoluten, wobei die Transformationsgeschwindigkeit die der Strömungsgeschwindigkeit entspricht. Betrachtungen in diesem Koordinatensystem werden durch die Indizes 'r' gekennzeichnet. Ist \vec{x}_a die Position im absoluten System und herrscht die Geschwindigkeit \vec{U} vor, dann ergibt sich die zugehörige Position \vec{x}_r wie folgt:

$$\vec{x}_r = \vec{x}_a + \vec{U}t. \quad (3.11)$$

Wird vorausgesetzt, daß die örtliche Änderung der Strömung gering ist im Vergleich zur Phasenfunktion, läßt sich die Bewegung einer lokal planen Welle auf einem bewegten Medium durch die folgende Phasenfunktion beschreiben:

$$S = \vec{K}\vec{x}_a + \sigma_a t + S_{St} \quad (3.12)$$

bzw.

$$S = \vec{K}\vec{x}_r + \sigma_r t + S_{St} = \vec{K}\vec{x}_a + (\sigma_r + \vec{K}\vec{U})t + S_{St}, \quad (3.13)$$

wobei S_{St} die Startphase ist.

Aus dem Vergleich von 3.12 und 3.13 ergibt sich nun die Relation

$$\sigma_a = \sigma_r + \vec{K}\vec{U}. \quad (3.14)$$

Dies ist die sogenannte Doppler-Gleichung, welche unter der Annahme kleinskaliger Strömung und geringer Bodenneigung gilt. Sie beschreibt die Beziehung zwischen der absoluten Kreisfrequenz

$$\sigma_a = \frac{2\pi}{T_a} \quad (3.15)$$

und der relativen Kreisfrequenz

$$\sigma_r = \frac{2\pi}{T_r}, \quad (3.16)$$

wobei T_r die relative Wellenperiode ist.

Die relative Kreisfrequenz ergibt sich aus der Dispersions-Relation 2.76

$$\sigma_r^2 = gk \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)} \quad (3.17)$$

mit

$$s := -\frac{1}{k} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i},$$

$$A := -\frac{ga}{\sigma_r},$$

$d := h + \eta$ und a - Wellenamplitude. Dabei ist η die Wasserspiegelauslenkung der zugrundeliegenden Strömung.

Aus 3.13 ist ersichtlich, daß viele der Zusammenhänge sinusförmiger Wellen im ruhenden Wasser übertragen bzw. genutzt werden können zur Beschreibung von entsprechenden Vorgängen in sich bewegenden Medien durch die Verwendung der relativen Kreisfrequenz σ_r (siehe [38]).

Ausgehend von dem eben beschriebenen Konzept, stellen sich die Gleichungen 3.8 ($i = 1, 2$), 3.9, 2.74, 3.14 und 2.76 zur Beschreibung der Wellenausbreitung wie folgt dar:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_a}{\partial x_i} = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}, \quad (3.19)$$

$$k^2 = K^2 - \delta^* \quad \text{und} \quad (3.20)$$

$$\sigma_a = \sqrt{gk \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)}} + \vec{K} \vec{U}. \quad (3.21)$$

Dies sind nun die Gleichungen zur Bestimmung der drei gesuchten Variablen K_i ($i=1,2$) und σ_a . Zur Bestimmung der beiden Unbekannten K_i ($i=1,2$) müssen die drei Gleichungen, die Gleichungen 3.18 mit $i=1,2$ und die Bedingung der Rotationsfreiheit 3.19, erfüllt werden. Im folgenden wird eine Herangehensweise vorgestellt, die diese drei Gleichungen auf zwei reduziert, die äquivalent zu den Ausgangsgleichungen sind. Die Idee besteht darin, durch die Addition von "produktiven Nullen" zu den Gleichungen 3.18 eine Reduzierung der Gleichungsanzahl zu erreichen. Wird die Bedingung der Rotationsfreiheit 3.19 betrachtet, so ist der Term $\frac{\partial K_1}{\partial x_2} - \frac{\partial K_2}{\partial x_1}$ Null. Dies ist ein Kandidat für eine "produktive Null". Ein solcher Eingriff in die Gleichungen 3.18 darf jedoch den Charakter und die den Gleichungen innewohnenden Geschwindigkeiten nicht verändern. Es wird nun untersucht, ob es Vorfaktoren zu dieser "produktiven Null" geben muß.

In etwas anderer Schreibweise hat die Gleichung 3.18 die Form:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(\sigma_r + \sum_{j=1}^2 K_j U_j \right)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.22)$$

Zunächst wird die partielle Ableitung von σ_r bestimmt. Ausgehend von der Beziehung

$$T := \tanh(k d) \quad (3.23)$$

hat die Dispersionsbeziehung 2.76 die Form:

$$\sigma_r^2 = g k \frac{T + s}{1 + s T} \quad (3.24)$$

und die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i} = \frac{g}{2\sigma_r} \left\{ \frac{T + s}{1 + s T} \frac{\partial k}{\partial x_i} + k \left[\frac{(1 + s T) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - (T + s) \left(T \frac{\partial s}{\partial x_i} + s \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)}{(1 + s T)^2} \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Es wird sich zeigen, daß es ausreichend ist, nur diejenigen Ausdrücke zu betrachten, die den Term $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ enthalten:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i} = \frac{g}{2\sigma_r} \left\{ \frac{T + s}{1 + s T} \left[\frac{\partial k}{\partial x_i} + \frac{k}{T + s} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{k s}{1 + s T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + f_1 \right\}, \quad (3.26)$$

$$= \frac{g}{2\sigma_r} \left\{ \frac{T + s}{1 + s T} \left[\frac{\partial k}{\partial x_i} + \left(\frac{k}{T + s} - \frac{k s}{1 + s T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + f_1 \right\}. \quad (3.27)$$

Der Ausdruck f_1 enthält alle weiteren Terme, die nicht $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ bzw. $\frac{\partial k}{\partial x_i}$ enthalten. Das konkrete Aussehen von f_1 interessiert im weiteren nicht. Weitere Umformungen ergeben:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{\cosh^2(k d)} \left\{ \frac{\partial k}{\partial x_i} d + k \frac{\partial d}{\partial x_i} \right\} \quad (3.28)$$

$$= \frac{2 \tanh(k d) d}{\sinh(2k d)} \frac{\partial k}{\partial x_i} + f_2 \quad (3.29)$$

und

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i} = \frac{g}{2\sigma_r} \left\{ \frac{T + s}{1 + s T} \left[1 + \left(\frac{k}{T + s} - \frac{k s}{1 + s T} \right) \frac{2T d}{\sinh(2k d)} \right] \right\} \frac{\partial k}{\partial x_i}$$

$$+ \underbrace{\frac{g}{2\sigma_r} \left\{ \frac{T+s}{1+sT} \left(\frac{k}{T+s} - \frac{ks}{1+sT} \right) f_2 + f_1 \right\}}_{f_{rest}} \quad (3.30)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sigma_r}{k} \left[1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \left(\frac{T}{T+s} - \frac{sT}{1+sT} \right) \right] \frac{\partial k}{\partial x_i} + f_{rest} \quad (3.31)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sigma_r}{k} \left[1 + G_o \frac{1-s^2}{\left(1+\frac{s}{T}\right)(1+sT)} \right] \frac{\partial k}{\partial x_i} + f_{rest}. \quad (3.32)$$

Durch das Einführen der folgende Definitionen:

$$G := G_o \frac{1-s^2}{\left(1+\frac{s}{T}\right)(1+sT)}, \quad (3.33)$$

$$G_o := \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \quad \text{und} \quad (3.34)$$

$$C_g := \frac{1}{2}(1+G) \frac{\sigma_r}{k} \quad (3.35)$$

wird eine einfache Darstellung erreicht:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i} = C_g \frac{\partial k}{\partial x_i} + f_{rest}. \quad (3.36)$$

Zu beachten ist, daß in f_{rest} Ableitungen verschiedener Ordnungen und verschiedener Größen enthalten sind, wie $\frac{\partial(h+\eta)}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial s}{\partial x_i}$. Es ist jedoch bei der hier vorgestellten Herangehensweise nicht von Interesse, welche wirkliche (sehr komplizierte) Struktur f_{rest} besitzt. Dies wird noch deutlicher durch die Berücksichtigung von Diffraktionseffekten unter Zuhilfenahme der BATTJES-Gleichung 2.74:

$$k^2 = K^2 - \delta^* \quad \text{mit} \quad K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}. \quad (3.37)$$

Durch das Einsetzen der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^2 \frac{K_j}{k} \frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2k} \frac{\partial \delta^*}{\partial x_i} \quad (3.38)$$

in 3.36 ergibt sich nun:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i} = C_g \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{K_j}{k} \frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2k} \frac{\partial \delta^*}{\partial x_i} \right\} + f_{rest}. \quad (3.39)$$

Die Darstellung 3.39 von $\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}$ erlaubt es nun, die Bedingung der Rotationsfreiheit 3.9 in die Gleichung 3.22 einzubringen. Der Term $C_g \frac{K_j}{k} \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$ mit $i \neq j$ in $\frac{\partial \sigma_r}{\partial x_i}$ kann nun durch $C_g \frac{K_j}{k} \frac{\partial K_i}{\partial x_j}$ ersetzt werden.

Gleichung 3.22 wird damit zu

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(\sigma_r + \sum_{l=1}^2 K_l U_l \right)}{\partial x_i} - C_g \frac{K_j}{k} \left(\frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{mit } j \neq i. \quad (3.40)$$

Durch diese Vorgehensweise bleiben alle in f_{rest} zusammengefaßten Terme und Ableitungen höherer Ordnung sowie der Ausdruck $-C_g \frac{1}{2k} \frac{\partial \delta^*}{\partial x_i}$ in der Gleichung implizit enthalten.

Somit reduzieren sich die drei Gleichungen 3.22 (mit $i = 1, 2$) und 3.9 zur Bestimmung von K_i auf nur zwei. Die zusammengefaßten Gleichungen

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_a}{\partial x_i} - C_g \frac{K_j}{k} \left(\frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{mit } j \neq i \quad \text{und } i = 1, 2, \quad (3.41)$$

$$k^2 = K^2 - \delta^* \quad \text{und} \quad (3.42)$$

$$\sigma_a = \sqrt{gk \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)}} + \vec{K} \vec{U} \quad (3.43)$$

zur Beschreibung der Wellenausbreitung beinhalten eine Anzahl in der Literatur ([47], [33], [24]) beschriebener Spezialfälle.

Im Gegensatz zu den in der Literatur (Mei [33], Yoo [47], Kawahara [24] u.a.) vorgestellten Gleichungen ist eine einfache physikalische Interpretation und eine Bestimmung des mathematischen Charakters der hier entwickelten Gleichungen möglich.

1. Ist die Bedingung der Rotationsfreiheit des Vektorfeldes der Wellenzahlvektoren zu irgend einem Zeitpunkt gestört, so erfolgt die Wiederherstellung der Bedingung der Rotationsfreiheit mit der dem System innewohnenden Geschwindigkeit C_g .
2. Eine Änderung der Länge des Wellenzahlvektors wird im wesentlichen durch einen örtlichen Unterschied in der Wellenperiode hervorgerufen.
3. Eine Änderung der Wellenperiode breitet sich mit der Wellengeschwindigkeit C aus (dies folgt aus $\sigma_r = C k$).

Im Gegensatz zu der von Yoo [47] vorgestellten Herangehensweise, sind bei der Reduzierung der Gleichungsanzahl von 3 auf 2 keine Terme höherer Ordnung (vermeintliche Terme geringeren Einflusses) vernachlässigt worden.

Untersucht man die Gleichungen 3.48 vom mathematischen Standpunkt aus, so sind sie ihrem Charakter nach zum einen im nichtstationären Fall hyperbolisch und zum anderen in die Gruppe der reinen Transportgleichungen einzuordnen. Dieser Charakter wird im wesentlichen die Wahl eines numerischen Verfahrens beeinflussen.

Zum Abschluß werden nun einige Spezialfälle betrachtet, die den Übergang zum stationären Wellenmodell bilden. Wird der Einfluß einer eventuell vorhandenen Grundströmung vernachlässigt, so vereinfachen sich die Gleichungen 3.40 zu:

$$\frac{\partial K_x}{\partial t} = - \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial x} - C_g \frac{K_y}{k} \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) \right\} \quad \text{und} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial t} = - \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - C_g \frac{K_x}{k} \left(\frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} \right) \right\}. \quad (3.45)$$

Wird von der Konstanz der Wellenperiode im gesamten Untersuchungsgebiet ausgegangen, so vereinfachen sich die Gleichungen 3.44 und 3.45 weiter zu

$$\frac{\partial K_x}{\partial t} = C_g \frac{K_y}{k} \left(\frac{\partial K_y}{\partial x} - \frac{\partial K_x}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial K_y}{\partial t} = C_g \frac{K_x}{k} \left(\frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} \right). \quad (3.47)$$

Ausgehend von diesen Gleichungen entsteht im stationären Fall, bei dem die zeitlichen Ableitungen verschwinden, sofort wieder die Bedingung der Rotationsfreiheit.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde eine Herangehensweise vorgestellt, die die Ausbreitung monochromatischer linearer Wellen beschreibt. Hierzu wurden Gleichungen entwickelt, die ein hohes Maß an Allgemeingültigkeit besitzen. Der formale Aufbau der Gleichungen ist unabhängig vom Grad der betrachteten Effekte. Ihre mathematische Struktur ist unabhängig davon, ob eine zugrundeliegende Strömung, Diffraktion oder schwach geneigter Seeboden vorliegen. Die Unterschiede ergeben sich nur bei der Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit C_g , der absoluten Kreisfrequenz σ_a sowie bei der Berechnung der Wellenzahl k .

Die Gleichungen zur Bestimmung der Wellenzahlvektoren K_i lauten:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_a}{\partial x_i} - C_g \frac{K_i}{k} \left(\frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (3.48)$$

Die absolute Kreisfrequenz σ_a berechnet sich aus:

$$\sigma_a = \sigma_r + \sum_{i=1}^2 K_i U_i \quad (3.49)$$

mit der relativen Kreisfrequenz σ_r :

$$\sigma_r = \sqrt{g k \frac{\tanh kd + s}{1 + s \tanh kd}}. \quad (3.50)$$

Unter **Vernachlässigung** der **Diffractionseffekte** ergibt sich

$$\sqrt{K_1^2 + K_2^2} = K = k. \quad (3.51)$$

Wird **Diffraction eingeschlossen**, so gilt nach BATTJES

$$K^2 = k^2 + \delta^* \quad \text{bzw.} \quad k = \sqrt{K^2 - \delta^*} \quad \text{mit} \quad \delta^* = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i}. \quad (3.52)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist wie folgt definiert:

$$C_g := \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - s^2}{(1 + \frac{s}{T})(1 + sT)} \frac{2 kd}{\sinh 2 kd} \right) \frac{\sigma_r}{k}, \quad (3.53)$$

$$s := -\frac{1}{k} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad (3.54)$$

$$A := -\frac{g a}{\sigma_r}. \quad (3.55)$$

3.2 Dynamische Eigenschaften der Wellenbewegung

Im Abschnitt 3.1 wurden die mittleren kinematischen Eigenschaften des Wellenzahlvektors K_i und der Kreisfrequenz σ betrachtet. In diesem Abschnitt geht es in erster Linie um energetische Betrachtungen der Wellenbewegung. Dabei soll zum Abschluß eine Gleichung zur Bestimmung der Wellenamplitude a entwickelt werden.

Verschiedene allgemeine zeitgemittelte integrale Eigenschaften, wie sie bei PHILLIPS [39] beschrieben sind, sind Grundlage dieses Abschnittes. Durch eine Konkretisierung des Energieflusses F_i erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Wellenenergie. Größen, die in diesem Zusammenhang Verwendung finden, werden die kinetische, potentielle und die Gesamtenergie E_K , E_P und E_t sein. Sie sind wie folgt definiert:

$$E_k := \overline{\frac{\rho}{2} \int_{-h}^{\xi} \left(\sum_{j=1}^2 u_j^2 + w^2 \right) dz}, \quad (3.56)$$

$$E_p := \overline{\int_0^{\xi} \rho g z dz}, \quad (3.57)$$

$$E_t := E_k + E_p \quad \text{und} \quad (3.58)$$

$$F_i := \overline{\int_{-h}^{\xi} \left[p + \frac{\rho}{2} \left(\sum_{j=1}^2 u_j^2 + w^2 \right) + \rho g z \right] u_i dz}. \quad (3.59)$$

Die schon im Kapitel 2.3.2 entwickelten *radiation stress* S_{ij} werden konkretisiert.

Um ein Gefühl für die obigen Größen unter Verwendung des verallgemeinerten Potentials zu bekommen, werden diese unter Vernachlässigung einer Grundströmung im folgenden vorgestellt.

Die **Wellenenergie** E_t setzt sich zusammen aus kinetischer und potentieller Energie. Ausgehend von der Definition der kinetische Energie 3.56 ergibt sich durch das Einsetzen des Potentialansatzes:

$$E_k = \frac{\rho}{2} \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \int_{-h}^{\xi} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)^2 dz dt. \quad (3.60)$$

Ausgehend von dem Wellenpotential 2.71 ergibt dies

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 = \left(\frac{ga}{\sigma_r} \right)^2 K_i^2 \sin^2(S) [\cosh(k(z - \eta)) + T^* \sinh(k(z - \eta))]^2 \quad \text{und} \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{ga}{\sigma_r}\right)^2 k^2 \cos^2(S) [\sinh(k(z-\eta)) + T^* \cosh(k(z-\eta))]^2 \quad (3.62)$$

mit

$$T^* := \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)}. \quad (3.63)$$

Siehe hierzu auch die Gleichungen 2.61 und 2.69.

Im weiteren werden folgende Bezeichnungen benutzt

$$Z := [\cosh(k(z-\eta)) + T^* \sinh(k(z-\eta))]^2 \quad (3.64)$$

und

$$\begin{aligned} Z^* &:= \frac{1}{k} \frac{\partial Z}{\partial z} \\ &= \sinh k(z-\eta) + T^* \cosh k(z-\eta). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Unter Verwendung der BATTJES-Gleichung 2.74, wonach $K^2 = k^2 + \delta^*$ ist, hat die kinetische Energie die Form:

$$E_k = \frac{1}{4} \rho g a^2 g \left(\frac{k}{\sigma_r}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{\delta^*}{k}\right) \int_{-h}^{\eta} Z^2 dz + \int_{-h}^{\eta} (Z^*)^2 dz \right]. \quad (3.66)$$

Die Integralausdrücke können zu

$$\begin{aligned} g \left(\frac{k}{\sigma_r}\right)^2 \int_{-h}^{\eta} Z^2 dz &= \frac{1}{2}(1 + F + G) \quad \text{und} \\ g \left(\frac{k}{\sigma_r}\right)^2 \int_{-h}^{\eta} (Z^*)^2 dz &= \frac{1}{2}(1 + F - G) \end{aligned}$$

mit

$$G = \frac{(1 - s^2) G_0}{\left(1 + \frac{s}{T}\right) (1 + sT)} \quad \text{und} \quad (3.67)$$

$$F = \frac{-s G_0}{\left(1 + \frac{s}{T}\right) (1 + sT) kd} \quad (3.68)$$

vereinfacht werden. Durch Einsetzen dieser Relationen ergibt sich:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[1 + F + \frac{\delta^*}{k} (1 + F + G) \right] \frac{1}{2} \rho g a^2. \quad (3.69)$$

Die Bestimmung der potentiellen Energie einer Welle ist wesentlich einfacher:

$$E_p = \overline{\int_{-h}^{\xi} \rho g z dz} - \int_{-h}^{\eta} \rho g z dz = \frac{1}{4} \rho g a^2. \quad (3.70)$$

Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ergibt die totale Energie der Welle:

$$E_t = (1 + \zeta) \frac{1}{2} \rho g a^2 \quad (3.71)$$

mit

$$\zeta = \frac{F}{2} + \frac{\delta^*}{k} (1 + F + G). \quad (3.72)$$

Wird mit E die Wellenenergie nach der klassischen Theorie bezeichnet:

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2, \quad (3.73)$$

so ist erkennbar, daß die kinetische Energie nicht gleich der potentiellen Energie ist, wie dies bei der linearen Wellentheorie mit konstanter Wassertiefe der Fall ist.

Ein weiterer Unterschied zum klassischen Wellenpotential zeigt sich im **Energie-transport**:

$$F_i = \overline{\int_{-h}^{\eta} u_i \left(\frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^2 \dot{u}_j^2 + \rho g z + p \right) dz}. \quad (3.74)$$

Unter Zuhilfenahme der BERNOULLI Gleichung 2.42 und des Wellenpotentials ergibt sich folgende Umformung

$$\begin{aligned} F_i &= \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dz} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} \rho \left(K_i \frac{ga}{\sigma_r} Z \sin S \right) \left(\frac{\partial S}{\partial t} \frac{ga}{\sigma_r} Z \sin S \right) dz dS \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 \frac{K_i}{k} \frac{\sigma_r}{k} g \left(\frac{k}{\sigma_r} \right)^2 \int_{-h}^{\eta} Z^2 dz \\ &= \frac{1}{2} (1 + F + G) \frac{K_i}{k} \frac{\sigma_r}{k} \frac{1}{2} \rho g a^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 + F + G}{1 + \zeta} \frac{K_i}{k} \frac{\sigma_r}{k} E_t. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Die **Energietransportgeschwindigkeit** C_E ist dann wie folgt definiert:

$$C_E := \frac{1}{2} \frac{1 + F + G}{1 + \zeta} \frac{K_i}{k} \frac{\sigma_r}{k}. \quad (3.76)$$

Hier ist zu erkennen, daß bei variierender Wellenamplitude und Wassertiefe die Energietransportgeschwindigkeit C_E ungleich der Gruppengeschwindigkeit C_g der Wellen ist. Es gilt folgende Relation:

$$C_E := \frac{1 + F + G}{(1 + \zeta)(1 + G)} C_g. \quad (3.77)$$

Ausgehend von der soeben praktizierten Vorgehensweise ist es unter Einbeziehung der über die Periode gemittelten Größen U_i und $\bar{\xi}$ möglich, eine Gleichung zur Bestimmung der totalen Wellenenergie zu entwickeln. Dabei lehnt sich die folgende Darstellung an die Herleitung unter Verwendung des klassischen Potentials an.

Die Wellenhöhenverteilung kann mit Hilfe des Gesetzes der Energieerhaltung berechnet werden. Dieses wurde für die Interaktion von Seegang und Strömung von LONGUET-HIGGINS und STEWART eingeführt. Dabei wird die Gleichung der Impulserhaltung skalar mit dem Vektor der Geschwindigkeit \vec{u} multipliziert und über ein beliebiges Kontrollvolumen $V(t)$, welches durch $S_0(t)$ begrenzt ist, integriert. Die entstehenden Gleichungen spiegeln das Gleichgewicht der mechanischen Energie im Volumen $V(t)$ wieder:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \int_V \int \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho g \delta_{i3} u_i \right) dV \\ &= - \int \int_{S_0} \frac{1}{2} \rho u_i^2 u_j n_j dS_0 + \int \int_{S_0} \{ -P \delta_{ij} + \tau_{ij} \} n_j u_i dS_0 \\ & \quad - \frac{1}{2\mu} \int \int_V \int \tau_{ij}^2 dV. \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der Viskosität und durch die Wahl einer bestimmten Form des Kontrollvolumens, nämlich der Wassersäule über einem Quadrat, erhält die Gleichung der Energieerhaltung die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho g z \right) dz + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\xi} u_j \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho g z + p \right) dz = 0. \quad (3.78)$$

Durch das Einsetzen des Ansatzes $u_i = U_i + \hat{u}_i$ in die Gleichung 3.78 und Integration über die Wellenperiode T ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\xi} \left(\frac{1}{2} \rho (U_i + \hat{u}_i)^2 + \rho g z \right) dz$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\xi} (U_j + \hat{u}_j) \left(\frac{1}{2} \rho (U_i + \hat{u}_i)^2 + \rho g z + p \right) dz & \quad (3.79) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

mit dem mittleren Durchfluß

$$Q_i := \rho(\eta - h)U_i. \quad (3.80)$$

Werden folgende Beziehungen beachtet:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h}^{\xi} u_1 u_2 dz &= \left[u_1 \int_{-h}^{\xi} u_2 dz \right]_{-h}^{\xi} - \int_{-h}^{\xi} \frac{\partial u_1}{\partial z} \int_{-h}^{\xi} u_2 dz dz, \\
 \frac{\partial U_i}{\partial z} &= 0, \\
 \overline{\int_{-h}^{\xi} \hat{u}_i dz} &= 0
 \end{aligned}$$

und wird eine Aufspaltung des Tiefenintegrals bis zur mittleren Wasseroberfläche vorgenommen, ergibt dies:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} U_i Q_i + \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - h^2) + \overline{\int_{-h}^{\xi} \frac{1}{2} \rho \hat{u}_i^2 dz} + \overline{\int_{\eta}^{\xi} \rho g z dz} \right] \\
 + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\xi} (U_j + \hat{u}_j) \left(\frac{1}{2} \rho (U_i^2 + 2U_i \hat{u}_i + \hat{u}_i^2) + \rho g z + p \right) dz & = 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} U_i Q_i + \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - h^2) + \overline{\int_{-h}^{\xi} \frac{1}{2} \rho \hat{u}_i^2 dz} + \overline{\int_{\eta}^{\xi} \rho g z dz} \right] \\
 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{\int_{-h}^{\xi} \hat{u}_j \left(\frac{1}{2} \rho \hat{u}_i^2 + \rho g z + p \right) dz} + U_i \left\{ \overline{\int_{-h}^{\xi} \frac{1}{2} \rho \hat{u}_i^2 dz} + \overline{\int_{\eta}^{\xi} \rho g z dz} \right\} \right] \\
 + g \eta Q_i + U_j \left[\overline{\int_{-h}^{\xi} p \delta_{ij} + \rho \hat{u}_i \hat{u}_j dz} - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\xi} + h)^2 \delta_{ij} \right] \\
 + \overline{\int_{-h}^{\xi} \frac{\rho}{2} U_i^2 U_j dz} & \quad (3.81) \\
 & = 0.
 \end{aligned}$$

Es werden nun einige Terme etwas genauer betrachtet. Unter Ausnutzung der Gleichungen 2.21 und 2.33 sowie der Bezeichnung $d = \eta + h$ ergeben sich folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} U_i Q_i \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_i^2}{\rho d} \right) \\
&= \frac{Q_i}{\rho d} \frac{\partial Q_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q_i}{\rho d} \right)^2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho d) \\
&= \frac{Q_i}{\rho d} \frac{\partial Q_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q_i}{\rho d} \right)^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} \\
&= -\frac{Q_i}{\rho d} \left(\sum_{j=1}^2 Q_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho g(\eta + h) \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\tau_i^B}{\|\nabla B\|} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-S_{ij} + \int_{-h}^{\xi} \tau_{ij} dz \right] \right) \\
&\quad - \frac{Q_i}{\rho d} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 U_i \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} U_i Q_i \right) = -U_i \left(Q_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{U_i}{2} \frac{\partial Q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - (\hat{T}_i - \hat{T}_i^B) \right) \tag{3.83}$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{T}_i &:= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h}^{\xi} \tau_{ij} dz, \\
\hat{T}_i^B &:= \frac{\tau_i^B}{\|\nabla B\|}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - h^2) \right] &= \rho g \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} - \rho g h \frac{\partial h}{\partial t} \\
&= -g \eta \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Q_j}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Werden diese Identitäten in die Gleichung der Energieerhaltung 3.81 eingesetzt, so ergibt dies:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\eta}^{\xi} \frac{1}{2} \rho \hat{u}_i^2 dz + \int_{-\eta}^{\xi} \rho g z dz \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial x_i} &\left[\int_{-\xi}^{\eta} \hat{u}_i \left(\frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j^2 + \rho g z + p \right) dz + U_i \left\{ \int_{-\eta}^{\xi} \frac{\rho}{2} \hat{u}_i^2 dz + \int_{-\eta}^{\xi} \rho g z dz \right\} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^2 S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - U_i (\hat{T}_i - \hat{T}_i^B) = 0.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Durch das Einführen der folgenden Bezeichnung:

$$\hat{E} = \overline{\int_{-\eta}^{\xi} \frac{1}{2} \rho \hat{u}_i^2 dz} + \overline{\int_{\eta}^{\xi} \rho g z dz} \quad (3.86)$$

$$\hat{F}_i = \overline{\int_{-\eta}^{\xi} \hat{u}_i \left(\frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j^2 + \rho g z + p \right) dz} \quad (3.87)$$

erhält die Energieerhaltungsgleichung die Form:

$$\frac{\partial \hat{E}_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \hat{E}_t + \hat{F}_i) + \sum_{j=1}^2 S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - U_i (\hat{T}_i - \hat{T}_i^B) = 0. \quad (3.88)$$

Diese Gleichung beschreibt die Energieausbreitung, die vom welleninduzierten und turbulenten Geschehen ($\hat{u} := u^d + \tilde{u} + u'$) getragen wird (was durch die Hüte über den Variablen gekennzeichnet ist).

Theoretisch ist es möglich, auf analoge Weise eine weitere Zerlegung der Energieausbreitung \hat{F} in welleninduzierten und turbulenten Energiefluß durchzuführen. Dadurch wird es jedoch nötig, ein hochauflösendes Turbulenzmodell einzubeziehen.

An diesem Punkt werden weitere Einschränkungen gemacht, um eine ingenieurpraktisch anwendbare Gleichung zu erhalten. Es wird angenommen, daß der Energieanteil aus der Wellenbewegung dominant ist. Eine Energieausbreitung infolge Turbulenz sei vernachlässigbar. Damit können die Hüte über den Variablen weggelassen werden.

Die so entstandene Gleichung zur Bestimmung der Wellenergieausbreitung lautet:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i E_t + F_i) + \sum_{j=1}^2 S_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - U_i (T_i - T_i^B) = \epsilon_b. \quad (3.89)$$

Dabei wird der Energieverlust infolge Wellenbrechen mit ϵ_b bezeichnet. Die konkrete Form des Wellenbrechens wird in einem gesonderten Abschnitt betrachtet.

Mit dieser Gleichung ist es nun möglich, die Energieausbreitung zu bestimmen. Im folgenden wird zusätzlich eine genäherte Darstellung bezüglich der Wellenamplitude gegeben. Bei der numerischen Approximation gewinnt diese Gleichung noch an Bedeutung.

Durch das Einsetzen der totalen Wellenenergie $E_t = (1 + \zeta) \frac{1}{2} \rho g a^2$ (siehe Gleichung 3.71) und eine Vernachlässigung der zeitlichen Ableitung von ζ ergibt sich eine Formulierung in der Wellenamplitude:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i + C_{Ei}) a^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{S_{ij}}{\rho g a} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{U_i (T_i - T_i^B)}{\rho g a} = \frac{\epsilon_b}{\rho g a}. \quad (3.90)$$

3.3 Radiation Stress

Die schon häufig verwendeten Terme des *radiation stress* S_{ij} spielen bei der Interaktion zwischen Strömung und Seegang eine zentrale Rolle. Deshalb werden diese Terme in diesem Abschnitt ausführlich behandelt und für die numerische Realisierung konkretisiert. Eine geschlossene Darstellung der Grundlagen sind bei LONGUET-HIGGINS [32], MEI [33] und PHILLIPS [39] zu finden. Zum Abschluß dieses Abschnittes wird eine konkrete Darstellung auf der Grundlage des verwendeten Wellenpotentials gegeben [47]. Ausgehend von der Definition des *radiation stress* 2.34:

$$S_{ij} = \left[\overline{\int_{-h}^{\xi} p dz} - \int_{-h}^{\bar{\xi}} \rho g (\bar{\xi} - z) dz \right] \delta_{ij} + \overline{\int_{-h}^{\xi} \rho \hat{u}_i \hat{u}_j dz} \quad (3.91)$$

kann im folgenden eine Zerlegung in wellen- und turbulenzinduzierten Momentenüberschuß vorgenommen werden.

Die im Abschnitt 2.2 eingeführten Größen \hat{u}_i und $\xi - \bar{\xi}$ seien unter Vernachlässigung der Variation der Grundströmung über die Tiefe in Wellen- und Turbulenzschwankungen wie folgt zerlegt:

$$\hat{u}_i = \tilde{u}_i + u'_i, \quad \xi - \bar{\xi} = \tilde{\xi} + \xi'.$$

Auf Grundlage dieser Zerlegung kann nun eine Zerlegung der *radiation stress* S_{ij} vorgenommen werden, die die Spannungen darstellen auf der Grundlage der Wellen- bzw. Turbulenzbewegung. Aus der Definition der gemittelten Oberflächenauslenkung erhält man die offensichtliche Abschätzung $\xi - \bar{\xi} = O(a)$. Wird, wie oben schon beschrieben, die Unkorreliertheit der Wellen- und Turbulenzbewegungen vorausgesetzt:

$$\overline{\tilde{u}_i u'_i} = 0, \quad \overline{\tilde{\xi} \xi'} = 0,$$

so haben die *radiation stress* die Form:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \tilde{S}_{ij} + S'_{ij}, \quad \text{wobei} \\ \tilde{S}_{ij} &= \rho \left\{ g \frac{\overline{\tilde{\xi}^2}}{2} + \int_{-h}^{\bar{\xi}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^{\bar{\xi}} \overline{\tilde{u}_i \tilde{w}} dz da - \int_{-h}^{\bar{\xi}} \overline{\tilde{w}^2} dz \right\} \delta_{ij} \\ &\quad + \rho \int_{-h}^{\bar{\xi}} \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} dz. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Eine analoge Form hat S'_{ij} , wobei die mit einer Tilde gekennzeichneten Variablen durch einmal gestrichene ersetzt werden.

LONGUET-HIGGINS und STEWART haben die Größen \tilde{S}_{ij} allein als *radiation stress* bezeichnet.

Im weiteren wird ausschließlich der Wellenanteil an den *radiation stress* unter Verwendung des konkreten Wellenpotentials betrachtet und die Tilde weggelassen. Hierbei wird der Argumentation von PHILLIPS [39] gefolgt, wonach der mittlere Term in den geschweiften Klammern in der Gleichung 3.92 vernachlässigt werden kann. Werden reine progressive Wellen angenommen, so verschwindet dieser Term. Die verbleibenden Terme haben folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\rho g}{2} \bar{\xi}^2 &= \frac{\rho g}{4} a^2 \\ &= \frac{1}{2} E, \\ -\rho \int_{-h}^{\eta} \bar{w}^2 dz &= \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho g a^2 \cos^2 S g \left(\frac{k}{\sigma_r} \right)^2 (Z^*)^2 dS dz \\ &= -\frac{1}{2} (1 + F - G) E, \\ \rho \int_{-h}^{\eta} \overline{u_i u_j} dz &= \int_{-h}^{\eta} \overline{\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta} \rho g a^2 \frac{K_i K_j}{k^2} g \left(\frac{k}{\sigma_r} \right)^2 Z^2 \sin^2 S dz dS \\ &= \frac{1}{2} \rho g a^2 (1 + \delta) \frac{K_i}{K} \frac{K_j}{K} g \left(\frac{k}{\sigma_r} \right)^2 \int_{-h}^{\eta} Z^2 dz \\ &= \frac{1}{2} (1 + \delta) (1 + F + G) \frac{K_i}{K} \frac{K_j}{K} E. \end{aligned}$$

Zusammengefaßt haben die *radiation stress* unter Verwendung des verallgemeinerten Wellenpotentials die Form:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left[(1 + \delta) (1 + F + G) \frac{K_i}{K} \frac{K_j}{K} + (G - F) \delta_{ij} \right] E. \quad (3.93)$$

Hierbei ist E die totale Wellenenergie nach der klassischen linearen Wellentheorie:

$$E := \frac{1}{2} \rho g a^2. \quad (3.94)$$

Wird von einem ebenen Seegrund ausgegangen, geht diese Darstellung in die klas-

sische Beschreibung des *radiation stress* über:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(1 + G) \frac{K_i K_j}{K K} E + \frac{1}{2} G \delta_{ij} E. \quad (3.95)$$

3.4 Wellenbrechen

Die Transformation der Wellen im strandnahen Bereich wird wesentlich durch das Auftreten von Brechvorgängen der Wellen bestimmt. Das Wellenbrechen erfolgt durch einen Stabilitätsverlust der Wellen bzw. der Wellenformationen und stellt eine Umwandlung der Wellenenergie in andere Energieformen dar. Wellen werden instabil sobald die Orbitalgeschwindigkeit der Wasserteilchen auf der Wasseroberfläche die Wellenfortschrittsgeschwindigkeit erreicht und übersteigt. Viele aufwendige Forschungsarbeiten sind in den letzten Jahren zum Thema Wellenbrechen durchgeführt worden, um die genaue Struktur brechender Wellen zu verstehen. Für die Anwendung bei der Untersuchung großräumiger Vorgänge sind diese kleinskaligen Modellvorstellungen nicht nutzbar. Deshalb werden für große Untersuchungsgebiete, mit dem Bewußtsein der Unzulänglichkeit, einfache Parametrisierungen und Kriterien zur Beschreibung der Brechprozesse verwendet.

Ein wesentlicher Aspekt bei der Simulation von Seegangerscheinungen ist die numerische Realisierung dieses Energieumwandlungsprozesses. Historische Entwicklungen haben Brecherkriterien und die damit verbundene Dissipation durch eine Überprüfung der Wellenhöhe in jedem Zeitschritt und deren Korrektur auf eine stabile Wellenhöhe realisiert. Durch Einführung eines zusätzlichen Dissipationsterms ϵ_B im Bereich des Brechens in die Wellenenergieerhaltungsgleichung 3.89 bzw. in die Gleichung der Wellenamplitude 3.90 wird eher den physikalischen Gegebenheiten entsprochen.

DALLY, DEAN und DALRYMPLE [12] gehen in ihrer Modellvorstellung des Wellenbrechens davon aus, daß nach dem Wellenbrechen wieder eine lineare Welle mit einer stabilen Wellenhöhe existiert. Deshalb wird angenommen, daß die Rate der Energiedissipation in der Brecherzone proportional zur Differenz zwischen dem aktuellen Energiefluß (EC_g) und dem Energiefluß einer stabilen Welle ($EC_g)_s$ ist. Die Energiedissipation infolge Wellenbrechens hat dann die Form

$$\epsilon_B = -\frac{K_B}{d}(EC_g - (EC_g)_s). \quad (3.96)$$

In [12] wird die Verwendung einer Konstanten $K_B = 0.15$ vorgeschlagen. WATANABE und MARUYAMA [45] haben den Faktor K_B in Abhängigkeit von der Neigung des Unterwasserstrandes β spezifiziert:

$$K_B = \alpha_D \tan(\beta), \quad (3.97)$$

wobei $\alpha_D = 2.5$ eine empirische Konstante ist.

Die Wellenenergie (einer stabilen Welle) nach dem Brechen ergibt sich aus den verschiedenen Brecherkriterien.

Vom ingenieurpraktischen Standpunkt gesehen werden zwei unterschiedliche Ursachen des Wellenbrechens klassifiziert. Hiernach können Wellen brechen, wenn entweder die Grenzsteilheit der Welle überschritten oder ein bestimmtes Verhältnis von Wellenhöhe zur Wassertiefe erreicht wird. Aus der Vielzahl von verschiedenen Brecherkriterien seien hier nur zwei klassische genannt.

Basierend auf der STOKESschen-Wellentheorie haben MICHELL und MICHE [1] das folgende Brecherkriterium bezüglich der Grenzsteilheit der Wellen entwickelt:

$$(K a)_B = \frac{\pi}{7} \tanh(K d). \quad (3.98)$$

Der Einfluß der Wassertiefe auf die Grenzsteilheit ist hier mitberücksichtigt.

Aus der Analyse einer Vielzahl von Laboruntersuchungen mit unterschiedlichen Randbedingungen fand WEGGEL [46] ein Brecherkriterium, welches sowohl das Verhältnis von Wellenhöhe zu Wassertiefe als auch die Sohlneigung berücksichtigt:

$$\frac{2 a_B}{d} = b - a_1 \frac{2 a_B}{g T^2} \quad (3.99)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= 43,75 \left(1 - e^{-19\beta}\right), \\ b &= \frac{1,56}{(1 + e^{-19\beta})} \quad \text{und} \\ \beta &= \text{Neigung des Unterwasserstrandes.} \end{aligned}$$

An die Grenze der Anwendbarkeit dieses Kriteriums stößt man bei immer größer werdender Wassertiefe. Hierbei können die Wellen unendlich steil werden ohne zu Brechen.

Um dieses Problem zu beseitigen, wurde das MICHE-Kriterium von BATTJES und JANSSEN [5] wie folgt verändert:

$$(K a)_B = \frac{\pi}{7} \tanh(q K d), \quad (3.100)$$

wobei q ein Parameter ist, der verschiedene Faktoren, die das Wellenbrechen beeinflussen, beinhaltet. Eine grobe Beschreibung bildet $q = \frac{\gamma_B}{\pi}$, wobei γ_B das Verhältnis von Wellenamplitude zu Wassertiefe am Brechpunkt $\left(\frac{a}{d}\right)_B$ ist. Damit berücksichtigt dieses Brecherkriterium sowohl das Wellenbrechen infolge zu steiler Wellen als auch infolge zu geringer Wassertiefe.

Es gibt jedoch noch eine Vielzahl anderer Brecherkriterien, die für unterschiedliche Gegebenheiten angepaßt sind. Das Einbringen und die Realisierung weiterer Brecherkriterien ist im Rahmen des Dissipationsterms 3.96 möglich.

3.5 Turbulenzerscheinungen

Es ist eine Selbstverständlichkeit, daß es im Küstennahbereich zu erheblichen turbulenten Erscheinungen im Wasserkörper kommt. Dies bewirkt zum einen eine zusätzliche Energiedissipation, hat aber auch großen Anteil an der örtlichen und zeitlichen Ausdehnung von langperiodischen Strömungen. Auch hier wird wiederum unter Berücksichtigung der Modellskalen eine Parametrisierung des Ausdrucks

$$T_i := \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\int_{-h}^{\xi} \tau_{ij} dz}$$

notwendig.

Wird bei einer reinen physikalischen Betrachtungsweise geblieben, so muß der obige Ausdruck unter Verwendung der dynamischen Viskosität μ mit

$$\tau_{ij} := \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

über die Tiefe und die Wellenperiode integriert und die entstehende Funktion partiell abgeleitet werden. Auf Grund der Struktur der Geschwindigkeit \vec{u} , bestehend aus Orbitalbewegung, turbulenten Erscheinungen und Grundströmung, ist eine exakte Berechnung des obigen Ausdrucks sehr aufwendig bzw. unmöglich.

Ausgehend von der klassischen Modellvorstellung, daß es infolge Turbulenz zu lokal erhöhten Relativgeschwindigkeiten zwischen benachbarten Teilchen kommt sowie auch zu einer stärkeren Durchmischung, kann eine Parametrisierung durch eine zusätzliche Scheinzähigkeit erreicht werden. Auf analoge Weise wird versucht, sowohl die Orbitalbewegungen der Wellen wie auch die zusätzliche Turbulenz infolge Wellenbrechens zu parametrisieren. Ausgehend von diesen Bemerkungen wird folgende Parametrisierung angenommen:

$$\overline{\int_{-h}^{\xi} \tau_{ij} dz} \approx \rho (\bar{\xi} + h) (\mu + A_c + A_w) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.101)$$

wobei A_c die Scheinzähigkeit infolge turbulenter Erscheinungen der großräumigen Strömung, A_w die Scheinzähigkeit infolge Welleneinflusses und \vec{U} die über die Tiefe gemittelte Strömung ist.

Wird nun der gesamte Turbulenzeinfluß auf die i -te Impulsgleichungen betrachtet, so ergibt sich unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung folgende Parametrisierung:

$$T_i := \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\int_{-h}^{\xi} \tau_{ij} dz} \approx \rho (\bar{\xi} + h) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu + A_c + A_w) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \quad (3.102)$$

Im weiteren werden einige in der Literatur angegebene Ansätze für die Parameter A_c und A_w vorgestellt.

Für den strömungsinduzierten Austauschterm A_c werden häufig folgende Parametrisierungen verwendet:

- Konstante:
Ein konstanter Austauschkoeffizient entspricht im allgemeinen nicht dem System mit seiner variablen Punktdichte.
- Geschwindigkeitsabhängigkeit:
Für ein beliebiges Verfahren gibt ELDER [14] eine durchflußabhängige Bestimmung des horizontalen Austauschbeiwertes an: $A_c = 5.9 |q_r|$ in $[m^2/s]$, wobei $|q_r|$ den absoluten resultierenden Durchfluß pro Breitenmeter bedeutet.

In der Vergangenheit wurden verschiedene Austauschkoeffizienten zur Beschreibung der turbulenten Vorgänge im Küstennahbereich entwickelt und angewendet. Die Feld- und Laborexperimente von HARRIS (1967) [17] ergaben, daß die über die Brecherzone gemittelte turbulente Viskosität proportional zu H_B^2/T ist. LONGUET-HIGGINS (1970) [27] schlägt in seiner theoretischen Studie der küstenparallelen Strömung eine Proportionalität der turbulenten Viskosität zu $l_x \sqrt{gd}$ vor. Hierbei ist l_x der Abstand von der Küstenlinie und $N \leq 0.016$ die Proportionalitätskonstante. Diese und viele andere führten eine Parametrisierung über die charakteristischen Geschwindigkeiten in und die Ausdehnungen der Brecherzone zur Beschreibung der mittleren Eddy-Viskositäten durch. Ein wichtiger Schritt wurde von BATTJES (1975) [4] gemacht, der das Wellenbrechen als Quelle der Turbulenz in der Brecherzone einbezog. Hierbei wird ein Zusammenhang der Turbulenz zur Größe $\left(\frac{\epsilon_b}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$ hergestellt. Die Wassertiefe d stellt eine den Austausch beschränkende Größe dar:

$$A_w = M d \left(\frac{\epsilon_b}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.103)$$

dabei ist M eine dimensionslose Konstante ($0.1 < M < 0.3$).

Es ist weiterhin zu bedenken, daß durch die Anlauffrichtung der Wellen schon eine dominierende Austauschrichtung vorgegeben ist, eine Parametrisierung dieser kann sinnvoll sein.

Es muß jedoch besonders darauf hingewiesen werden, daß in diesen Ansätzen eine Anzahl von relativ frei wählbaren Parametern enthalten sind, die im Zusammenhang mit konkreten numerischen Approximationen quantifiziert werden müssen.

3.6 Reibungsformulierung

Die Bodenreibung beschreibt die komplizierten Wechselwirkungen zwischen Wellen- und großräumigen Strömungen in der turbulenten Grenzschicht am Boden. Sie spielt eine wichtige Rolle zur Ausbalancierung der Kräfte, die durch den *radiation stress* erzeugt werden, wie auch für die Umwandlung der Wellenenergie außerhalb der Brecherzone. Im folgenden wird auf einige in der Literatur dokumentierte Modellvorstellungen für den Bodenreibungsterm

$$T_j^B = \overline{\tau_j^B} \overline{\|\nabla B\|} \quad (3.104)$$

eingegangen. Grundlage der meisten Reibungsansätze für großräumige Strömungsmo-
delle ist die allgemeine nichtlineare Beziehung

$$\overline{\tau^B} = \rho C_f \overline{\|\vec{u}\|} \vec{u}. \quad (3.105)$$

Im Rahmen dieser Parametrisierung des Reibungseinflusses auf die großräumige Strömung ist \vec{u} die aktuelle Geschwindigkeit, zu verstehen als Summe aus tiefenintegrierter Geschwindigkeit \vec{U} und Orbitalgeschwindigkeit am Boden \vec{u}^b . C_f ist ein über die Seegangperiode gemittelter Reibungskoeffizient, der von verschiedenen Parametern abhängen kann. Eine der geläufigsten Reibungsformulierungen ist die nach NEWTON-TAYLOR. Sie geht von einem konstanten dimensionslosen Reibungsbeiwert C_f aus und hängt damit nur von der Strömungsgeschwindigkeit \vec{u} und der Wassertiefe $d = \eta + h$ ab. Im Gegensatz zum NEWTON-TAYLOR- und auch zum CHEZY-Ansatz hängt die Reibungsformulierung nach DARCY-WEISBACH zusätzlich vom jeweiligen Strömungszustand (laminar bzw. turbulent) ab.

Ein wesentliches Problem bei der numerischen Realisierung des Reibungsansatzes 3.105 liegt in der Bestimmung des periodengemittelten Ausdrucks $\overline{\|\vec{u}\|} \vec{u}$. Eine exakte numerische Berechnung dieses Ausdrucks ist nicht sinnvoll, da zum einen ein großer Rechenaufwand benötigt wird und zum anderen die Reibungsansätze selbst mit relativ großen Fehlern bzw. Unsicherheiten behaftet sind. Werden nur Wellen kleiner Amplitude betrachtet, die der linearen Wellentheorie und dem klassischen Potential entsprechen, so können die bodennahen Orbitalgeschwindigkeiten wie folgt berechnet werden:

$$\tilde{u}_i^b = \frac{K_i g a}{\sigma_r \cosh(kd)} \sin(S). \quad (3.106)$$

Eine erste grobe Näherung für den Ausdruck $\overline{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ kann durch den Übergang zur Betrachtung der maximal auftretenden Orbitalgeschwindigkeiten bestimmt werden. Die Bodenschubspannung ergibt sich dann als

$$\tau_i^B = \rho C_f \left(\overline{\|\vec{u}^B\|}_{max} + \|\vec{U}\| \right) \frac{U_i}{|U_i|} \left(\overline{\|\vec{u}_i^B\|}_{max} + |U_i| \right). \quad (3.107)$$

Eine Verbesserung der Näherung wird erreicht, falls die betrachteten Geschwindigkeitsverläufe über eine Periode dahingehend vereinfacht werden, daß nicht mehr von einer sinusförmigen, sondern von einer rechteckförmigen Welle mit einer Amplitude, die sich aus dem Mittelwert der Wasserspiegelauslenkung einer sinusförmigen Welle über eine halbe Periode ergibt, ausgegangen wird. Hierdurch ist eine analytische Mittelwertbildung möglich [35]:

$$\begin{aligned}
\overline{\|\vec{u}\|_{u_1}} &= \left(W + \frac{w_b^2 K_1^2}{W k^2} \right) U_1 + \frac{w_b^2 K_1 K_2}{W k^2} U_2 \quad \text{und} \\
\overline{\|\vec{u}\|_{u_2}} &= \frac{w_b^2 K_1 K_2}{W k^2} U_1 + \left(W + \frac{w_b^2 K_2^2}{W k^2} \right) U_2 \quad \text{mit} \\
W &= \left\{ \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + w_b^2 + 2(U_1 K_1/k + U_2 K_2/k)w_b} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + w_b^2 - 2(U_1 K_1/k + U_2 K_2/k)w_b} \right\} / 2 \quad \text{und} \\
w_b &= \frac{2 a \sigma_r}{\pi \sinh(k d)}. \tag{3.108}
\end{aligned}$$

Für den praktischen Einsatz ist es jedoch immer wieder notwendig, anhand von Verifikationsrechnungen die verwendbaren Reibungskoeffizienten C_f zu spezifizieren.

Kapitel 4

Anfangs- und Randwerte

Die Lösung der obigen hydrodynamischen Gleichungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente stellt von der Form her ein Rand-/Anfangswertproblem dar. In diesem Abschnitt soll aber nicht nur auf die nötigen Rand- und Anfangswerte der betrachteten partiellen Differentialgleichungen eingegangen werden, sondern auch auf Trockenfall- und Überflutungsprozesse sowie ihre Realisierung in den Gleichungen.

4.1 Anfangsbedingungen

Anfangsbedingungen müssen im gesamten Gebiet (in jedem Gitterpunkt) zu Beginn einer Simulation vorgegeben werden. Je exakter die ortsvariablen Anfangswerte mit den durch die Hydrodynamik bedingten Zustandsgrößen zu diesem Zeitpunkt übereinstimmen, um so geringer ist die dem Gesamtsystem aufgezwungene Anfangsstörung. Deshalb ist eine gute Schätzung der Anfangswerte, zum Beispiel aus schon durchgeführten Simulationen, einer groben Vorgabe vorzuziehen.

Im folgenden werden einige Methoden vorgestellt, die es erlauben, ohne auf schon durchgeführte Simulationen zurückzugreifen, Anfangsbedingungen zu generieren. Beginnt man mit den Anfangsbedingungen für die Strömungsberechnungen, so wird sich in bezug auf die zu erwartenden Phänomene zunächst auf großskalige (in Raum und Zeit) Strömungen beschränkt. Für solche (Tide-)Simulationen reichen relativ ungenaue Anfangswerte aus. Die Anfangsfehler werden infolge der Reibungsterme in den Gleichungen im Laufe einer gewissen Zeit dissipiert. Es reicht im allgemeinen ein "kalter Start", d.h. die Strömungsgeschwindigkeiten im Untersuchungsgebiet werden als Null und der Wasserstand als ein mittlerer über alle Randwerte angenommen. Im Gegensatz hierzu ist die Festlegung von Anfangswerten des Wellenmodells schwieriger. Die

Vorgabe einer Wellenamplitude ist zunächst noch einfach. Zum einen ist die Vorgabe einer Wellenamplitude von Null im gesamten Gebiet möglich, zum anderen ergibt die Vorgabe einer über den Rand gemittelten Wellenamplitude und das Einarbeiten einer Wellenbrechbedingung eine gute Anfangsschätzung. Die Vorgabe einer Wellenperiode ist hingegen schwierig. So ist eine Wellenperiode Null genauso ein pathologischer Fall wie eine unendlich lange Periode. Deshalb wird als Startperiode eine über den Rand gemittelte Wellenperiode gewählt. Mit der Periode und dem mittleren Wasserstand steht über die Dispersionsbeziehung die Länge des Wellenzahlvektors in jedem Punkt des Gebietes fest. Als Einlaufrichtung wird im gesamten Gebiet die mittlere Richtung der einlaufenden Wellen gewählt.

4.2 Randbedingungen

Randbedingungen müssen sowohl für Wellen- als auch Strömungssimulationen spezifiziert werden. Die Randbedingungen können dabei an offenen oder geschlossenen Rändern vorgegeben werden. Offene Ränder werden nicht durch vorhandene Bauwerke oder natürliche Hindernisse, wie dies bei geschlossenen Rändern der Fall ist, sondern durch die Wahl des Lösungsgebietes festgelegt. Die Lokation der Randbedingung Strand kann sich infolge der Tide und des Brandungsstaus ändern. Zunächst wird auf die Problematik der Wattstrategien eingegangen.

4.2.1 Wattstrategie

Die mathematische Beschreibung der im Küstensaum von tide- und seegangsbeeinflussten Gebieten ablaufenden Prozesse erfordert die Berücksichtigung von Trockenfall- und Überflutungsprozessen. Für die Berechnung der Zustandsgrößen im Bereich des Strandes und von Wattflächen sind die richtige Erfassung sowohl der Impuls- als auch der Massenerhaltung bedeutungsvoll. Es werden hierfür spezielle Algorithmen benötigt, die die Verhältnisse in den von der wandernden Wasserlinie betroffenen (teilweise oder ganz trockenfallenden) Elementen beschreiben. Es wird darauf hingewiesen, daß die Diskretisierung auch einen wesentlichen Einfluß auf die Güte der Beschreibung von Trockenfall- und Überflutungsprozessen hat. Alle weiteren Ausführungen setzen also voraus, daß die Diskretisierung der Wattgebiete der dort zu erwartenden Dynamik angepaßt ist.

Für den Teil der Strömungssimulation bestehen schon eine Vielzahl von Arbeiten. Ausgehend von dem Anwendungsbereich wurden bei der vorliegenden Implementierung zunächst relativ einfache Wattstrategien realisiert. Die Modellvorstellung besteht darin, daß auf allen Flächen ein imaginärer Wasserfilm, der auch eine Stärke von Null haben

kann, bleibt. Es werden beim Aufbau der globalen Finite-Element-Approximation alle, also auch trockene Elemente, berücksichtigt. In Elementen, bei denen der Wasserstand an mindestens einem Knoten eine gewisse Grenze unterschreitet (z.B. 5mm), werden Modifikationen am Impulseintrag der Impulsgleichungen vorgenommen. Zum einen wird angenommen, daß die welleninduzierten Kräfte in einem teilweise trockenen Element vernachlässigbar sind, zum anderen erfolgt eine Modifizierung des Wasserstandsgradienten $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, der durch die Annahme eines Wasserfilms in den trockenfallenden Gebieten nicht richtig wiedergegeben wird (siehe Abb. 4.1). Werden vollkommen trockene Elemente betrachtet, so wird der Einfluß des Wasserstandsgradienten auf die Gleichungen der Impulserhaltung negiert:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Diese Herangehensweise ist auch bei teilweise trockenen Elementen möglich und hat den Vorteil, eines stetigen Übergangs zu ganz trockenen Elementen. Diese Wattstrategie wirkt jedoch sehr bremsend bei flutwellenartigen Ereignissen. Sind solche Vorgänge ausschlaggebend für die Dynamik, ist ein Extrapolieren der Wasserstandsgradienten auf das teilweise trockene Element empfehlenswert. Als eine dritte Möglichkeit kann eine Linearkombination beider Strategien vorgenommen werden. Die Modifikation von Kraftkomponenten in den Impulsgleichungen stellt eine sehr einfache Methode dar und hat den großen Vorteil einer strikten Massenerhaltung des Strömungsmodells. Trotz dieser Änderungen an der Impulsgleichung erfolgt ein vollständiges Trockenfallen durch die advektiven und diffusiven Anteile.

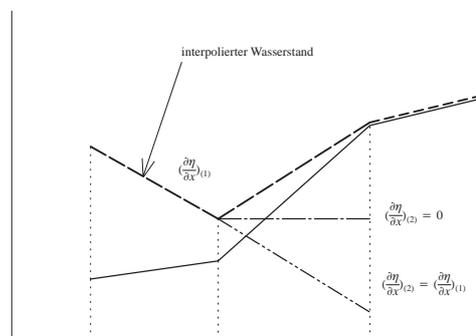


Abbildung 4.1: Wattstrategien

Eine ähnliche Herangehensweise erfolgt bezüglich der Seegangssimulation. Für die Berechnung der Wellenausbreitung (K_x und K_y) besteht die Schwierigkeit, daß die Länge des Wellenzahlvektors für sehr kleine Wasserstände gegen unendlich geht. Aus diesem Grund wird für die Berechnung des Wellenzahlvektors im gesamten Untersuchungsgebiet ein Mindestwasserstand, dem Untersuchungsgebiet angepaßt (z.B. 1cm

für großräumige Simulationen), garantiert. Bei der Bestimmung der Energiedissipation infolge Wellenbrechens wird jedoch die richtige Wassertiefe zu Grunde gelegt.

4.2.2 Strömung

Während die Finite-Element-Formulierung der Flachwassergleichung die VON NEUMANNsche Randbedingung durch die Berechnung des Integrals über die normal zum geschlossenen Rand gerichteten Strömungskomponenten erfüllt, müssen die DIRICHLETschen Randbedingungen unabhängig von den sich ergebenden Finite-Element-Gleichungen erzwungen werden.

Im wesentlichen werden die DIRICHLETschen Randbedingungen am offenen Rand, also der Stelle, wo das Untersuchungsgebiet in ein größeres eingebettet ist, erzwungen. Bei großen Untersuchungsgebieten reicht häufig das Einsteuern eines variablen Wasserstandes aus.

An geschlossenen Rändern (wie Bauwerken, Stränden usw.) wird zwischen *slip* und *no-slip* Randbedingungen unterschieden.

Wird an einem geschlossenen Modellrand gefordert, daß dort keine Strömungsgeschwindigkeiten \vec{U} auftreten, so wird diese mit **no-slip** Randbedingung bezeichnet:

$$\vec{U} = 0. \quad (4.2)$$

Sie wird bevorzugt an normalen Strandbereichen verwendet. Die *no-slip* Randbedingung kann als natürlich bezeichnet werden. Sie steht zum einen mit der Modellvorstellung großer Reibung bei kleinen Wasserständen und zum anderen mit der verwendeten Wattstrategie für die Strömungssimulation im Einklang.

Häufig ist es jedoch auch sinnvoll, eine zum Rand parallele Strömung (z.B. an Hafenmauern) zuzulassen. Die Randbedingung, die dieser Situation genüge tut, wird als *slip*-Randbedingung bezeichnet. Hierbei wird für die Normalengeschwindigkeit gefordert:

$$\vec{U} \vec{n} = 0. \quad (4.3)$$

Hierbei ist n die Normale an den Modellrand.

4.2.3 Wellen

An den offenen Rändern wird die Wellenhöhe, Wellenanlaufrichtung und Wellenperiode vorgegeben. Die Festlegung von Randbedingungen an geschlossenen Rändern ist für

die Wellenkomponenten wesentlich schwieriger. In Analogie zum Strömungsmodell kann eine Unterscheidung zwischen *slip* und *no-slip* Randbedingungen sinnvoll sein. Um feste Bauwerke wie Hafenufermauern näherungsweise zu beschreiben, wird angenommen, daß auch die welleninduzierten Strömungen (Orbitalbewegungen) nur parallel zum Rand verlaufen können. Dies bedeutet andererseits eine Parallelität der Wellenzahlvektoren zum Rand:

$$\vec{K} \vec{n} = 0. \quad (4.4)$$

Die Wellenamplitude wie auch die -periode können sich an solchen Rändern mit *slip*-Randbedingung frei einstellen.

Die in der Literatur vorgeschlagenen Vorgaben für *no-slip* Randbedingungen an geschlossenen Rändern sind sehr problematisch. Ausgehend von den Betrachtungen zur Wattstrategie und dem Phänomen, daß die Wellen immer senkrecht am Strand ankommen, wird bei der *no-slip* Randbedingung die Richtung des Wellenzahlvektors gleich der Richtung des Bodengradienten gesetzt, was voraussetzt, daß eine Richtung des Bodengradienten eindeutig bestimmbar ist. Die Wellenamplitude ist an solch einem Rand gleich Null.

Kapitel 5

Numerische Realisierung

Die numerische Behandlung hyperbolischer Probleme, speziell zur Beschreibung von Wellenfeldern, ist durch die Anwendung von Differenzenverfahren geprägt. Da diese Verfahren schon längere Zeit entwickelt und erprobt werden, sind sie bereits so robust, daß sie kommerziell eingesetzt werden.

Der Nachteil der Differenzenverfahren ist, daß sie auf kartesischen Gittern formuliert sind. Will man diese Verfahren auf Gebiete mit gekrümmten Rändern anwenden, so muß das kartesische Gitter im „Rechenraum“ auf den „physikalischen Raum“ abgebildet werden. Dies kann bei der Diskretisierung von komplizierten Topographien Schwierigkeiten bereiten. Deshalb bieten sich Verfahren an, die auch auf unstrukturierten Gittern durchführbar sind. Solche unregelmäßigen Zerlegungen können effizienter erzeugt werden. Diese Flexibilität bietet auch die Möglichkeit, moderne adaptive Verfahren zur Auflösung von Unstetigkeiten und starken Gradienten in der Lösung zu verwenden.

Ein solches Verfahren ist die Methode der Finiten Elemente, die im folgenden mit FEM (Finite Element Methode) bezeichnet wird. Nachdem sich diese Verfahren im Bereich der elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen, z.B. in der Strukturmechanik etabliert haben, kam es auch zur Anwendung auf strömungsmechanische Fragestellungen. Dabei haben sich zur Lösung von Strömungs- und Transportproblemen PETROV-GALERKIN-Verfahren, im weiteren auch häufig mit PG-Verfahren bezeichnet, als geeignet erwiesen [2]. Für die Beschreibung von Wellenfeldern hat sich die Methode der Finiten Elemente (FEM) speziell bei den komplexwertigen *mild-slope*-Gleichungen durchgesetzt [6], [37]. Ein hyperbolisches Wellenmodell auf der Grundlage der FEM wurde bereits in [24] vorgestellt. Auf Grund der dort verwendeten diskreten Darstellung und des *lumping* sind die Ergebnisse jedoch problembehaftet.

In diesem Kapitel wird die numerische Approximation der entwickelten Gleichun-

gen vorgestellt. An dieser Stelle soll auf einige grundsätzliche Aspekte sowohl bei der Wahl der numerischen Methoden als auch bei der Wahl der Formulierung der einzelnen Prozesse eingegangen werden. So ist zur Beschreibung der Wellenenergieausbreitung eine Formulierung der partiellen Differentialgleichung in der totalen Wellenenergie E_t (3.89) wie auch eine Formulierung in der Wellenamplitude a (3.90) möglich. Wird eine lineare Approximation der Wellenhöhe bzw. -amplitude bei der numerischen Realisierung vorgenommen, so ist die Approximationsordnung der abhängigen Größe Wellenenergie quadratisch. Um also dieselbe Güte der numerischen Approximation bei einer Formulierung in der Wellenenergie zu erreichen, sind quadratische Ansätze für E_t nötig. Analog ist eine Formulierung des Strömungsgeschehens in der Geschwindigkeit der in den Durchflüssen vorzuziehen.

Das Gleichungssystem lautet:

$$\frac{\partial K_i}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma_a}{\partial x_i} + C_g \frac{K_j}{k} \left(\frac{\partial K_j}{\partial x_i} - \frac{\partial K_i}{\partial x_j} \right), \quad j \neq i = 1, 2, \quad (5.1)$$

$$k^2 = K^2 - \delta^*, \quad (5.2)$$

$$\sigma_a = \sqrt{gk \frac{\tanh(kd) + s}{1 + s \tanh(kd)}} + \vec{K} \vec{U}, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i + C_{Ei}) a^2 - \frac{S_{ij}}{\rho g a} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{U_i (T_i - T_i^B)}{\rho g a} + \frac{\epsilon_B}{\rho g a}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial U_j (h + \eta)}{\partial x_j}, \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} = & -U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho (h + \eta)} \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} \\ & + \frac{1}{\rho (\bar{\xi} + h)} (T_i - T_i^B) \quad \text{mit} \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dieses bildet die Grundlage für die Bestimmung des küstennahen Strömungs- und Seegangsfeldes. Die auftretenden sechs partiellen Differentialgleichungen sind ihrem Typ nach "Advektions-Diffusionsgleichungen". Für diesen Gleichungstyp gibt es eine Vielzahl in der Ingenieurpraxis eingesetzten Algorithmen. Betrachtet man die Gleichungen in 5.1 (mit $i = 1, 2$) zur Beschreibung der Wellenausbreitung für sich allein, so ist dies ein rein advektives Problem. Bei der numerischen Lösung rein advektiver Probleme mit Hilfe der Standard-Finiten-Differenzen- und der Standard-GALERKIN-Finite-Element-Formulierung (BUBNOV-GALERKIN-Verfahren) erhält man unbrauchbare, physikalisch nicht begründbare, oszillierende Lösungen. Durch das Verwenden nichtsymmetrischer Finiten Differenzen wird eine bessere Approximation reiner Transportgleichungen erreicht. Eine Verallgemeinerung auf die Methode der Finiten Elemente stellen *upwinding*-Verfahren dar. Für die numerische Realisierung wird deshalb ein *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren verwendet. Dabei wird das System als eine Einheit betrachtet und alle Gleichungen gleichzeitig gelöst. In Zeitrichtung werden explizite und ein Praediktor-Korrektor-Integrationsverfahren verwendet, deren Ordnungen zwischen 1 und 5 liegen.

Bevor jedoch auf die konkrete numerische Realisierung des Gleichungssystems eingegangen wird, soll das *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren, im weiteren häufig mit SUPG-Verfahren bezeichnet, allgemein entwickelt werden.

Da das obige Gleichungssystem 5.1-5.6 nicht nur vom Ort abhängt, sondern auch ein zeitabhängiges Problem darstellt, sind einige zusätzliche Bemerkungen nötig. Im allgemeinen gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten für solche zeitabhängigen Probleme. Eine besteht darin, Interpolationsfunktionen zu verwenden, die sowohl zeitlich als auch

räumlich variabel sind. Dies bewirkt jedoch eine Erhöhung der Dimension des Finiten Zeitelements. Die zweite, wesentlich flexiblere Lösung, ist die sogenannte semidiskrete Methode, bei der die zeitliche Ableitung einer Variablen an den Knoten als eigenständig angesehen wird. Das so entstehende gewöhnliche Differentialgleichungssystem kann unter Zuhilfenahme verschiedener, dem Problem angepaßter Integrationsverfahren gelöst werden.

Die Herleitung der numerischen Approximation erfolgt dabei in zwei Schritten. Zunächst wird die örtliche und in einem zweiten Teil die zeitliche Approximation betrachtet und entwickelt.

Im folgenden wird auf die allgemeine, dem betrachteten Gleichungssystem entsprechende Herleitung der Methode der Finiten Elemente kurz eingegangen. Da ein Zugang zur FEM über ein Variationsprinzip nur eingeschränkt möglich ist, wird auf die Methode der gewichteten Residuen zurückgegriffen.

5.1 Methode der gewichteten Residuen

Die Grundidee der Methode der gewichteten Residuen besteht darin, auf der Grundlage des RITZschen Darstellungssatzes eine Näherungslösung zu bestimmen. Dabei wird das Verfahren auf der Grundlage der beschreibenden Differentialgleichung gebildet und ist deshalb allgemein anwendbar. Das betrachtete Differentialgleichungssystem kann in der folgenden allgemeinen Form geschrieben werden.

Sei Ω ein mathematisch offenes beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^N und $\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$ der Rand, wobei Γ_D die Randstücken mit DIRICHLET-Randbedingung und Γ_N mit NEUMANN-Randbedingung sind. Es soll $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ gelten. Gesucht wird eine Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ (M ist dabei die Dimension der unbekanntenen Größen), die dem Gleichungssystem:

$$\frac{dU}{dt} + LU + Q = 0, \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T), T > 0 \quad (5.7)$$

mit

$$\begin{aligned} L & \quad \text{linearer Differentialoperator,} \\ Q(\vec{x}, t) & \quad \text{Quell- und Senkfunktion,} \\ U(\vec{x}, t) & = f(\vec{x}, t), \quad \forall x \in \Gamma_D \forall t \in (0, T), \\ \frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial n} & = h(\vec{x}, t), \quad \forall x \in \Gamma_N \forall t \in (0, T), \\ U(\vec{x}, 0) & = U_o(\vec{x}), \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

entspricht. Dabei sind f, h, U_0 gegebene Funktionen und n der äußere Normalenvektor an den Rand Γ_N . Das Intervall $(0, T)$ wird als Untersuchungsintervall bezeichnet.

Im weiteren wird nicht mehr der Raum aller Funktionen $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ betrachtet, sondern nur alle Funktionen, die quadratisch integrierbar sind, d.h. alle die, bei denen das Integral $\int_{\Omega} U^2(\vec{x}, t) d\Omega$, $\forall t \in (0, T)$ existiert. Diese Einschränkung ist für die Anwendung unwesentlich, hat aber den Vorteil, daß der Raum, in dem die Lösung gesucht wird, ein Hilbertraum $H^1(\Omega)$ ist. Hilberträume sind vollständige lineare Räume mit einem Skalarprodukt und einer zugehörigen Norm. Sie ermöglichen die Anwendung des RITZschen Darstellungssatzes.

Es erfolgt eine weitere Konkretisierung des Funktionenraumes, in dem die Lösung der Gleichung 5.7 gesucht wird:

$$\mathcal{V} := H^1(\Omega), \quad (5.8)$$

$$\mathcal{V}(f) := \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = f \text{ auf } \Gamma_D\}. \quad (5.9)$$

Das Aussehen des Funktionenraumes $\mathcal{V}(f)$ hängt also zum einen von den Randbedingungen und zum anderen auch von der Zeit ab.

Es seien ϕ_1, ϕ_2, \dots eine Basis des Funktionenraumes $\mathcal{V}(f)$, dann läßt sich jede Funktion $U \in \mathcal{V}(f)$ nach dem RITZschen Darstellungssatz schreiben als

$$U(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(t) \phi_i(\vec{x}), \quad (5.10)$$

wobei die skalaren Größen $C_i(t)$ nur von t abhängen. Im weiteren wird der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß alle Randwerte homogen sind. Um eine praktisch bestimmbare Lösung zu erhalten, wird in einem endlichdimensionalen Unterraum $V^h \subseteq \mathcal{V}(f)$, $\dim(V^h) = h$, eine Näherungslösung von 5.7 gesucht. Die unendliche Summe in 5.10 wird dann endlich und die Näherungslösung wird mit \bar{U} bezeichnet.

Durch Einsetzen der Näherungslösung \bar{U} in die linke Seite von 5.7 entsteht im allgemeinen ein Defekt oder Residuum ϵ .

Dieses Residuum soll nun im Inneren des Gebietes minimal werden. Dabei sind verschiedene Herangehensweisen denkbar. Vor allem die folgenden zwei Ansätze sind dabei von praktischer Bedeutung:

Galerkin Methode:

Es wird gefordert, daß das Residuum ϵ orthogonal zum Unterraum V^h sein soll, d.h. ϵ besitzt keine Komponenten im Unterraum.

Kleinste Quadrate Methode:

Diese Methode beruht auf der Minimierung des Quadratischen Fehlers $\|\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$.

Die Methode der gewichteten Residuen beinhaltet noch keine Diskretisierung. Die im Lösungsansatz enthaltenen Koeffizienten $C_i(t)$ sind allgemeine Parameter und keine Knotenwerte. Anstatt die Lösung durch Funktionen im gesamten Gebiet zu approximieren, werden Approximationsfunktionen zunächst in Teilgebieten (lokale Elemente) konstruiert. Die Minimierung des Residuum ϵ beschränkt sich somit auf Teile des Lösungsgebietes. Unter Einbeziehung von Anfangs- und Randbedingungen werden die sich daraus ergebenden Elementgleichungen zum Gesamtgleichungssystem zusammengebaut. Für zeitabhängige Probleme entsteht ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die durch geeignete Verfahren in Zeitrichtung integriert werden müssen. Im stationären Fall lassen sich die partielle Differentialgleichung mit der FEM auf ein algebraisches Gleichungssystem zurückführen.

5.2 Numerische Ortsintegration mit der Methode der Finiten Elemente

Das partielle Differentialgleichungssystem 5.1, 5.4-5.6 zur Beschreibung des Seegangs- und Strömungsgeschehens im Küstenbereich ist durch den unterschiedlichen Charakter seiner Gleichungen gekennzeichnet. Die Gleichungen zur Beschreibung der mittleren Strömungsverhältnisse sind im betrachteten Anwendungsbereich im allgemeinen strömend, vom Advektions-Diffusions-Typ. Erst beim Übergang zu schießender Strömung werden die Gleichungen advektionsdominant.

Im Gegensatz hierzu sind die Gleichungen zur Beschreibung des Wellenfeldes reine Advektionsgleichungen.

Zur Lösung der Flachwassergleichungen wurden in der Vergangenheit eine Reihe von Finite Element Modellen ([11], [16]) entwickelt, die auf dem Standard-GALERKIN-Verfahren basieren. Beim Übergang zu dominierender Advektion kommt es häufig zu physikalisch nicht begründbaren Störungen. Um diese oszillatorischen Störungen zu unterdrücken, wurden verschiedene Verfahren entwickelt, so z.B. numerische Filter, *lumping* bzw. *partial lumping* von gewissen auftretenden Matrizen.

Umfangreiche Forschungsarbeiten zur mathematisch-numerischen Formulierung von dominant-advektiven Transportprozessen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente führten zur Entwicklung von *upwindig*-Verfahren [9]. Im weiteren wird ein allgemeiner Zugang zu einem solchen *upwinding*-Verfahren über die Kombination einer kleinsten-

Quadrat-Approximation und eines Standard-GALERKIN-Verfahren gegeben [49].

5.2.1 Petrov-Galerkin-Verfahren

Ausgehend von den im Abschnitt 5.1 eingeführten Räumen wird im weiteren die Lösung von 5.7 in einem endlichdimensionalen Unterraum $V^h \subseteq \mathcal{V}(f)$ mit $\dim(V^h) = h$ gesucht. Es sei $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_h$ eine endliche Basis des Funktionenraumes V^h .

Ausgehend von 5.10 habe die gesuchte Näherung \bar{U} folgende Darstellung:

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^h U^i(t) \phi_i(\vec{x}) = [\phi_i]^T [U^i]. \quad (5.11)$$

Bei der Standard-GALERKIN-Approximation wird gefordert, daß der auftretende Fehler orthogonal zum Unterraum V^h ist, in dem die Lösung gesucht wird. Die Orthogonalität ist gegeben, falls das Skalarprodukt im $H^1(\Omega)$,

$$\langle \epsilon, \phi \rangle_{H^1(\Omega)} = 0, \quad \forall \phi \in V^h, \quad (5.12)$$

ist. Da V^h ein linearer Raum mit einer endlichen Basis ist, reicht der Nachweis der Orthogonalität bezüglich der Basis. Für alle ϕ_l aus der Basis von V^h wird beim Standard-GALERKIN-Verfahren die folgende Identität gefordert:

$$\int_{\Omega} \phi_l \left([\phi_i]^T \left[\frac{\partial U^i}{\partial t} \right] + L([\phi_i]^T [U^i]) + Q \right) d\Omega = 0. \quad (5.13)$$

Im Zusammenhang mit notwendigen Anfangs- und Randbedingungen entsteht ein System von h gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Andererseits führt die Minimierung des Fehlerquadrates auf

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dU^l} \int_{\Omega} \epsilon^2 d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{d(L([\phi_i]^T [U^i]))^T}{dU^l} \left([\phi_i]^T \left[\frac{\partial U^i}{\partial t} \right] + L([\phi_i]^T [U^i]) + Q \right) d\Omega \end{aligned}$$

oder

$$\int_{\Omega} L(\phi_l)^T \left([\phi_i]^T \left[\frac{\partial U^i}{\partial t} \right] + L([\phi_i]^T [U^i]) + Q \right) d\Omega = 0. \quad (5.14)$$

Durch eine Linearkombination beider Verfahren entsteht ein PETROV-GALERKIN-Verfahren

$$\int_{\Omega} (\phi_l + \tau L(\phi_l)) \left([\phi_i]^T \left[\frac{\partial U^i}{\partial t} \right] + L([\phi_i]^T [U^i]) + Q \right) d\Omega = 0 \quad (5.15)$$

mit einem unbekanntem Parameter τ (*upwinding* Parameter). Die Bestimmung von geeigneten *upwinding*-Parametern ist ein außerordentlich schwieriges Problem und hängt eng mit den zu beschreibenden physikalischen Prozessen zusammen.

Werden die Betrachtungen auf eine skalare Größe U und den eindimensionalen Fall reduziert, entsteht die Form des klassischen Zugangs zum PETROV-GALERKIN-Verfahren. Bei der klassischen Herleitung werden die Testfunktionen durch Hinzunahme anderer Funktionen modifiziert (ϕ^{SUPG}). Im Unterschied zur ursprünglichen *upwinding*-Technik, bei der die Testfunktion durch ein Polynom höherer Ordnung modifiziert wird, erfolgt beim oben beschriebenen *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren im eindimensionalen Fall eine Modifikation der Testfunktion durch ein Polynom geringerer Ordnung.

Durch das Verwenden linearer Ansatzfunktionen verschwinden Anteile höherer Ordnung des Differentialoperators L bezüglich der Ansatzfunktionen. Die Testfunktion des klassischen GALERKIN-Verfahrens (ϕ^G) wird mit einer Funktion p erweitert:

$$\begin{aligned} \phi_l^{SUPG} &= \phi_l^G + p \\ \text{mit} \\ p &= \tau L(\phi_l). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Funktion p ist für lineare Finite Elemente innerhalb des Elements konstant, jedoch ist ihr Wert auf der Elementkante Null. Die Modifikation der Testfunktion wirkt also nur innerhalb des Elements und hat keine Wirkung auf die Stetigkeit der Lösung. Im eindimensionalen Fall haben die Testfunktionen das in Abbildung 5.1 dargestellte einfache Aussehen.

Ausgehend von diesem allgemeinen Herangehen wird im folgenden die Realisierung der Gleichung beschrieben. Die Zerlegung des Untersuchungsgebietes erfolgt mit Dreieckselementen. Als Ansatzfunktionen werden Polynome ersten Grades verwendet, also lineare Ansatzfunktionen.

5.2.2 Finite Element Zerlegung

Für das hier vorgestellte Problem wird ein Finite-Element-Verfahren verwendet. Hierzu wird das Untersuchungsgebiet Ω in endlich viele (NE) Teile Ω^e zerlegt. Diese Zerlegung muß folgende Eigenschaften aufweisen:

$$(1) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{NE} \Omega^e .$$

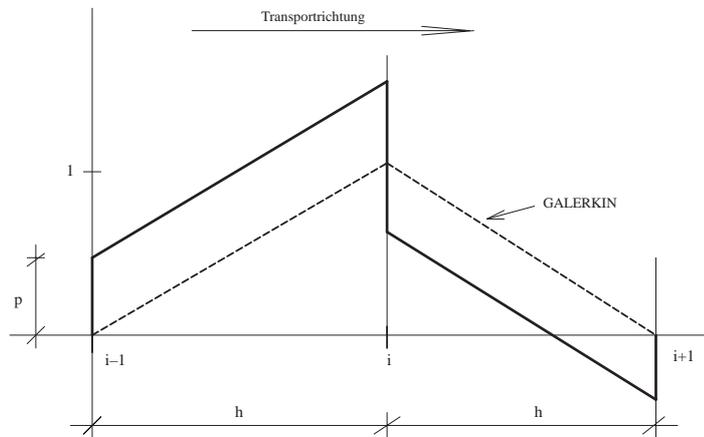


Abbildung 5.1: streamline-upwinding-PG-Verfahren

- (2) Der Rand von Ω^e muß zu Ω^e gehören. Das Innere von Ω^e muß beschränkt sein und der Rand muß der LIPSCHITZ-Bedingung genügen. In der Praxis ist die Bedingung bei beschränkten konvexen und polygonal berandeten Gebieten erfüllt. (Im weiteren werden nur noch Simplexe betrachtet.)
- (3) Ω^i und Ω^j mit $i \neq j$ haben höchstens Randpunkte gemeinsam.
- (4) Die Menge der gemeinsamen Punkte zweier Elemente Ω^i , Ω^j mit $i \neq j$ besteht entweder aus einem Eckpunkt von Ω^i und Ω^j oder aus einer gemeinsamen Kante mit den zugehörigen Eckpunkten.

Im folgenden werden die Teilgebiete Ω^e als Elemente der Zerlegung bezeichnet. Erst in Verbindung mit dem Raum $P_k(\Omega^e)$, der Menge aller Polynome auf Ω^e , deren Grad kleiner gleich k ist, wird von einem Finiten Element bzw. einer Finiten Element Zerlegung gesprochen.

5.2.3 Optimale upwinding Parameter

Die richtige Wahl der *upwinding*-Parameter hat nicht nur auf die Stabilität der numerischen Lösung Einfluß. Vielmehr hängt von der Wahl dieser Parameter die Güte der Lösung ab.

Infolge der rasanten Entwicklung von *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren bei der Simulation von Transportprozessen entstand eine geschlossene Theo-

rie zur Bestimmung optimaler *upwinding*-Parameter auf der Grundlage mehrdimensionaler Element-PECLET-Zahlen [19] für skalare Unbekannte. Eine allgemeine Formulierung vektorwertiger Transportvorgänge existiert noch nicht.

Auf Grund der Trennung von zeitlicher und örtlicher Approximation wird kein *upwinding*-Element in Zeit und Raum betrachtet, sondern die Eigenständigkeit der zeitlichen Ableitung als Variable angenommen. Somit wird zu jedem Zeitpunkt, bei bekannter zeitlicher Ableitung, eine stationäre FEM-Approximation im Ort gesucht. Es reicht folglich aus, für die in dieser Arbeit vorkommenden Fälle, die in der Literatur angegebenen optimalen Parameter für stationäre Probleme zu dokumentieren.

Im weiteren wird nur noch der in den zu approximierenden Gleichungen auftretende spezielle Differentialoperator L mit:

$$L = \sum_{i=1}^2 A_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + k \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (5.17)$$

betrachtet.

Ausgehend von der eindimensionalen Definition der Element-PECLET-Zahl

$$Pe := \frac{A h}{k} \quad (5.18)$$

für das Problem

$$A \frac{\partial U}{\partial x} - k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + Q = 0 \quad (5.19)$$

ist eine Überführung in den mehrdimensionalen Fall möglich.

Im eindimensionalen Fall hat der optimale *upwinding*-Parameter die Form:

$$\tau_{opt} = \frac{|\alpha_{opt}| h}{2 |A|} \quad (5.20)$$

mit

$$\alpha_{opt} = \coth(|Pe|) - \frac{1}{|Pe|}. \quad (5.21)$$

Hierbei ist h der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten. Für reine Advektion ($k = 0$) wird $\alpha_{opt} = 1$. Der Nachweis der Optimalität für den eindimensionalen Fall wurde in [10] geführt.

Beim Übergang zum mehrdimensionalen Fall wird von der Idee ausgegangen, eine Optimalität der *upwinding*-Parameter auf den Charakteristiken zu erreichen. Das Problem kann so wiederum auf den eindimensionalen Fall reduziert werden.

Zunächst wird auf den auch in dieser Arbeit vorkommenden Spezialfall einer von zwei Ortskoordinaten abhängigen skalaren Größe (z.B. der Wellenamplitude) eingegangen. Typische in der Literatur zu findende Anwendungen sind Transportvorgänge (Konzentrationen, Temperaturen usw.):

$$\sum_{i=1}^2 A_{x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + k \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + Q = 0. \quad (5.22)$$

Die Transportgeschwindigkeit ist nun eine vektorielle Größe mit dem Betrag $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Die Element-PECLET-Zahl für den zweidimensionalen Fall ergibt sich auf analoge Weise wie im eindimensionalen Fall:

$$Pe = \frac{\|\vec{A}\| h}{k} \quad (5.23)$$

und der optimale *upwinding*-Parameter

$$\tau_{opt} = \frac{|\alpha_{opt}| h}{2 \|\vec{A}\|}. \quad (5.24)$$

Zur Bestimmung der Elementausdehnung h bezüglich einer Transportrichtung im Element wird auf einfache geometrische Relationen (siehe Abbildung 5.2) zurückgegriffen, h ist dabei die maximale Ausdehnung des Elementes bezüglich des Vektorfeldes \vec{A} .

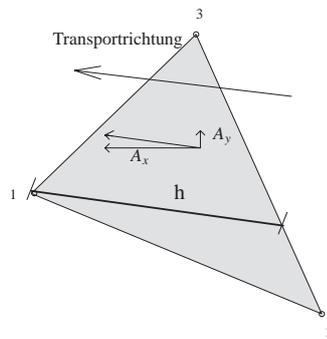


Abbildung 5.2: Bestimmung der Dreiecksausdehnung

Die nächste Erweiterung ist der Übergang zu vektoriellen Unbekannten \vec{U} . Die Größen A_x und A_y werden dann Matrizen der Dimension der Unbekannten \vec{U} . In

diesem Fall ist nur unter der Bedingung einer Entkoppelbarkeit der Gleichungen eine allgemeine Darstellung möglich [49].

Sind die Gleichungen nicht entkoppelbar, so fehlt bisher eine geschlossene Darstellung. Die Wahl der *upwinding*-Parameter erfolgt daher im Zusammenhang mit den physikalischen Erscheinungen, die beschrieben werden sollen. Auf die Wahl der *upwinding*-Parameter wird in Zusammenhang mit den konkreten Gleichungen eingegangen. Dabei wird speziell die enge Abhängigkeit des *upwinding*-Parameters von den Geschwindigkeiten, die dem physikalischen Prozeß innewohnen, eine zentrale Rolle spielen.

5.2.4 Petrov-Galerkin-Approximation der Wellengleichungen

In diesem Abschnitt soll exemplarisch die konkrete numerische Realisierung der Gleichungen zur Bestimmung der Wellenparameter beschrieben werden. Dabei wird, um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, ein Spezialfall ohne Strömungseinfluß betrachtet. Der Aufbau des Verfahrens für die vollständigen Gleichungen erfolgt dann auf analoge Weise:

$$\text{Wellengleichung } W_1 : \quad \frac{\partial K_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} - C_{gy} \frac{\partial K_y}{\partial x} + C_{gy} \frac{\partial K_x}{\partial y} = 0, \quad (5.25)$$

$$\text{Wellengleichung } W_2 : \quad \frac{\partial K_y}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + C_{gx} \frac{\partial K_y}{\partial x} - C_{gx} \frac{\partial K_x}{\partial y} = 0, \quad (5.26)$$

$$\text{klass. Dispersionsgl.:} \quad \sqrt{g k \tanh(k d)} = \sigma, \quad (5.27)$$

$$\text{Wellengleichung } W_3 : \quad \frac{\partial a}{\partial t} + C_{gx} \frac{\partial a}{\partial x} + C_{gy} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial C_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{gy}}{\partial y} \right) - \frac{\epsilon_B}{\rho g a} = 0. \quad (5.28)$$

Zwischen den ersten beiden Gleichungen besteht eine direkte Kopplung der unbekanntenen Größen K_x und K_y . Der Einfluß einer eventuellen Periodenänderung (σ) wird mittels der Quell- bzw. Senkterme $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ und $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ berücksichtigt. Die Gleichung der Wellenamplitude 5.28 ist nur über die Gruppengeschwindigkeit mit den ersten drei Gleichungen gekoppelt. In einer Matrizenbetrachtung kann deshalb die Gleichung 5.28 separat betrachtet werden. Es werden zunächst die Wellengleichungen 5.25 und 5.26 betrachtet.

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich in Matrixform:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + A \frac{\partial K}{\partial x} + B \frac{\partial K}{\partial y} + Q = 0 \quad (5.29)$$

mit

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -C_{gy} \\ 0 & C_{gx} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} C_{gy} & 0 \\ -C_{gx} & 0 \end{bmatrix}$$

schreiben. Der in Abschnitt 5.1 verwendete lineare Differentialoperator L konkretisiert sich hier:

$$L = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y}. \quad (5.30)$$

Die Lösungsfunktion setzt sich aus linearen Ansatzfunktionen zusammen. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Ansatzfunktionen bezüglich eines bestimmten Dreieckelements:

$$[\lambda_i] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Die PETROV-GALERKIN-Approximation für die l -te Gleichung hat nach 5.15 dann die Form:

$$\int_{\Omega} \left(\lambda_l + \tau \left\{ A \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} + B \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \right\} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial t} + A \frac{\partial K}{\partial x} + B \frac{\partial K}{\partial y} + Q \right) d\Omega = 0 \quad (5.32)$$

und ausführlich:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \lambda_l \left(\frac{\partial K}{\partial t} + A \frac{\partial K}{\partial x} + B \frac{\partial K}{\partial y} + Q \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tau \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \left(A \frac{\partial K}{\partial t} + A^2 \frac{\partial K}{\partial x} + AB \frac{\partial K}{\partial y} + AQ \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \tau \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \left(B \frac{\partial K}{\partial t} + BA \frac{\partial K}{\partial x} + B^2 \frac{\partial K}{\partial y} + BQ \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Werden die entsprechenden Matrizenmultiplikationen ausgeführt, ergibt dies:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} C_{gx}C_{gy} & 0 \\ -C_{gx}^2 & 0 \end{bmatrix}, \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -C_{gx}C_{gy} \\ 0 & C_{gx}^2 \end{bmatrix}, \\ B^2 &= \begin{bmatrix} C_{gy}^2 & 0 \\ -C_{gx}C_{gy} & 0 \end{bmatrix}, \\ BA &= \begin{bmatrix} 0 & -C_{gy}^2 \\ 0 & C_{gx}C_{gy} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A \frac{\partial K}{\partial t} = \begin{bmatrix} -C_{gy} \frac{\partial k_y}{\partial t} \\ C_{gx} \frac{\partial k_y}{\partial t} \end{bmatrix},$$

$$A^2 \frac{\partial K}{\partial x} = \begin{bmatrix} -C_{gx} C_{gy} \frac{\partial k_y}{\partial x} \\ C_{gx}^2 \frac{\partial k_y}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\left(A \frac{\partial K}{\partial t} + A^2 \frac{\partial K}{\partial x} + AB \frac{\partial K}{\partial y} + AQ \right) =$$

$$\begin{bmatrix} -C_{gy} \left\{ \frac{\partial k_y}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + C_{gx} \frac{\partial k_y}{\partial x} - C_{gx} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right\} \\ C_{gx} \left\{ \frac{\partial k_y}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + C_{gx} \frac{\partial k_y}{\partial x} - C_{gx} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right\} \end{bmatrix},$$

$$BA \frac{\partial K}{\partial y} = \begin{bmatrix} C_{gx} C_{gy} \frac{\partial k_x}{\partial y} \\ -C_{gx}^2 \frac{\partial k_x}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$\left(B \frac{\partial K}{\partial t} + BA \frac{\partial K}{\partial x} + B^2 \frac{\partial K}{\partial y} + BQ \right) =$$

$$\begin{bmatrix} C_{gy} \left\{ \frac{\partial k_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} - C_{gy} \frac{\partial k_y}{\partial x} + C_{gy} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right\} \\ -C_{gx} \left\{ \frac{\partial k_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} - C_{gy} \frac{\partial k_y}{\partial x} + C_{gy} \frac{\partial k_x}{\partial y} \right\} \end{bmatrix}.$$

Durch das Zusammenführen der einzelnen Ausdrücke entstehen die neuen Bestimmungsgleichungen des *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren.

Wellengleichung 1:

$$\int \lambda_l W_1 + \tau C_{gy} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \{-W_2\} + \tau C_{gy} \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \{W_1\} d\Omega = 0, \quad (5.34)$$

Wellengleichung 2:

$$\int \lambda_l W_2 + \tau C_{gx} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \{W_2\} + \tau C_{gy} \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \{-W_1\} d\Omega = 0. \quad (5.35)$$

Hierbei entsprechen die Terme W_1 und W_2 jeweils der linken Seite der entsprechenden Gleichungen 5.25 und 5.26. Ein sehr wichtiger Aspekt für die Funktionsfähigkeit des SUPG-Verfahrens ist die richtige Wahl der *upwinding*-Koeffizienten.

Ausgehend von der allgemeinen Herleitung des SUPG-Verfahrens und den Ausführungen in Abschnitt 5.2.3 besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem *upwinding*-Koeffizienten und den dem System innewohnenden Geschwindigkeiten. Die Gruppengeschwindigkeit mit ihren Richtungskomponenten C_{gx} und C_{gy} als dem System innewohnende Geschwindigkeit ist sofort ersichtlich. Das die Wellengeschwindigkeit C auch eine dem System innewohnende Geschwindigkeit ist, folgt aus der genaueren Betrachtung des Ausdruckes $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$. Unter Beachtung der Beziehung $C = \frac{\sigma}{k}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} &= \frac{\partial C k}{\partial x_i} \\ &= C \frac{\partial k}{\partial x_i} + k \frac{\partial C}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Ausgehend vom rein advektiven Charakter der Gleichungen wird der *upwinding*-Parameter

$$\tau = 0.5 \frac{h}{C_g + C} \quad (5.36)$$

verwendet.

Die SUPG-Approximation der skalaren Wellenamplitude a entspricht der in der Literatur ausführlich beschriebenen klassischen skalaren Transportgleichung und erfolgt auf analoge Weise:

Wellengleichung 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + C_{gx} \frac{\partial a}{\partial x} + C_{gy} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial C_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{gy}}{\partial y} \right) - \frac{\epsilon_B}{\rho g a} &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

SUPG-Gleichung:

$$\int_{\Omega} \lambda_l W_3 + \tau^a \left(C_{gx} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} W_3 + C_{gy} \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} W_3 \right) d\Omega = 0. \quad (5.38)$$

Ein geeigneter *upwinding*-Parameter ergibt sich unter Beachtung der Tatsache einer reinen skalaren Transportgleichung und unter Zuhilfenahme der Relation 5.24:

$$\tau^a = 0.5 \frac{h}{C_g}. \quad (5.39)$$

5.2.5 Petrov-Galerkin-Approximation des Strömungsmodells

Ausgehend von den guten Erfahrungen bei der Simulation von dammbruchinduzierten Flutwellen mittels eines PG-Verfahrens [2] wurde auch bei der numerischen Approximation der Flachwassergleichungen ein *streamline-upwind* PG-Verfahren verwendet. Im Gegensatz zu dem in der Literatur [23] verwendeten *upwinding* wird hier der Herleitung in Abschnitt 5.2.1 gefolgt. Um die prinzipielle Herangehensweise zu dokumentieren, werden nur die einfachen Flachwassergleichungen betrachtet:

$$\text{Impulsgleichung } E_1 : \frac{\partial U_x}{\partial t} = -U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} - U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \epsilon_x \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}, \quad (5.40)$$

$$\text{Impulsgleichung } E_2 : \frac{\partial U_y}{\partial t} = -U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} - U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} - g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \epsilon_x \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}, \quad (5.41)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung } E_3 : \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial U_x (h + \eta)}{\partial x} - \frac{\partial U_y (h + \eta)}{\partial y}. \quad (5.42)$$

Durch Ausmultiplikation der Kontinuitätsgleichung 5.42 ergibt sich die konkrete Form des Differentialoperators L wie folgt:

$$L = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.43)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} U_x & 0 & g \\ 0 & U_x & 0 \\ h + \eta & 0 & U_x \end{bmatrix}$$

und

$$B = \begin{bmatrix} U_y & 0 & 0 \\ 0 & U_y & g \\ 0 & h + \eta & U_y \end{bmatrix}.$$

Bei der Anwendung dieses Differentialoperators auf die linearen Test- und Ansatzfunktionen verschwinden die höheren Ableitungen:

$$L(\lambda_l) = A \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} + B \frac{\partial \lambda_l}{\partial y}. \quad (5.44)$$

Unter Zuhilfenahme einer analogen Herleitung wie im Abschnitt 5.2.4 ergeben sich die neuen Bestimmungsgleichungen:

- Kontinuitätsgleichung

$$\int_{\Omega} \lambda_l E_3 + \tau^c \left((h + \eta) \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} E_1 + U_x \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} E_3 + (h + \eta) \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} E_2 + U_y \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} E_3 \right) d\Omega = 0, \quad (5.45)$$

- Impulsgleichung in x-Richtung

$$\int_{\Omega} \lambda_l E_1 + \tau^c \left(U_x \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} E_1 + g \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} E_3 + U_y \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} E_1 \right) d\Omega = 0, \quad (5.46)$$

- Impulsgleichung in y-Richtung

$$\int_{\Omega} \lambda_l E_2 + \tau^c \left(U_x \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} E_2 + U_y \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} E_2 + g \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} E_3 \right) d\Omega = 0. \quad (5.47)$$

Unter Verwendung der dem System physikalisch innewohnenden Geschwindigkeiten ist es möglich, einen *upwinding*-Koeffizient zu bestimmen. Unter Ausnutzung der allgemeinen Aussagen des Kapitels 5.2.3 ist es naheliegend eine Element-PECLET-Zahl für das Strömungsgeschehen einzuführen:

$$Pe_c := \frac{(\|\vec{U}\| + c) h}{\|\vec{\epsilon}\|} \quad (5.48)$$

mit $c = \sqrt{gd}$.

Der verwendete *upwinding*-Koeffizient hat dann in Anlehnung an 5.24 die Form:

$$\tau^c = \frac{|\alpha_{opt}| h}{2(\|\vec{U}\| + c)} \quad (5.49)$$

$$\alpha_{opt} = \coth(|Pe_c|) - \frac{1}{|Pe_c|}. \quad (5.50)$$

Auf einige Probleme sei hier jedoch nochmals hingewiesen. So stellen jegliche Eingriffe in den Ergebnisvektor der zeitlichen Ableitungen und erst recht in den Vektor der Zustandsgrößen, z.B. infolge einer Wattstrategie, das Erzeugen eines zusätzlichen Fehlers innerhalb der Gleichungen dar. Das PG-Verfahren versucht nun diesen gewollten Fehler zu minimieren. Hierauf ist bei der praktischen Umsetzung zu achten.

5.3 Generierung des globalen FEM-Schemas

In diesem Abschnitt soll eine allgemeine Herangehensweise zur Generierung der Matrixgleichungen sowohl für Standard - als auch PETROV-GALERKIN-Verfahren mit linearen Ansatzfunktionen und Dreieckselementen vorgestellt werden.

Die zu approximierenden Gleichungen sowohl zur Bestimmung des Seegangs- als auch des Strömungsgeschehens haben ähnliche Strukturen. Werden im weiteren die betrachteten Größen mit $u(\vec{x}, t)$ und $v(\vec{x}, t)$ bezeichnet, so treten in den zu approximierenden Gleichungen folgende allgemeine zu berechnende Ausdrücke auf:

$$I : \int_{\Omega} \lambda_l u \, d\Omega, \quad (5.51)$$

$$II : \int_{\Omega} \lambda_l v \frac{\partial u}{\partial x} \, d\Omega, \quad (5.52)$$

$$III : \int_{\Omega} \lambda_l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, d\Omega \quad \text{und} \quad (5.53)$$

$$IV : \int_{\Omega} v \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} u \, d\Omega. \quad (5.54)$$

Dabei ist es auch möglich, daß die eine oder andere Funktion eine Konstante oder ein zusammengesetzter Ausdruck ist.

Es wird eine Darstellung, wie dies bei der Methode der Finiten Elemente der Fall ist, der Funktionen u und v in der Form

$$u = [\lambda_i]^T [u^i] \quad \text{und} \quad v = [\lambda_i]^T [v^i] \quad (5.55)$$

angenommen, wobei die mit dem Indize oben gekennzeichneten Größen Knotenwerte darstellen. Im weiteren werden die obigen Ausdrücke in bezug auf ihre numerische Approximation mit linearen Dreieckselementen konkretisiert:

$$I : \int_{\Omega} \lambda_l v \, d\Omega = \left[\int_{\Omega} \lambda_l \lambda_i \, d\Omega \right]^T [v^i]. \quad (5.56)$$

Die Funktion v kann dabei auch die zeitliche Ableitung einer Größe sein. Damit ergibt sich für

$$\int_{\Omega} \lambda_l \frac{\partial u}{\partial t} \, d\Omega = \left[\int_{\Omega} \lambda_l \lambda_i \, d\Omega \right]^T \left[\frac{\partial u^i}{\partial t} \right]. \quad (5.57)$$

Der zweite Ausdruck charakterisiert häufig den Transportanteil an einem physikalischen Prozess:

$$\begin{aligned}
II : \quad \int_{\Omega} \lambda_l v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega &= \int_{\Omega} \lambda_l \left(\sum_{i=1}^3 v^i \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \right) d\Omega \\
&= \left(\sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \right) \int_{\Omega} \lambda_l \left(\sum_{i=1}^3 v^i \lambda_i \right) d\Omega \\
&= \left(\sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \right) \left(\sum_{i=1}^3 v^i \left[\int_{\Omega} \lambda_i \lambda_l d\Omega \right] \right) \\
&= \left[\int_{\Omega} \lambda_l \lambda_i d\Omega \right]^T [v^i] \left[\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \right]^T [u^j] . \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Für den Fall III werden die speziellen Eigenschaften der Testfunktionen λ_l , wonach das Randintegral über eine Testfunktion Null ist, bei der partiellen Integration verwendet:

$$\begin{aligned}
III : \quad \int_{\Omega} \lambda_l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \\
&= - \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \\
&= - \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \right]^T [u^i] \int_{\Omega} 1 d\Omega . \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Der vierte Ausdruck kommt bei der oben vorgestellten Herleitung im wesentlichen bei der Integration des *streamline-upwinding* in die Finite Element Approximation zum Tragen:

$$IV : \quad \int_{\Omega} v \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} u d\Omega = \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \int_{\Omega} [\lambda_i]^T [v^i] [\lambda_j]^T [u^j] d\Omega . \tag{5.60}$$

Unter Zuhilfenahme dieser allgemeinen Betrachtungen ist nun die FEM-Formulierung für ein Element und eine Testfunktion λ_l einfach. Exemplarisch wird diese Formulierung an der Wellengleichung 1 (5.34) dargestellt. Im Rahmen der Approximation der Wellengleichung 1 werden für die auftretenden Funktionen σ_a , C_{g_x} , C_{g_y} sowie für den Fehler bei der Approximation der Gleichung W_1 und W_2 wiederum lineare Darstellungen angenommen.

Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{\Omega} \lambda_l \lambda_i d\Omega \right]^T \left[\frac{\partial K_x^i}{\partial t} \right] = \\
& - \left(\int_{\Omega} \lambda_l d\Omega \right) \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \right]^T [\sigma_a^i] \\
& + \left[\int_{\Omega} \lambda_l \lambda_i d\Omega \right]^T [C_{g_x}^i] \left\{ \left[\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} \right]^T [K_y^j] - \left[\frac{\partial \lambda_j}{\partial y} \right]^T [K_x^j] \right\} \\
& - \tau \left\{ \frac{\partial \lambda_l}{\partial x} \int_{\Omega} [\lambda_i]^T [C_{g_y}^i] [\lambda_j]^T [-W_2^j] d\Omega \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \lambda_l}{\partial y} \int_{\Omega} [\lambda_i]^T [C_{g_y}^i] [\lambda_j]^T [W_1^j] d\Omega \right\}.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Auf analoge Weise erhält man für alle anderen Gleichungen Elementapproximationen. Ausgehend von diesen Elementgleichungen wird das globale Gleichungssystem aufgebaut, welches die FEM-Approximation des gesamten Untersuchungsgebietes beschreibt. Es entsteht ein Gleichungssystem der allgemeinen Form:

$$M * [\dot{K}_x^i] = [r^i]. \tag{5.62}$$

Dabei ist M die globale Matrix, die die Verknüpfung der Zeitableitung der Zustandsgrößen an den Knoten wiedergibt. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden die zeitlichen Ableitungen einfach mit einem Punkt gekennzeichnet ($\dot{K}_x^i = \frac{\partial K_x^i}{\partial t}$). Die konkrete Struktur der Matrix M wird im weiteren noch behandelt.

5.4 Einarbeiten der Randbedingungen

Im folgenden soll auf die Realisierung und Einarbeitung der Randwerte eingegangen werden. Exemplarisch wird dies wiederum an der Größe K_x verdeutlicht. Es wird nicht wie in den Ingenieurwissenschaften (siehe [11], [49]) gebräuchlich der Wert selbst an einem Randknoten erzwungen, sondern die zeitliche Ableitung dieser Größe. Durch diese Herangehensweise wird ein mathematisch sauberes und numerisch effizienteres Einarbeiten der Randbedingungen gewährleistet. Die Änderung einer physikalischen Größe in einem Randknoten wirkt somit sofort auf die zeitliche Entwicklung der Größen an den benachbarten Knoten. Mit dem Bekanntsein des zeitlichen Verlaufes der Randfunktion $K_x(t)$ ist auch die zeitliche Ableitung dieser bekannt. Es muß also in 5.62 der Randwert $\dot{K}_x(t)$ an den Randknoten eingearbeitet werden. Beispielhaft wird dies für den Knoten

2 dargestellt. Sei:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{K}_x^1 \\ \dot{K}_x^2 \\ \vdots \\ \dot{K}_x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \vdots \\ r^n \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

so erfolgt das Einarbeiten des Randwertes $\dot{K}_x^2(t)$ durch:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \\ & \vdots & & & \\ m_{n1} & 0 & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{K}_x^1 \\ \dot{K}_x^2 \\ \vdots \\ \dot{K}_x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ r^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{12}\dot{K}^2(t) \\ -\dot{K}_x^2(t) \\ m_{32}\dot{K}^2(t) \\ \vdots \\ m_{n2}\dot{K}^2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Hierdurch entsteht ein neues System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\bar{M} [\dot{K}^i] = [\bar{r}^i], \quad (5.65)$$

wobei \bar{M} und \bar{r} die Matrix und der Vektor mit den eingearbeiteten Randbedingungen sind.

Analog erfolgt das Einarbeiten der Randbedingungen an den geschlossenen Rändern. Bei der *no-slip*-Randbedingung wurden als Startwerte für das Strömungsmodell Geschwindigkeiten von Null vorgegeben. Die *no-slip*-Randbedingung bedeutet nun die Forderung, daß alle Beschleunigungen $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ Null sein müssen, folglich werden sie bei der Einarbeitung erzwungen.

Soll eine *slip*-Randbedingung am geschlossenen Rand erzwungen werden, muß die Eckform des betrachteten Knotens beachtet werden. Dabei muß prinzipiell zwischen geschlossenen spitzen und stumpfen Ecken unterschieden werden.

Zunächst wird der Fall der stumpfen Ecke betrachtet, da er der einfachere ist. Bei der Generierung eines Anfangszustandes muß gewährleistet sein, daß die vektoriellen Lösungskomponenten \vec{U} und \vec{K} nicht die angrenzenden Ränder schneiden. Im weiteren bleibt die Beschleunigung dieser Größen unverändert, solange sich die Lösungsvektoren in den erlaubten Bereichen, zum Beispiel in den Bereichen A und B in der Abbildung 5.3 befinden. Wird der Rand der erlaubten Bereiche erreicht, so wird der Anteil der vektoriellen Beschleunigung auf Null gesetzt, der den Lösungsvektor aus dem erlaubten Bereich treiben würde. Folgt man dieser Argumentation für eine spitze Ecke, so ist der erlaubte Bereich dort leer. Für die Strömungsgeschwindigkeit bedeutet dies, daß dort keine Strömung existieren kann. Die Randbedingung entspricht dort einer *no-slip*-Randbedingung. Für die Berechnung der Wellenzahlvektoren \vec{K} ist die Situation einer

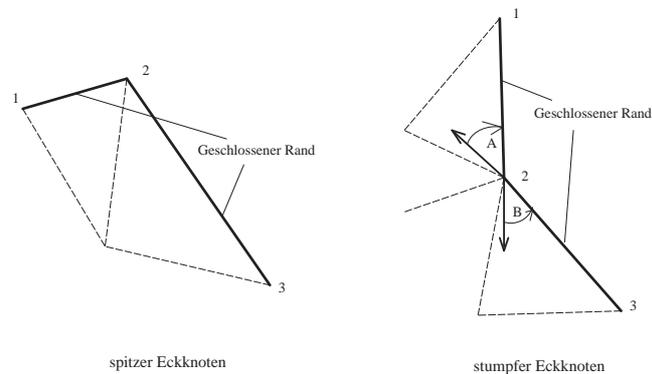


Abbildung 5.3: Eckformen an geschlossenen Rändern

spitzen Ecke wesentlich komplizierter. Wie schon erwähnt, ist aus numerischer Sicht eine Wellenzahl von Null genauso unmöglich, wie eine von unendlich. Zunächst wird vorgeschlagen, solche Knoten explizit mit Randwerten zu spezifizieren. Ein zweiter, noch handhabbarer Fall ist, wenn aus den Gegebenheiten des Untersuchungsgebietes in der Umgebung dieses Knotens sichergestellt ist, daß der Wellenzahlvektor zu jeder Zeit aus dem Untersuchungsgebiet herauszeigt. Dann brauchen dort keine Vorgaben gemacht zu werden.

5.5 Entwicklung eines expliziten Algorithmus

Wie im obigen Kapitel erläutert, besteht zunächst die Aufgabe, das Gleichungssystem 5.65 nach dem Vektor der zeitlichen Ableitungen $[\dot{K}^i]$ aufzulösen. Es wird von folgender Gleichung ausgegangen:

$$\bar{M} * [\dot{K}^i] = [\bar{r}^i] . \quad (5.66)$$

Das Gleichungssystem (5.66) kann nun direkt durch das Berechnen der inversen Matrix \bar{M}^{-1} oder durch Gleichungslöser gelöst werden. Es wird nochmals die Struktur

der Matrix \bar{M} betrachtet:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{6} & \cdots & \frac{\beta_{1i}}{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \frac{\beta_{lm}}{12} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\gamma_n}{6} \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Betrachtet man beispielsweise den Knoten i , so ist der Elementpatch des Knotens i die Menge aller Elemente, zu denen der Knoten i gehört. Die Anzahl der Elemente wird mit γ_i bezeichnet.

Eine allgemeine Konvergenz eines iterativen Einschrittverfahrens zur Lösung von linearen Gleichungssystemen ist nur bei Diagonaldominanz gegeben:

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} a_{ij}. \quad (5.68)$$

Dies ist im obigen Fall jedoch nicht so. Bei einer guten Startnäherung kommt man jedoch auch zu einem Ergebnis:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_n}{6} \end{bmatrix} [\dot{K}^i]_{l+1} = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_{ij}}{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} [\dot{K}^i]_l + [r^i]. \quad (5.69)$$

Verwendet man als Standardnäherung die Ableitungen zu einem nahen vorherigen Zeitpunkt, sind nur wenige Iterationen und bei hinreichend kleinem Zeitschritt Δt sogar nur ein Iterationsschritt nötig. Man erhält also bei hinreichend kleinem Δt folgende Bestimmungsgleichung für die zeitlichen Ableitungen:

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma_1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma_n}{6} \end{bmatrix} [\dot{K}^i] = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta_{ij}}{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} [\dot{K}^i]_{old} + [r^i]. \quad (5.70)$$

Eine andere Möglichkeit eine Startnäherung zu erhalten, ist die Matrix \bar{M} zu *lumpen*. Die Startnäherung entspricht dann einer mittleren Lösung über einem Patch zum aktuellen Zeitpunkt. Betrachtet man die Zeile i , so bedeutet die Gleichung 5.67:

- Die Summe \dot{K}^j des Patches der am Knoten i hängenden Elemente wird mit \dot{K}^i gemittelt und ist gleich r^i .

Wird von hinreichend kleinen Elementen und von einer gewissen Glattheit von \dot{K} ausgegangen, so ist der Wert von \dot{K}^i nicht weit vom Mittelwert der um ihn herumliegenden Knotenwerten entfernt. Bei der Wahl eines Schätzwertes der zeitlichen Ableitung eröffnet sich ein breiter Möglichkeitsbereich durch die Linearkombination beider vorgestellter Schätzungen.

5.6 Numerische Zeitintegration

Wie im vorhergehenden Kapitel gezeigt wurde, reduzieren sich bei der hier vorgestellten Vorgehensweise die Modellgleichungen nach der örtlichen Approximation mittels eines GALERKIN- bzw. PETROV-GALERKIN-Verfahrens auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. In Verbindung mit vorgegebenen Anfangswerten kann zur zeitlichen Lösung dieses Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen auf eine Vielzahl von Standardverfahren zurückgegriffen werden. Im weiteren werden die verwendeten Algorithmen kurz beschrieben. Dabei wird ein Anfangswertproblem der allgemeinen Gestalt

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) \quad (5.71)$$

mit der Anfangsbedingung $X(t_0) = X_0$ und dem Integrationsintervall $[t_0, t_{end}]$ betrachtet.

Die numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben werden in

1. Einschrittverfahren,
 2. Mehrschrittverfahren und
 3. Extrapolationsverfahren
- unterschieden.

Zu der Gruppe der Einschrittverfahren gehört im wesentlichen die Klasse der expliziten und impliziten Runge-Kutta-Verfahren. Im Gegensatz zu den Einschrittverfahren, die zur Bestimmung einer Näherung von $X(t + \Delta t)$ nur einen vorangegangenen Wert $X(t)$ benötigen, verwenden Mehrschrittverfahren eine größere Anzahl von Zuständen in der Vergangenheit. Unter den Ein- und Mehrschrittverfahren bilden die Prädiktor-Korrektor-Verfahren eine eigene Klasse. Bevor jedoch auf die konkrete Wahl eines Integrationsverfahrens eingegangen wird, müssen zunächst die Eigenschaften des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems bestimmt werden. Eine mathematische Analyse ist auf Grund der Komplexität der entstehenden Gleichungen nicht möglich. Deshalb wird an dieser Stelle eine, in Anlehnung an die zu beschreibenden physikalischen Prozesse, pauschale Betrachtung durchgeführt.

Unter Zuhilfenahme eines fiktiven Untersuchungsgebietes mit Watt- und Tiefwassergebieten werden Geländepunkte in der Wasserwechselzone, im Tiefwasser sowie auf dem

trockenen Strand gewählt. Es ist zu erkennen, daß sich die zeitlichen Entwicklungen der gesuchten Größen, z.B. Strömungsgeschwindigkeiten, um Größenordnungen unterscheiden. Dabei können Knoten, bei denen die Variablen fast stationär sind (z.B. auf dem hohen Strand) und solche hoher Dynamik (z.B. im Bereich der Wasserwechselzone) örtlich sehr eng beieinander liegen. Solche Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen werden als steif bezeichnet. Bei der Nutzung von numerischen Integrationsverfahren muß im allgemeinen die Schrittweite nach der sich am schnellsten ändernden Größe (in diesem Fall der entsprechende Knoten) richten. Bei Simulationsmodellen in der Hydrodynamik, speziell im Küsteningenieurwesen, ist es im allgemeinen a priori nicht möglich, für alle möglichen Zustände einen optimalen Zeitschritt zu bestimmen. Deshalb wird zur Beherrschung solcher Systeme der notwendige Zeitschritt zu jedem Zeitpunkt der Simulation bestimmt. Die Restriktion eines häufig sehr kleinen Zeitschritts kann durch das Verwenden eines A-stabilen Verfahrens umgangen werden. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß kein explizites Verfahren A-stabil und die globale Fehlerordnung eines A-stabilen Mehrschrittverfahrens höchstens zwei ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden folgende Verfahren implementiert:

- Euler-Verfahren 1. Ordnung,
- Explizites-Heun-Verfahren 2. Ordnung,
- Prädiktor-Korrektor-Heun-Verfahren 2. Ordnung,
- Runge-Kutta-Verfahren 2./3. Ordnung und
- Runge-Kutta-Verfahren 4./5. Ordnung.

Für alle Verfahren wurde eine Schrittweitensteuerung realisiert. Dabei gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten, die Schrittweiten zu kontrollieren. Hat man nur ein Verfahren einer bestimmten Approximationsordnung zur Verfügung, kann eine Schrittweitensteuerung über die Anwendung zweier verschiedener Schrittweiten realisiert werden. Es werden zwei Lösungen zur Zeit $(t + \Delta t)$ berechnet, wobei einmal ein Schritt mit der Schrittweite Δt herangezogen und eine Lösung mit zwei Schritten der Länge $\frac{\Delta t}{2}$ berechnet wird. Ist die Differenz beider Lösungen kleiner als eine vorgegebene Fehlerschranke, so wird der Zeitschritt akzeptiert. Eine andere Möglichkeit ist die Kombination zweier Verfahren unterschiedlicher Ordnung. Auch hier werden für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ zwei Lösungen bestimmt, jedoch mit zwei verschiedenen Verfahren der Ordnung n und $n+1$. Im Zusammenhang mit dieser Zeitschrittsteuerung wurden spezielle eingebettete Integrationsverfahren entwickelt.

Bei der Auswahl eines geeigneten Verfahrens spielt nicht nur die Ordnung, sondern unter praktischen Gesichtspunkten auch die Anzahl der Funktionswertaufrufe eine große

Rolle. Im konkreten Fall einer zeitabhängigen partiellen Differentialgleichung bedeutet ein Funktionswertaufruf den Aufbau der Finite Element Approximation.

Euler-Verfahren 1. Ordnung

Die rechte Seite der Gleichung 5.71 muß beim Euler-Verfahren einmal ausgewertet werden, d.h. die Differentialgleichung muß einmal nach dem Ort integriert werden:

$$\begin{aligned} X_1(t + \Delta t) &= X(t) + \Delta t \dot{X}(t) \\ &= X(t) + \Delta t f(X(t)). \end{aligned}$$

Explizites-Heun-Verfahren 2. Ordnung

Das Explizite-Heun-Verfahren basiert auf der Verwendung der Tangententrapezformel bei der numerischen Integration der Gleichung 5.71. Hierfür muß die rechte Seite der Gleichung 5.71 zweimal ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} X_2(t + \Delta t) &= X(t) + \Delta t \dot{X} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ &= X(t) + \Delta t f \left(X(t) + \frac{\Delta t}{2} \dot{X} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Dies ist ein sehr einfaches Verfahren, welches im Zusammenhang mit einem Euler-Schritt mit der Schrittweite Δt Lösungen 1. und 2.Ordnung liefert.

Prädiktor-Korrektor-Heun-Verfahren 1./2. Ordnung

Dieses Verfahren von Heun basiert auf der Idee, zur Integration der Gleichung 5.71 die Sehnentrapezformel zu verwenden. Auf Grund der impliziten Gestalt der Sehnentrapezformel muß ein iteratives Lösungsschema verwendet werden. Bei einem hinreichend kleinen Zeitschritt reichen hierfür zwei Iterationsschritte aus. Dabei wird der erste, ein Euler-Schritt, als Prädiktor bezeichnet und der zweite Schritt als Korrektor:

$$\begin{aligned} X_1(t + \Delta t) &= X(t) + \Delta t f(X(t)) \quad \text{und} \\ X_2(t + \Delta t) &= X(t) + \Delta t (f(X(t)) + f(X_1(t + \Delta t))) / 2. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren zeichnet sich besonders dadurch aus, daß es das einzige hier vorgestellte A-stabile Verfahren ist. Zum anderen werden zwei Lösungen unterschiedlicher Ordnung berechnet, was den Einsatz einer Zeitschrittsteuerung erleichtert.

Runge-Kutta-Verfahren 2./3. Ordnung

Die Runge-Kutta-Verfahren gehören zu den sehr häufig verwendeten expliziten Einschrittverfahren. In diesem Rahmen werden zwei auf die Belange einer Schrittweitensteuerung angepaßte Formeln wiedergegeben. Hierbei entspricht die Anzahl der Funktionswertauswertungen der maximalen Ordnung des Verfahrens:

$$\begin{aligned}
 X_2(t + \Delta t) &= X(t) + \frac{1}{2} \Delta t \left(\dot{X}(t) + \dot{X}(t + \Delta t) \right) , \\
 X_3(t + \Delta t) &= X(t) + \frac{1}{6} \Delta t \\
 &\quad \left(\dot{X}(t) + 4 \dot{X} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \dot{X}(t + \Delta t) \right) .
 \end{aligned}$$

Runge-Kutta-Verfahren 4./5. Ordnung

$$\begin{aligned}
 X_4(t + \Delta t) &= X(t) + \frac{1}{6} \Delta t \\
 &\quad \left(\dot{X}(t) + 4 \dot{X} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \dot{X}(t + \Delta t) \right) , \\
 X_5(t + \Delta t) &= X(t) + \frac{1}{336} \Delta t \\
 &\quad \left(14 \dot{X}(t) + 125 \dot{X} \left(t + \frac{\Delta t}{5} \right) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{336} \Delta t \\
 &\quad \left(162 \dot{X} \left(t + \frac{2\Delta t}{3} \right) + 35 \dot{X}(t + \Delta t) \right) .
 \end{aligned}$$

Wie oben schon erwähnt, wurde eine Zeitschrittsteuerung, wie sie für gewöhnliche Differentialgleichungen üblich ist, verwendet. Diese reine Zeitschrittsteuerung bezüglich der auftretenden Fehler, ist nicht ausreichend. Vielmehr ist auch den Eigenschaften eines Systems zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen und deren Approximation durch Finite Elemente Rechnung zu tragen. Sinnvoll ist es, den **maximal zulässigen Zeitschritt** durch den Courant-Schritt zu begrenzen. Die Vorgabe eines **minimalen Zeitschritts** ist für das Auffinden von Gitternetzfehlern sinnvoll.

5.7 Praktische Aspekte

In diesem Abschnitt soll auf einige grundsätzliche Aspekte bei der praktischen Anwendung des Simulationsmodells eingegangen werden.

Während der allgemeinen Herleitung der numerischen Approximation der Modellgleichungen sowohl für die Wellensimulation als auch für die Simulation der großräumigen Strömung wurden aus Gründen der Übersicht im wesentlichen vereinfachte Gleichungen betrachtet. Der Großteil der zusätzlichen Terme ist auf analoge Weise implementiert. Um auch die Praxistauglichkeit der entwickelten Modellgleichungen zur Beschreibung des Seegangs unter Einbeziehung von Diffraktionseffekten zu dokumentieren, werden zusätzliche Bemerkungen notwendig. Bei den obigen Abschnitten wurde im allgemeinen nur bemerkt, daß die Wellenzahl k über die BATTJES-Gleichung zur Länge des Wellenzahlvektors in Beziehung steht:

$$k = \sqrt{K^2 - \delta^*} \quad (5.72)$$

mit

$$\delta^* = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2}. \quad (5.73)$$

Diese Beziehung muß an allen Knoten des Rechnernetzes gewährleistet werden. Es ist klar, daß dies nicht mit linearen Ansatzfunktionen in den Unbekannten direkt realisiert werden kann. Ein Finites Element, welches diese Ableitungen in den Knoten direkt berechnet, muß die Stetigkeit der zweiten Ortsableitungen in den Knoten sichern. Der Aufwand bei der Verwendung eines solchen Elementes wäre nicht gerechtfertigt. Zur Berechnung dieser zweiten Ableitung an den Knoten werden Berechnungsroutinen über mehrere Elementpatche verwendet. Ausgehend von der Eindeutigkeit der ersten Ortsableitungen innerhalb eines Elementes kann die erste Ortsableitung näherungsweise durch eine Mittelwertbildung über die an diesem Knoten hängenden Elemente berechnet werden. Mit der Kenntniss der ersten Ableitung an den Knoten eines Dreieckselementes (als neue Knotenvariable) ist die nun eindeutig bestimmbare zweite Ableitung innerhalb des Elementes berechenbar und auf deren Grundlage wieder die zweite Ortsableitung im Knoten. Diese Vorgehensweise entspricht, bei regelmäßigen Dreiecksnetzen, der Vorgehensweise der Berechnung höherer Ableitungen bei der Methode der Finiten Differenzen über mehrere Knotenreihen hinweg. Diese Herangehensweise ist vertretbar, falls von einem Gitternetz mit hinreichend kleinen Dreieckselementen ausgegangen werden kann. Andere Approximationen der zweiten Ortsableitungen sind über die Verwendung von zweidimensionalen Interpolationsfunktionen denkbar.

Nicht nur bei der numerischen Realisierung von Diffraktionseffekten innerhalb des Wellenmodells spielt die verwendete Konfiguration der Dreieckselemente eine Rolle, sondern sie ist im wesentlichen mitverantwortlich für die Qualität der numerischen Lösung

mittels der Methode der Finiten Elemente. Zum einen führen verformte Dreiecke (kleine Kantenwinkel, enge Nachbarschaft von sehr großen und sehr kleinen Elementen) bei der Berechnung der Ortsableitungen und Flächen zu Ungenauigkeiten und damit zu Fehlern in der Lösung, zum anderen hat auch die Punktdichte des Gitternetzes wesentlichen Einfluß auf die richtige Wiedergabe von örtlichen Variationen der Unbekannten. Dieser Aspekt gewinnt insbesondere durch die Notwendigkeit einer richtigen Wiedergabe des Wellenbrechens an Bedeutung. Wie schon erwähnt, ist die örtliche Lage der Zone des Wellenbrechens ein wesentlicher Faktor bei der Ausbildung der küstennahen Strömung. Die richtige Wahl einer Punktdichte wird zum einen von den zu erwartenden Effekten und zum anderen vom Grad der geforderten Genauigkeit abhängen. Ausgehend von ersten Erfahrungen mit dem Simulationsmodell sollten die Bereiche, in denen es zu Wellenbrechprozessen kommen kann, hoch aufgelöst werden (Kantenlängen von 0.2 bis 1 Wellenlänge).

Kapitel 6

Modellverifikation und Anwendungen

Es wurden eine Reihe von Simulationsrechnungen durchgeführt, zum einen um die Realisierbarkeit der entwickelten Modellgleichungen und zum anderen die konkrete exemplarische numerische Approximation zu verifizieren.

Vor allem wegen der starken Nichtlinearität der einzelnen Größen ist es nicht möglich, alle Komponenten des numerischen Modells gleichzeitig zu testen. Bei der Verifikation von numerischen Modellen wird daher im allgemeinen eine Systematik von einfachen zu komplexen Testfällen vorgenommen. Auf Grund des stochastischen Charakters von Naturmessungen sowie der großen Anzahl von zu beachtenden Parametern sind Verifikationen bzw. Vergleiche mit Naturdaten der Abschluß einer systematischen Modellverifikation bzw. der Anfang einer Anpassung eines Modells auf ein bestimmtes Einsatzgebiet. An dieser Stelle muß nochmals darauf hingewiesen werden, daß das vorgestellte Wellenmodell ausschließlich monochromatische Wellen beschreiben kann. Natürlicher Seegang hingegen besteht im allgemeinen aus verschiedenen Frequenzen und Anlaufrichtungen. Analog gibt es natürlich auch Einschränkungen in der Naturähnlichkeit von tiefenintegrierten Strömungsmodellen. Es werden deshalb bewußt im ersten Teil Beispiele gewählt, für die analytische Lösungen vorliegen, um die Richtigkeit der numerischen Simulation im Rahmen der verwendeten Theorien zu überprüfen. Dabei erfolgt zunächst eine getrennte Betrachtung der Modellkomponenten. Nachdem auch für das gekoppelte Modell eine Verifikation an akademischen Situationen erfolgt, werden die Leistungsfähigkeit und die Möglichkeiten des entwickelten Modells an Hand von Problemstellungen des Küstenschutzes diskutiert.

6.1 Wellenmodell

In diesem Abschnitt soll die Anwendbarkeit des Wellenmodells an Hand von einigen Beispielen überprüft und demonstriert werden. Dabei erfolgt eine Vernachlässigung der Effekte auftretender Strömungen.

In den ersten 4 Beispielen werden die einzelnen Wellentransformationen, Refraktion, Shoaling, Wellenbrechen und Diffraktion getrennt überprüft. Zum Abschluß wird an Hand einer komplexen Topographie das Zusammenwirken aller Wellentransformationen dokumentiert.

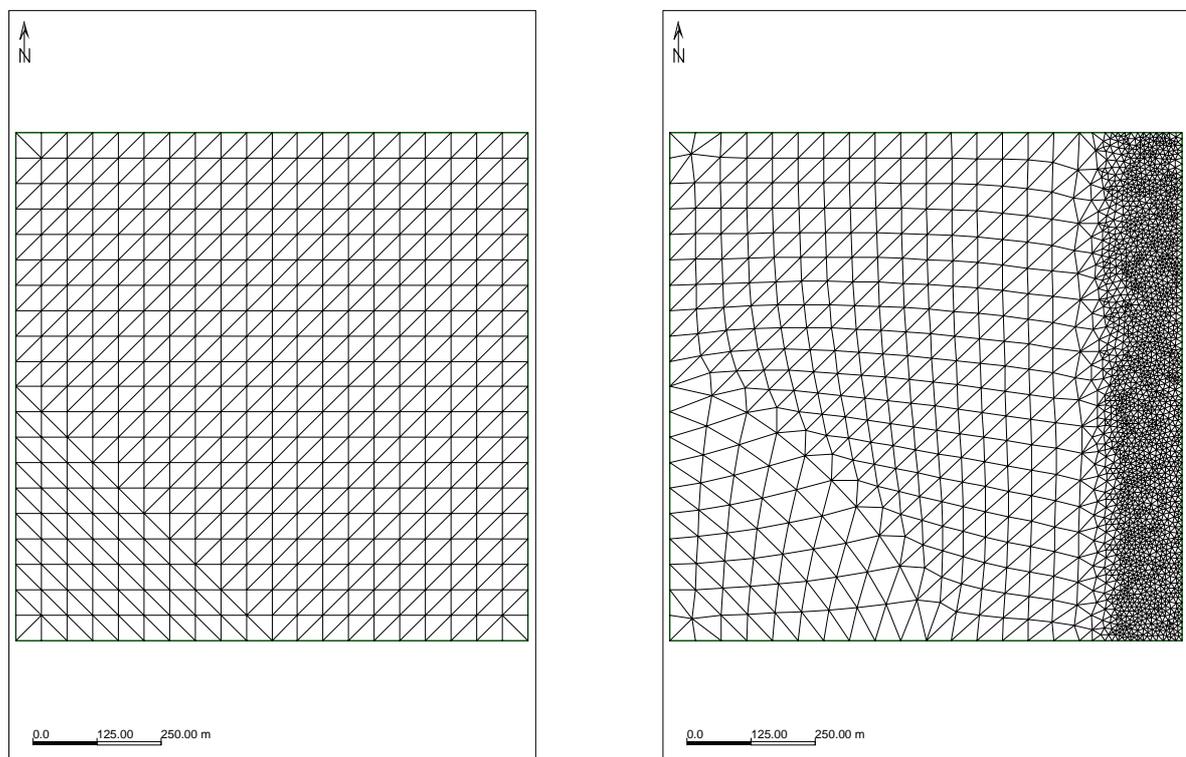


Abbildung 6.1: Gitternetze

6.1.1 Wellenrefraktion

Das erste Beispiel vergleicht die berechnete Refraktion von Wellen mit der analytischen Lösung, dem SNELLSchen Gesetz. Die hierbei zur Anwendung kommende Topographie wird auch im weiteren eine zentrale Rolle spielen. Es handelt sich um einen Strand mit

ebener Unterwassertopographie, der eine konstante Neigung von 1:40 bis zu einer Tiefe von 14m hat.

Es wurden dabei zwei Gitternetze unterschiedlicher Auflösung verwendet, um auch den Einfluß der Diskretisierung zu überprüfen.

Für die Periode der einlaufenden Welle wurde $T_0 = 4\text{s}$ gewählt. Dies entspricht einer Tiefwasserwellenlänge von rund 25m. Wenn die Wassertiefe etwa der Hälfte der Wellenlänge entspricht, bekommt Grundberührung der Welle einen signifikanten Einfluß auf den Wellenfortschritt. Dadurch wird die Wellengeschwindigkeit und die Wellenlänge verringert und die Wellen werden gebeugt falls sie nicht senkrecht zur Küste auflaufen. In der Abbildung 6.2 sind die mit dem feinen Gitternetz simulierten Ergebnisse mit dem klassischen Dispersionsansatz im Vergleich dargestellt. Diese Ergebnisse entsprechen ganz dem SNELLschen Gesetz für parallele Tiefenlinien. Es hat die Form:

$$k \sin(\alpha) = k_0 \sin(\alpha_0), \quad (6.1)$$

mit

k – Wellenzahl,

α – Wellenanlaufwinkel.

Der Index 0 kennzeichnet die Tiefwasserwerte der entsprechenden Variablen.

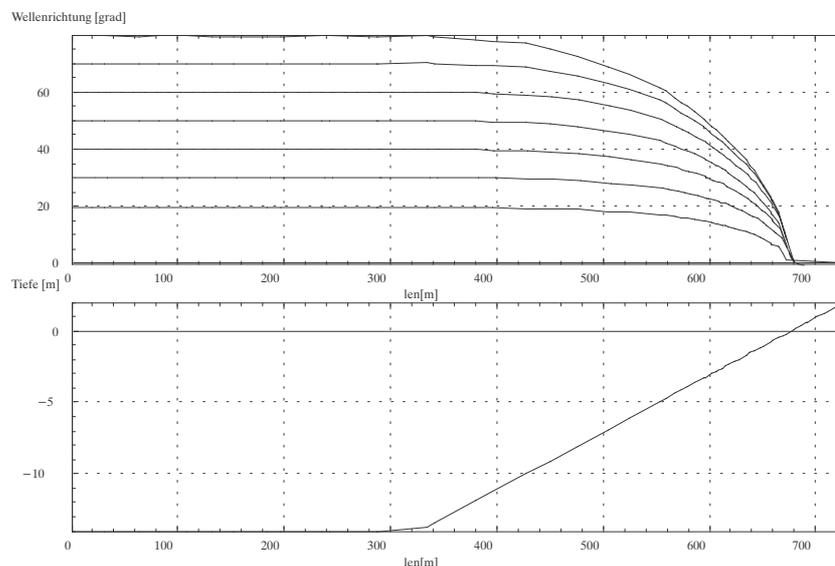


Abbildung 6.2: Berechnete Wellenanlaufwinkel

In Abbildung 6.3 ist der Unterschied bei der berechneten Refraktion infolge unterschiedlicher Gitternetzweiten dargestellt.

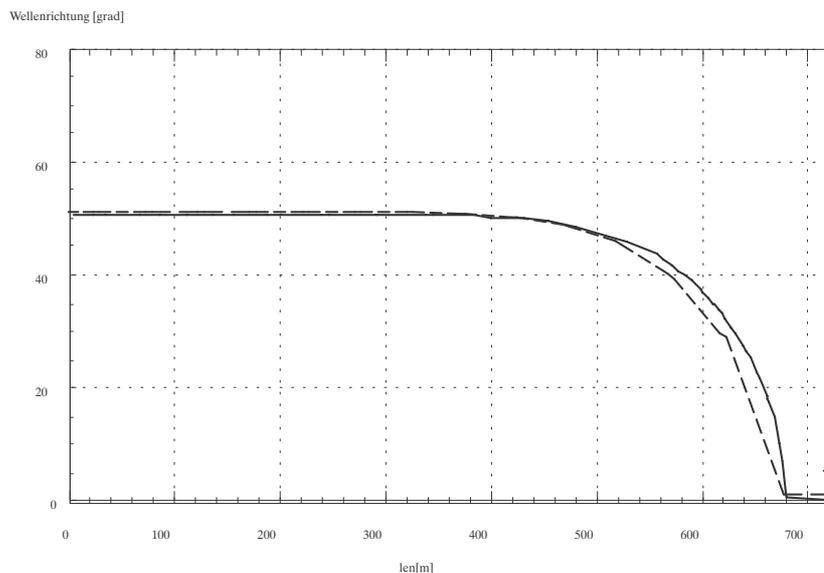


Abbildung 6.3: Vergleich der Lösungen mit unterschiedlichen Gitternetzweiten
 durchgezogene Kurve - feines Gitternetz
 gestrichelte Kurve - grobes Gitternetz

6.1.2 Wellenshoaling

Shoaling bezeichnet die Veränderung der Wellenhöhe beim Einlaufen in flaches Wasser gegenüber der Wellenhöhe in Tiefwasser. Die richtige Wiedergabe des Shoaling-Effektes durch das Modell soll an Hand des klassischen Wellenpotentials und einem Wellenanlauf senkrecht zur Küste dokumentiert werden.

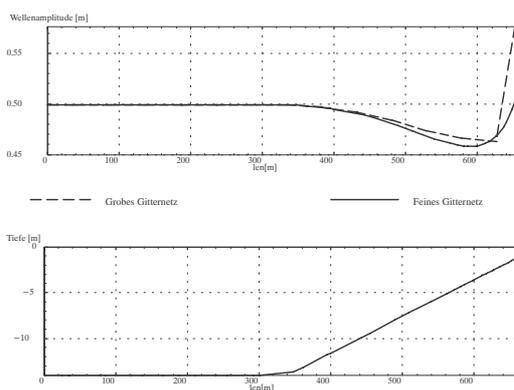


Abbildung 6.4: Berechneter Shoalingeffekt

Nach der linearen Wellentheorie von AIRY wird eine Welle, die aus dem Tiefwas-

serbereich auf die Küste zuläuft, verändert sobald die Orbitalbewegung der Welle den Meeresboden erreicht. Dies ist bei $d \leq 0.5 L$ der Fall. Durch die Grundberührung der Welle verformen sich die anfänglich kreisförmigen Orbitalbewegungen zu Ellipsen. Treten keine weiteren Effekte wie Refraktion, Diffraktion usw. auf, kann auf der Grundlage der Konstanz des Wellenenergieflusses

$$F_0 = F,$$

der Wellenhöhenverlauf berechnet werden:

$$a = a_0 \sqrt{\frac{1}{\tanh(d k)} \frac{1}{\left[1 + \frac{k d}{\sinh(k d)}\right]}}.$$

Dabei sind die mit einer kleinen Null gekennzeichneten Größen die Tiefwasserwerte. Aus der Analyse dieser Relation ergibt sich nahezu eine Konstanz der Wellenhöhe im Tiefwasser ($\frac{1}{2} \leq \frac{d}{L}$). Bei den Wellen im Übergangsbereich ($\frac{1}{20} \leq \frac{d}{L} \leq \frac{1}{2}$) wird zwar das Verhältnis von H/L (Wellensteilheit) größer, aber die relative Wellenhöhe nimmt ab und erreicht ein Minimum von $a/a_0 = 0.913$ bei $d/L_0 = 1/(2\pi) \simeq 0.16$.

Bei den hier durchgeführten Simulationen wurde das Wellenbrechen vernachlässigt. Um das technische Problem einer unendlichen Wellenhöhe zu umgehen und den Gültigkeitsbereich der linearen Wellentheorie nicht zu weit zu verlassen, wurde am Strand eine konstante Wassertiefe von 1m vorgegeben.

Bezüglich der konkreten Testparameter, Wellenperiode von 4s und Wellenamplitude von 0.5m, erreicht die Wellenamplitude bei rund 4m Wassertiefe ihr Minimum von 0.455m. Vergleicht man zusätzlich noch den zu erwartenden Wert bei einer Wassertiefe von 1m, so muß dort die Wellenamplitude 0.54m betragen (siehe Abbildung 6.4). Selbst bei einem sehr groben Gitternetz (Gitternetz 1 in Abbildung 6.1) wird die Tendenz der Wellenamplitudenentwicklung gut wiedergegeben.

6.1.3 Wellenbrechen

In diesem Testfall sollen nicht die verwendeten Brecherkriterien im Vordergrund stehen, da deren Eignung sehr vom Anwendungsgebiet und den dort vorherrschenden hydrodynamischen Gegebenheiten abhängt. Vielmehr soll die positive Wirkung des numerischen *streamline-upwinding*-Verfahren dokumentiert werden. In der Abbildung 6.5 ist gut zu erkennen, daß die Implementation des Wellenbrechens nur Wirkung in Wellenanlauf-richtung, in diesem Fall in Strandrichtung, hat. Der Verlauf der Wellenhöhen im Bereich reinen Shoalings wird nicht durch das Wellenbrechen am Strand beeinflusst. Selbst bei einer sehr groben Diskretisierung kommt es zu keinen negativen Effekten (siehe Abbildung 6.5).

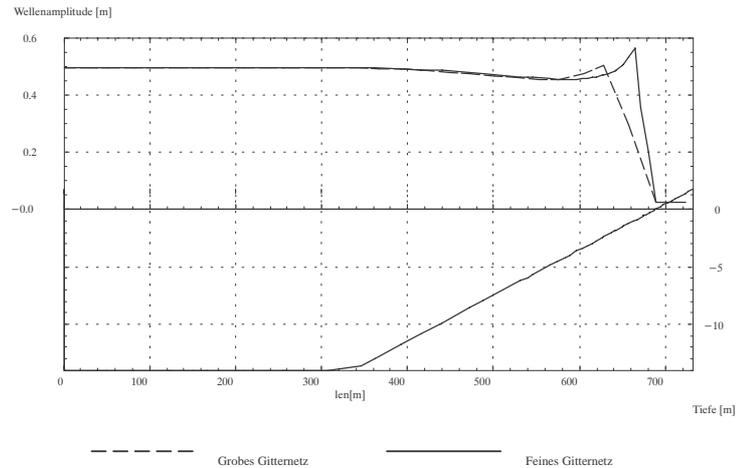


Abbildung 6.5: Wellenhöhenverteilung mit Wellenbrechen

Die Wellenparameter entsprechen denen des vorherigen Abschnittes. Als Brecherkriterium wird das historisch älteste und einfachste verwendet, wonach eine Welle bricht, wenn ihre Wellenhöhe einen gewissen Prozentsatz der mittleren Wassertiefe erreicht. Dabei erstreckt sich der Bereich von 78% bei ebenem Seegrund bis 150% bei steilem Unterwasserstrand. Die Simulation wurde mit dem Test auf 100% der Wassertiefe durchgeführt. Bei einem Wellenanlauf senkrecht zum Strand wurden die schon genutzten Wellenparameter verwendet. Ausgehend von den Betrachtungen zum Wellenshoaling muß dann die Welle bei einer Wassertiefe von 1.06m brechen und eine Amplitude von 0.53m haben. Innerhalb der Brecherzone muß sich die Wellenamplitude, entsprechend dem Energiedissipationsansatz 3.96, proportional zur Wassertiefe entwickeln.

6.1.4 Wellendiffraktion

Es wird ein halbunendlicher Wellenbrecher betrachtet, um auch die Anwendbarkeit der entwickelten Modellgleichungen unter Einbeziehung von Diffraktionseffekten zu dokumentieren. Die Wellenparameter entsprechen den schon verwendeten. Zur Vermeidung unnötiger Störungen wird an der dem Wellenanlauf zugewandten Seite des Wellenbrechers der Modellrand als offen angenommen. Physikalisch entspricht dies der vollständigen Absorption der Wellenenergie, ohne Teile davon zu reflektieren. Am Rand des Wellenbrechers im Wellenschatten wird eine *slip*-Randbedingung verwendet. Diese entspricht einer senkrechten Mauer.

Bevor auf die Simulationsergebnisse eingegangen wird, muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß die exemplarische numerische Approximation für den Fall der Dif-

fraktion nicht optimal ist. Auf Grund der linearen Ansatzfunktionen wird die in den Gleichungen benötigte 2. Ableitung der Wellenamplitude über mehrere Dreieckselemente hinweg (über mehrere Knotenpatche hinweg) näherungsweise bestimmt. Dies erfordert eine hohe Auflösung des Untersuchungsgebietes in Bereichen, wo Diffraktionserscheinungen zu erwarten sind.

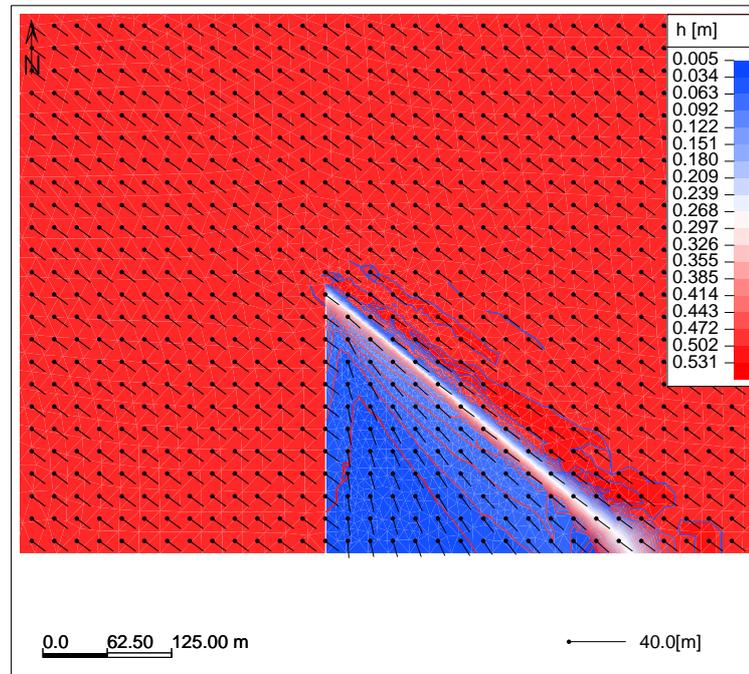


Abbildung 6.6: Berechnete Diffraktion

Trotz der obigen Einschränkungen zeigt die Abbildung 6.6 eine qualitativ richtige Wiedergabe der Diffraktionseffekte. Es kommt nicht nur zu einem Einschwenken der Wellenlängenvektoren hinter dem Wellenbrecher und damit einhergehend zu einer Abnahme der Wellenhöhen im Wellenschatten, sondern auch zu einem Anwachsen der Wellenhöhen außerhalb des Wellenschattens der einlaufenden Welle.

6.1.5 Zweidimensionale Anwendung

Zum Abschluß der Verifikationen des reinen Wellenmodells soll eine komplexe zweidimensionale Anwendung dokumentiert werden. Es wird eine idealisierte Strandtopographie verwendet, um eine einfache Zuordnung von Ursache und Wirkung zu ermöglichen. Die hier verwendete Idealisierung wurde im Rahmen des Forschungsvorhabens "Optimierung Küstenschutz Sylt" aus Naturvermessungen gewonnen und soll wesentliche Abschnitte der Westküste von Sylt repräsentieren (siehe [21]). Es handelt sich um die

lenlängenvektoren) normal zum Strand und das Kürzerwerden der Wellenlängen. Besonders interessant ist die Verteilung der Wellenamplitude (Wellenenergie) infolge der Wirkung der Rifföffnungen. Hier kommt es zu einem Auffächern der Wellenstrahlen und infolge dessen zu einer Abnahme der Wellenamplituden in der Nähe der Rifföffnungen. Seitlich dieser Bereiche geringerer Wellenenergie kommt es zu einer Fokussierung der Energie, wobei je nach Anlaufrichtung der Wellen, der eine oder andere Bereich stärker ausgeprägt ist. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß es bei den hier verwendeten Wellenparametern zu keinen Brecherscheinungen auf dem Riff kommt.

6.2 Strömungsmodell

6.2.1 Dispersionstest

Der erste Test soll die Qualität des Strömungsmodells hinsichtlich seiner numerischen und physikalischen Dispersion veranschaulichen. Die Simulation wurde mit den vollständigen zweidimensionalen Flachwassergleichungen (einschließlich der nichtlinearen Terme) durchgeführt.

Betrachtet wird die zeitliche Entwicklung einer einzelnen Welle in einem 50m tiefen Kanal. Ausgehend von einer anfänglichen Wasserspiegelauslenkung in der Mitte des Kanals ($x = x_M$) in der Form

$$\eta(x) := \frac{0.4}{\cosh^2(f_c(x - x_M))} \quad (6.2)$$

und einer Anfangsgeschwindigkeit von Null werden zwei einzelne Wellen erzeugt. Mit dem Skalierungsfaktor f_c läßt sich die "Breite" der Welle einstellen. Gewählt wird hier $f_c = 0.3$. Der Kanal ist 1m breit und 400m lang. Die Diskretisierung erfolgt mit unregelmäßigen Dreieckselementen mit einer Kantenlänge zwischen 20cm und 25cm. An den Rändern des überall geschlossenen Kanals wird eine *slip*-Randbedingung vorgegeben.

Beobachtet wird nur eine der entstehenden einzelnen Wellen. In der Abbildung 6.8 ist zum einen die einzelne Welle kurz nach ihrer Entstehung und zum anderen nach fast 200m Lauflänge dargestellt.

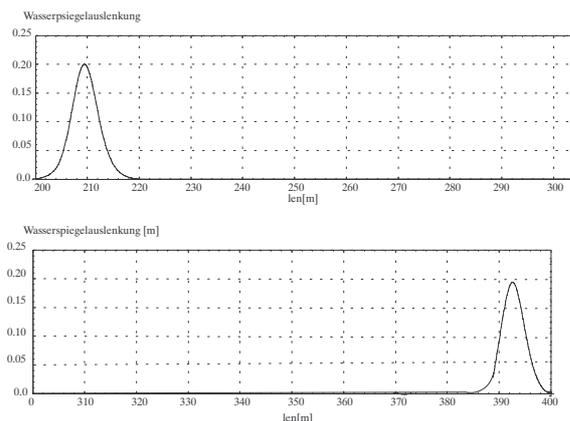


Abbildung 6.8: Ausbreitung einer einzelnen Welle

Dieser Testfall zeigt deutlich, daß bei einem Ausschluß der physikalischen Dispersion (kein Austauschterm und keine Reibung) kaum künstliche Dispersion durch das numerische Verfahren erzeugt wird. Es wird jedoch darauf hingewiesen, daß es natürlich infolge grober Gitternetze zu dispersiven Erscheinungen bei der Simulation kommen kann.

6.2.2 Schwallwelle

Das zweite Beispiel (siehe Abbildung 6.9) illustriert das Verhalten von Schwallwellen, wie sie beim plötzlichen Öffnen eines Schottes entstehen. Hierbei werden zwei stationäre Wasserstände durch einen Schott getrennt. Durch das Öffnen dieses Schottes entstehen zwei vertikale Wellen, die einander gegenläufig sind. Dieser Testfall dokumentiert das Verhalten des Strömungsmodells bei advektiver Dominanz. Es wurde ein Kanal mit einer Ruhewassertiefe von 1m, einer Länge von 100m und einer Breite von 10m simuliert. Die Dreieckselemente haben eine maximale Ausdehnung von 50cm. Der Initialsprung betrug 20cm, und es wurden die Ergebnisse alle zwei Sekunden dargestellt.

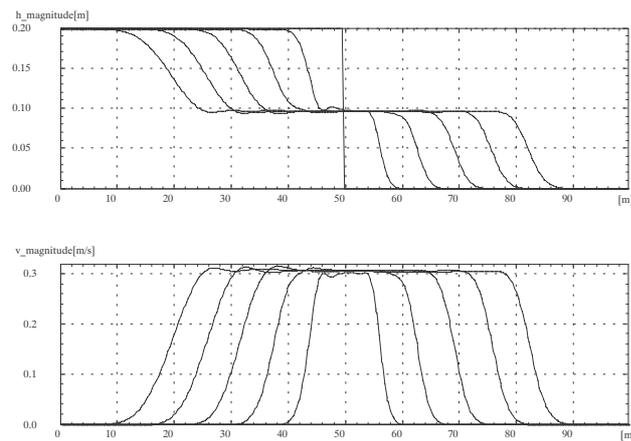


Abbildung 6.9: Ausbreitung einer Schwallwelle

Für die Verifikation des Modells kann unter anderem die theoretisch ermittelbare Wellenfortschrittsgeschwindigkeit einer Schwallwelle,

$$C = \sqrt{gd} \approx 3.13 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.3)$$

herangezogen werden. Die Simulation wurde ohne turbulenten Austausch und Reibungsansatz durchgeführt.

6.2.3 Tidesimulation

Im Rahmen des Forschungsvorhabens "Optimierung Küstenschutz Sylt" wurden umfangreiche Untersuchungen zur Tidedynamik im Gebiet des Nordfriesischen Wattenmeeres und speziell um Sylt durchgeführt [20]. Das Tidegebiet des Nordfriesischen Wattenmeeres ist zum einen durch eine komplexe Topographie und zum anderen durch eine damit zusammenhängende komplexe Hydrodynamik gekennzeichnet. So entstehen teilweise große Strömungsgeschwindigkeiten und ausgedehnte Wattflächen in der Wasserwechselzone. In diesem Abschnitt sollen die Anwendbarkeit des reinen Strömungsmodells auf natürliche Gegebenheiten dokumentiert werden. Hierzu wurde eine Tidesimulation für die Insel Sylt durchgeführt. Da nicht die Entwicklung eines Strömungsmodells im Vordergrund dieser Arbeit stand, sondern die Implementation eines solchen im wesentlichen dazu diente, die richtige Wiedergabe der Kopplung zwischen Wellen und Strömung zu dokumentieren, wurde zur Beschreibung des turbulenten Austauschs und der turbulenten Reibung im gesamten Untersuchungsgebiet nur die dynamische Viskosität von 0.0012kg/ms verwendet.

In der Abbildung 6.10 ist das Entstehen der aus Naturbeobachtungen bekannten typischen Strömungswalze an der seewärtigen Küste der Südspitze von Sylt bei Ebbe gut zu erkennen. Die Randwerte für diese Simulationen wurden durch ein "Nestig-Verfahren" aus übergeordneten großräumigen Modellen erzeugt.

Der in Abbildung 6.10 dargestellte Strömungszustand demonstriert anschaulich das komplexe Verhalten bei reinem Tidegeschehen. Andererseits sind an Hand von Naturmessungen im dargestellten Ausschnitt die Grenzen eines tiefenintegrierten Strömungsmodells aufgezeigt worden [21]. So kann ein solches Modell nicht die komplizierte dreidimensionale Struktur der Strömung in der tiefen Tiderinne wiedergeben.

6.3 Gekoppeltes Modell

Speziell die Wahl von Verifikationsdaten zur Untersuchung der Interaktion von Seegang und Strömung ist schwierig. Bei der Auswahl muß der Gültigkeitsbereich der verwendeten Modelle unbedingt beachtet werden. Sowohl die Art und Weise des Strömungsmodells als ein über die Tiefe integrierter Modellansatz und auch die Einschränkungen der linearen Wellentheorie müssen berücksichtigt werden. Bei den Testfällen dürfen keine signifikanten dreidimensionalen Effekte auftreten. Damit fallen eine Vielzahl von experimentellen Daten aus Wellenkanaluntersuchungen auf Grund ihrer quasi eindimensionalen Ausdehnung als ungeeignet heraus.

Zunächst ist es jedoch möglich zu überprüfen, ob existierende analytische Lösun-

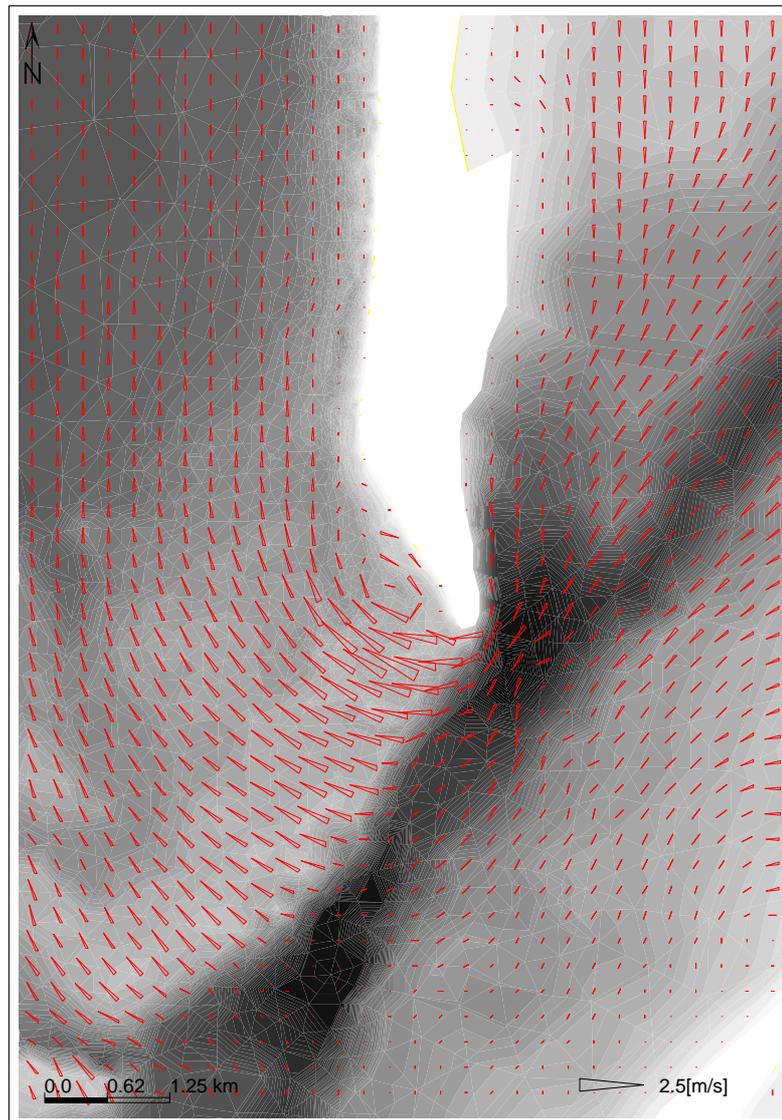


Abbildung 6.10: Ebbströmung an der Südspitze von Sylt

gen auf der Grundlage der klassischen *radiation stress* (siehe [33]) vom Modell richtig wiedergegeben werden.

Wird angenommen, daß sich die Wellen in x -Richtung über einen Seegrund mit variabler Tiefe aber mit senkrechten parallelen Tiefenlinien bewegen, so sind Refraktion und Diffraktion vernachlässigbar. Nach einer gewissen Zeit wird sich bei dieser Anordnung ein stationärer Zustand einstellen. Dies bedeutet, daß in den Kontinuitäts- und Impulsgleichungen die zeitlichen Ableitungen verschwinden. Unter Vernachlässigung der horizontalen Schubspannung am Boden vereinfacht sich die Impulsgleichung

in x -Richtung zu

$$\frac{d}{dx} S_{xx} = -\rho g(\eta + h) \frac{d\eta}{dx}. \quad (6.4)$$

Die Gleichung 6.4 kann unter Verwendung des klassischen Wellenpotentials und auf Grund dessen, daß η außerhalb der Brandungszone gegenüber der Ruhewassertiefe h klein ist, nach η aufgelöst werden. Im eindimensionalen analytischen Fall kann die Absenkung des mittleren Wasserstandes (*wave set-down*) außerhalb der Brecherzone näherungsweise durch die Funktion

$$\eta = -\frac{k a^2}{2 \sinh(2kh)} \quad (6.5)$$

beschrieben werden. In der unmittelbaren Umgebung des Brechpunktes der Wellen ($kh \ll 1$) gilt:

$$\eta_b \simeq -\frac{a^2}{4h}. \quad (6.6)$$

Für den Bereich des Wellenbrechens kann eine solche Formel auch angegeben werden. Wie schon bei der Herleitung der *radiation stress* erwähnt, stellt die Bestimmung der *radiation stress* in der Zone des Wellenbrechens ein Problem dar. Sowohl die welleninduzierten \tilde{S}_{ij} wie auch die turbulenzinduzierten S'_{ij} sind unbekannt. BOWEN [7], LONGUET-HIGGINS und THORNTON [44] führten aus diesem Grund die Hypothese ein, daß die Relationen zur Berechnung der *radiation stress* und der Wellenenergie formal gelten wie bei der Herleitung für kleine nichtbrechende Wellen. Die Vertretbarkeit dieser Hypothese konnte an Hand von Labor- und Naturuntersuchungen nachgewiesen werden.

Im Bereich des Wellenbrechens wird eine Proportionalität der Wellenamplitude zur Gesamtwassertiefe angenommen:

$$a = \frac{\gamma}{2}(\eta + h),$$

wobei γ eine empirische Konstante im Bereich 0.7-1.2 ist. Es kommt innerhalb der Brecherzone zu einer Abnahme der *radiation stress*, was auf Grund der Gleichung 6.4 zu einer Zunahme des mittleren Wasserstandes im Bereich des Wellenbrechens führt.

Der mittlere Wasserstand in der Brecherzone berechnet sich wie folgt:

$$\eta = \frac{h - h_s}{1 + \frac{3}{8}\gamma^2} \quad (6.7)$$

mit

$$h_s = -\left[1 + \frac{3}{8}\gamma^2\right]\eta_b + \frac{3}{8}\gamma^2 h_b. \quad (6.8)$$

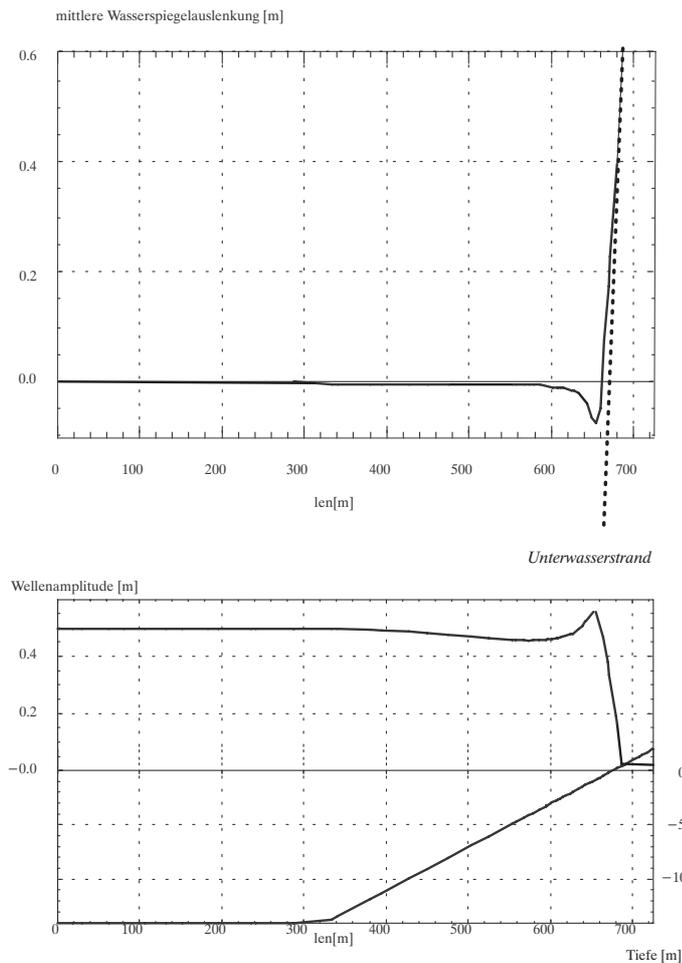


Abbildung 6.11: Berechneter wave set-up / set-down

Die Größen, die mit dem Index b gekennzeichnet sind, sind die Werte der Größen an der Stelle, wo die Welle anfängt zu Brechen.

Zur Verifikation wird wiederum das einfache Brecherkriterium angewendet, wonach die Welle bricht, falls die Wassertiefe kleiner als 100% der Wellenhöhe ist. Somit ist $\gamma = 1$. Ausgehend von den Resultaten des Abschnitts "Wellenbrechen" können in der Abbildung 6.11 für die schon verwendeten Wellenparameter ($T_o = 4\text{s}$ und $H_o = 1\text{m}$) die theoretisch bestimmbaren charakteristischen Größen überprüft werden.

Die Wellen beginnen bei einer Wellenamplitude $a_b = 0,53\text{m}$ und einer Wassertiefe von $h_b = 1,06\text{m}$ zu brechen. In der Umgebung der Brecherlinie ergibt sich dann eine maximale Absenkung des mittleren Wasserstandes (*wave set-down*) von

$$\eta_b = 0.06625\text{m.}$$

Der maximale Brandungsstau (*wave set-up*) kann näherungsweise berechnet werden, wenn die Wasserkante am Strand ($h(x) = 0$) betrachtet wird:

$$\eta_0 = 0.35534\text{m.}$$

So, wie der mittlere Wasserstand analytisch für den quasi eindimensionalen Fall berechnet werden kann, gibt es auch analytische Lösungen für die bei schräg anlaufendem Seegang induzierten küstenparallelen Strömungen (siehe [33]).

Die maximale Geschwindigkeit wird dabei an der Brecherlinie erreicht:

$$V_{max} = \frac{5\pi}{8} \frac{\gamma s'}{\rho f} \sqrt{g(\eta + h)_b} \sin(\theta_b). \quad (6.9)$$

Die Neigung des Unterwasserstrandes bezüglich des Ruhewasserstandes wird mit s bezeichnet. Die Neigung des Unterwasserstrandes in der Brandungszone muß jedoch bezüglich des mittleren Wasserstandes betrachtet werden. Diese Neigung wird mit s' bezeichnet. Ausgehend von der Bestimmung des mittleren Wasserstandes in der Brecherzone (siehe Gleichung 6.7) ergibt sich

$$s' = \frac{s}{1 + \frac{3}{8}\gamma^2}. \quad (6.10)$$

Speziell die Wahl eines geeigneten Reibungsparameter f ist ein Problem und hängt im allgemeinen mit den natürlichen Gegebenheiten des Anwendungsgebietes zusammen. LONGUET-HIGGINS gibt für diesen Parameter einen Bereich von 0.01 bis 0.03 an. Im weiteren wird ein Reibungsparameter $f = 0.01$ verwendet.

Für die schon verwendeten Wellenparameter und bei einem Einlaufwinkel im Tiefwasser von 20° ist der Anlaufwinkel an der Brecherlinie noch rund 10° . Ausgehend von dem verwendeten Brecherkriterium und der absoluten Neigung des Unterwasserstrandes $s = 0.025$ ergibt sich eine relative Neigung im Bereich des Brechens von $s' = 0.0182$. Hieraus ist die maximal mögliche welleninduzierte küstenparallele Strömung berechenbar:

$$V_{max} = 2.0\text{m/s} \quad .$$

Gut erkennbar ist in der Abbildung 6.12 auch die Änderung des Wellenanlaufwinkels im Bereich hoher küstenparalleler Strömungsgeschwindigkeiten.

6.3.1 Idealisierte Strandtopographie

In den letzten Abschnitten wurde vor allem Wert auf die richtige Wiedergabe von analytischen Lösungen gelegt. Dabei wurde häufig eine quasi eindimensionale Betrachtungsweise der Modelle nötig. Nun soll die wirkliche Zweidimensionalität des entwickelten Modells im Vordergrund stehen. Zunächst sollen an Hand der schon beschriebenen idealisierten Strandtopographie die auftretenden physikalischen Erscheinungen erläutert werden.

Als Test wird ein Extremereignis simuliert. Hierbei wird ein Wasserstand von 1m unter NN, was Tideniedrigwasser für den Bereich von Sylt entspricht, angenommen. Als Wellenparameter werden eine Periode von 5.25s und eine Tiefwasserwellenhöhe von 2.25m eingesteuert. Die Wellenanlaufrichtung unterscheidet sich um 5° von der küstennormalen Richtung.

Die Einfachheit der verwendeten Topographie erlaubt eine klare Zuordnung von Ursache und Wirkung. Gut zu erkennen ist in der Abbildung 6.13, daß es hinter den Rifföffnungen zu einem geringeren Energieeintrag der Wellen kommt. Damit in Zusammenhang stehend, ist dort der entstehende Brandungstau und die Strömungsgeschwindigkeiten geringer. Wie zu erwarten, kommt es im Bereich der Rifföffnungen zur Ausbildung von *rip-currents*. Die im Strandbereich auftretenden Walzensysteme sind ausschließlich auf die Unterschiede in der Verteilung der Wellenenergie zurückzuführen.

6.3.2 Testfeld Rantum auf Sylt

Zum Abschluß wird das entwickelte numerische Modell auf eine natürliche sandige Küste angewendet. Zur Analyse des hydrodynamischen Geschehens wurde aus einer Topographiefeldaufnahme im Mai 1988 ein Topographiemodell mit 3881 Knoten erstellt. Auch bei der hier dokumentierten Simulation wurde das schon im letzten Abschnitt spezifiziertere Extremereignis zu Grunde gelegt.

Die entstehende Wellen- und Strömungsverteilung, wie sie in Abbildung 6.14 dargestellt ist, ist wesentlich komplexer als im Fall der idealisierten Topographie. Erscheinungen, wie das Verhalten des Seegangs hinter Rifföffnungen und die dort entstehenden Strömungsstrukturen sind ähnlich denen in der idealisierten Topographie. Hingegen haben Unregelmäßigkeiten in der Tiefenstruktur des Tiefwasser- und Übergangsbereiches

recht großen Einfluß auf den berechneten Wellenfortschritt. Es zeigt sich auch, daß die klare Zuordnung von Ursache und Wirkung, wie dies in der idealisierten Topographie der Fall war, im allgemeinen nicht mehr möglich ist.

Ausgehend von den hier berechneten Ergebnissen ergibt sich die Notwendigkeit, zur Verifikation solcher Modelle, auf einen in sich konsistenten und darüber hinaus flächenhaften Datensatz zurückgreifen zu können. Die Schaffung solcher Datensätze ist mit einem hohen Aufwand verbunden.

Diese Anwendung zeigt sehr deutlich die Möglichkeiten eines solchen Modells auf, ohne jedoch dabei auf nähere Details einzugehen. Im Zusammenhang mit systematischen Untersuchungen und vereinfachten Topographien ist es nun möglich, Veränderungen in der Topographie vorzunehmen und deren Wirkung auf die Hydrodynamik im Küstenbereich zu untersuchen.

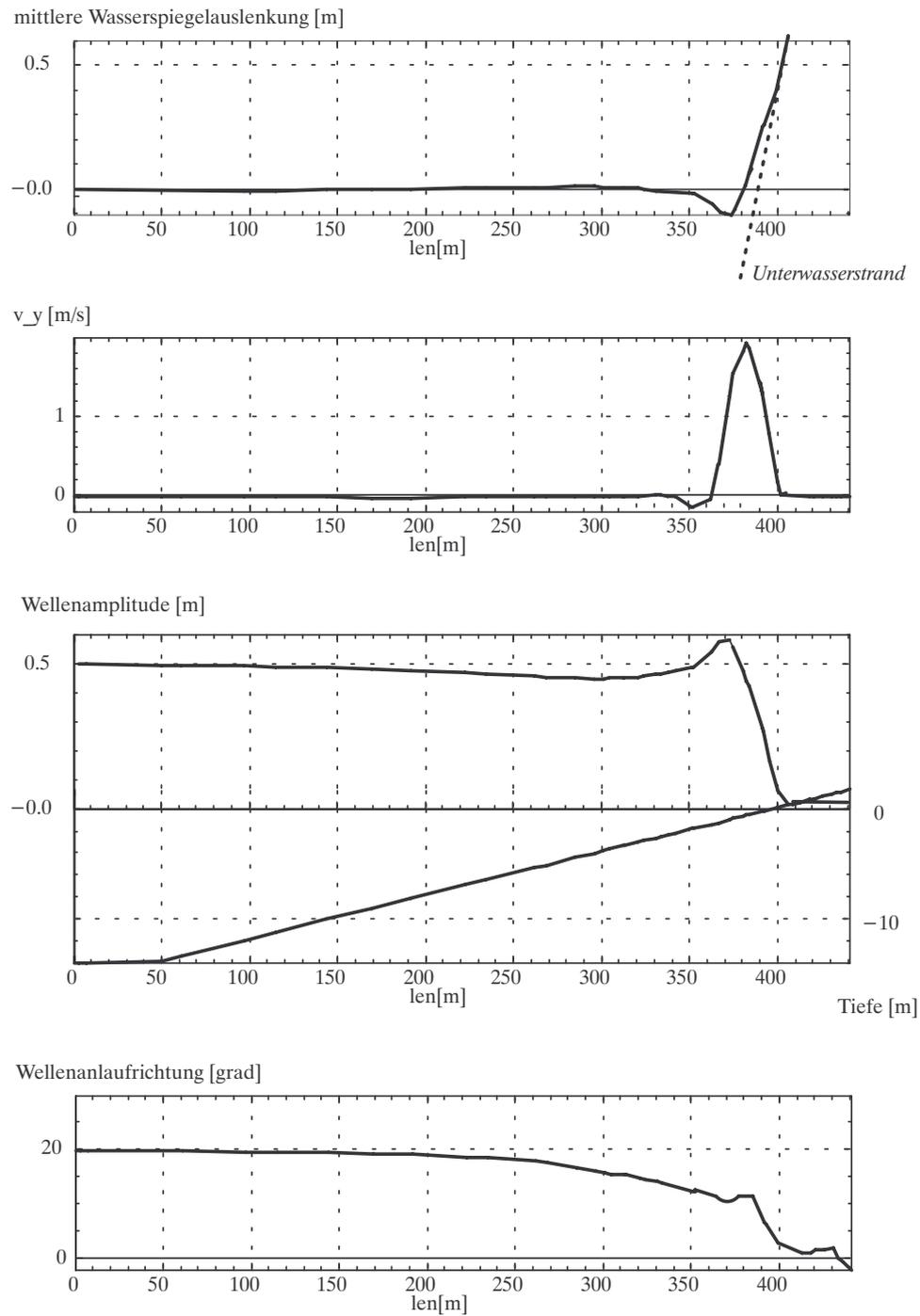


Abbildung 6.12: Simulationsergebnisse für schrägen Wellenanlauf

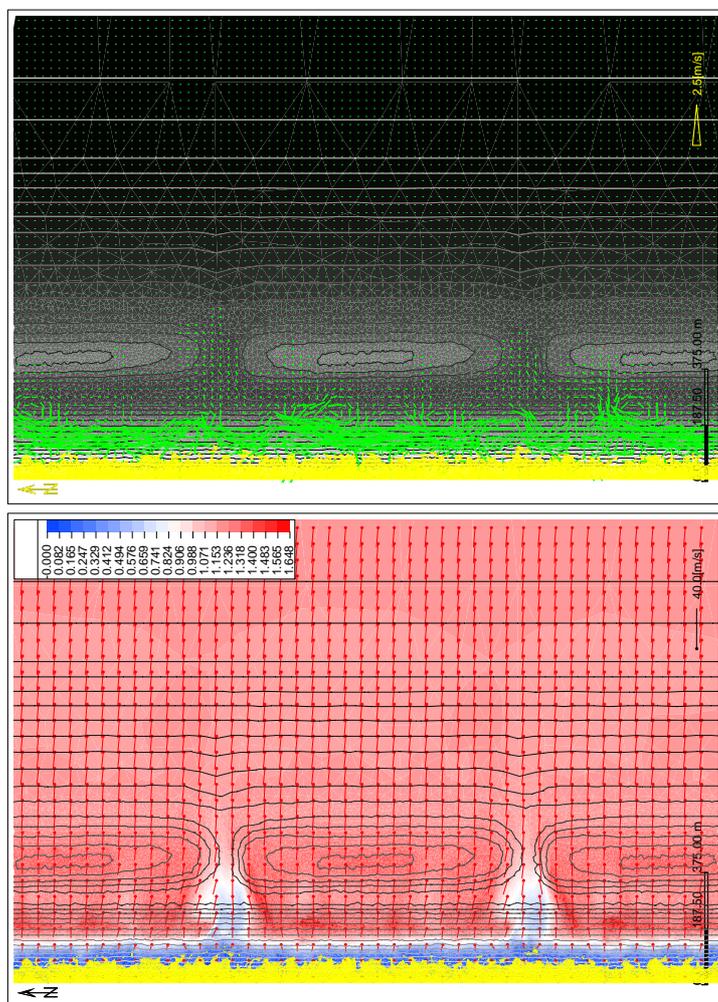


Abbildung 6.13: Wellenhöhen- und -richtungverteilung /
Tiefen- und Strömungsverteilung
in der idealisierten Topographie

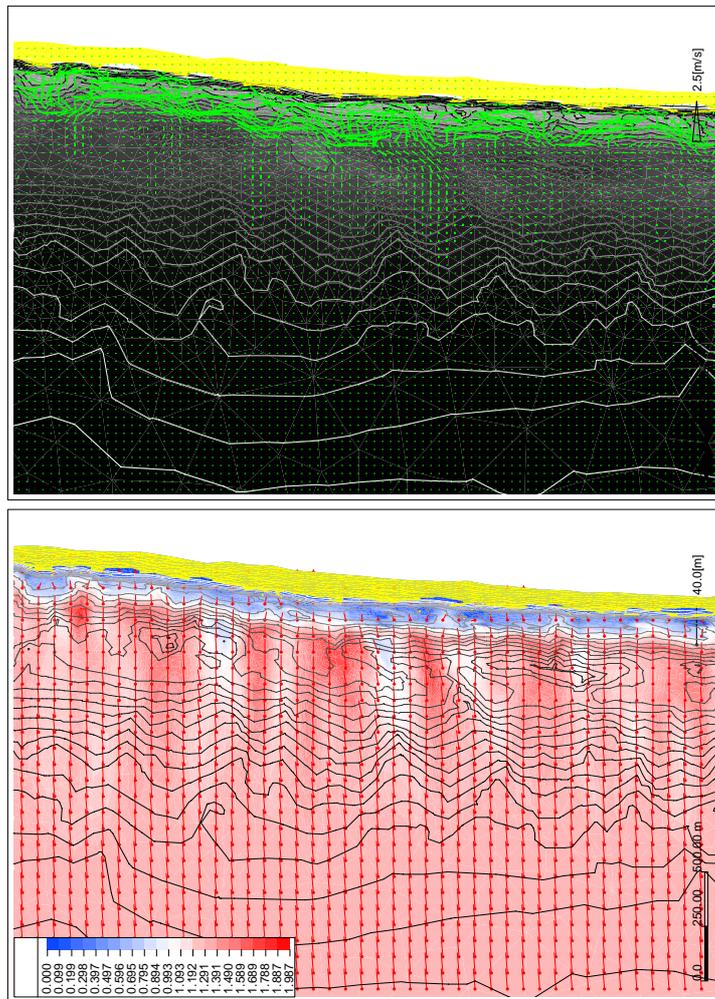


Abbildung 6.14: Wellenhöhen- und -richtungsverteilung / Tiefen- und Strömungsverteilung im Testfeld Rantum

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Ziel der vorgestellten Arbeit war die Entwicklung eines Simulationsmodells zur Beschreibung von Wellen- und Strömungsfeldern, wobei die Anwendbarkeit auf Küstengebiete mit großer Ausdehnung sichergestellt werden sollte. Besonderer Wert wurde auf eine (im Rahmen der Modellvereinfachungen) exakte Wiedergabe der Interaktion zwischen Seegang und Strömung gelegt. Die mathematischen Grundlagen hierfür und speziell die Beschreibung des Strömungsgeschehens wurden im Kapitel 2 dargelegt. Spezielles Augenmerk wurde hierbei auf die Darstellung der Modellvereinfachungen eines tiefenintegrierten Strömungsmodells sowie eines allgemeinen Wellenpotentials gelegt. Im Kapitel 3 ist es gelungen, eine mathematisch exakte und sehr einfache Formulierung für die Beschreibung der Ausbreitung monochromatischer Wellen zu entwickeln. Der formale Aufbau der Gleichungen zur Bestimmung der Wellenzahlvektoren ist dabei unabhängig vom Grad der betrachteten Effekte. Die Gleichungen haben dasselbe Aussehen, unabhängig davon, ob eine zugrundeliegende Strömung, Diffraktion oder ein schwach bis mittel geneigter Seegrund vorliegen. Es war möglich, die von YOO [47] entwickelte Dispersionsbeziehung für schwach bis mittel geneigten Boden ohne zusätzliche Annahmen und Vereinfachungen einfließen zu lassen und numerisch umzusetzen. Im Gegensatz hierzu hat YOO [47] diese zwar hergeleitet, konnte sie jedoch auf Grund seiner komplizierten Formulierung der Wellenzahlgleichungen nicht numerisch realisieren.

Die im Abschnitt 3.1 entwickelte neue Formulierung der Wellenzahlgleichungen erlaubt eine Bestimmung des Charakters der Gleichungen und eine physikalische Interpretation der auftretenden Terme. Es konnte eine direkte Kopplung der Gleichungen bei der numerischen Realisierung sichergestellt werden.

Innerhalb von Kapitel 3 wurden weitere physikalische Effekte bei der Interaktion von Seegang und Strömung in das entwickelte Simulationsmodell einbezogen. Hierbei wurde an Hand in der Literatur dargestellter Modellvorstellungen zum Wellenbrechen, zu turbulenten Erscheinungen und anderen Effekten, die Integration dieser in die vorgestellte Modellphilosophie dargelegt.

Neben der integralen Betrachtungsweise bei der Entwicklung von Modellgleichungen zur Beschreibung der Interaktion von Seegang und Strömung konnte auch bei der numerischen Approximation das Prinzip der ganzheitlichen Betrachtungsweise beibehalten werden. Es konnte gezeigt werden, daß sowohl für die Flachwassergleichungen als auch für die Wellengleichungen ein *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahren anwendbar ist. Dabei mußte eine Erweiterung des *streamline-upwinding*-PETROV-GALERKIN-Verfahrens auf vektorwertige Unbekannte vorgenommen werden. Es wurden Schrittweitensteuerungen in Zeitrichtung mit verschiedenen Integrationsverfahren implementiert, um dem dynamischen Verhalten der zu simulierenden Größen gerecht zu werden. Durch die Anwendung der Methode der Finiten Elemente ist eine flexible, den hydrodynamischen Gegebenheiten angepaßte Diskretisierung möglich. Auf Grund der direkten Kopplung der Modellgleichungen entstand ein stabiles und effizientes numerisches Modell.

An Hand verschiedener Testfälle, für die analytische Lösungen existieren, konnte nachgewiesen werden, daß sowohl die entwickelten Modellgleichungen als auch das numerische Verfahren, diese Lösungen sehr genau wiedergeben. Ausgehend von einer idealen Strandtopographie wurde das hydrodynamische Verhalten in einer natürlichen Topographie diskutiert. Dem Schwerpunkt dieser Arbeit entsprechend, mußte allerdings auf notwendige Verifikationen an Hand von Naturdaten verzichtet werden. Diese zum Teil großräumigen Simulationen haben gezeigt, daß die vorgenommene exemplarische Implementation unter praktischen Gesichtspunkten tauglich ist.

Da die Seegangs- und Strömungsverhältnisse und speziell deren Interaktion sehr komplex sind, hat das hier vorgestellte und entwickelte Modell nicht den Anspruch, die natürlichen Küstenprozesse exakt wiederzugeben. Vielmehr soll es ein Werkzeug sein, das zum immer besseren Verständnis dieser Prozesse beitragen und zur prognostischen Beurteilung von Eingriffen in die Natur dienen soll.

7.2 Zukünftige Erweiterungen

Das nun zur Verfügung stehende Modell kann eine Grundlage für weitere Entwicklungen sein. Dabei sind verschiedene Entwicklungsrichtungen vorstellbar. So kann die Formulierung des Seegangmodells ein Ausgangspunkt für die Entwicklung von spektralen

Seegangmodellen auf der Grundlage der Modellvorstellung einer Superposition linearer Wellen innerhalb eines Wellenspektrums sein. Hierzu sind Untersuchungen zur nicht-linearen Interaktion zwischen hochfrequenten und niederfrequenten Wellen sowie der spektralen Energiedissipation notwendig. Speziell die Wirkung des Wellenbrechens auf die Energieumwandlungen im Wellenspektrum sind nicht mehr mit klassischen Brechkriterien beschreibbar.

Die vorgestellten Modellgleichungen gelten nur für progressive Wellen. Eine Beschreibung von Wellenreflexionserscheinungen im Rahmen der Gleichungen ist nicht möglich. Wird jedoch vom Superpositionsprinzip zwischen einlaufenden und reflektierten Wellen ausgegangen, so ist es möglich, nicht mehr nur ein, sondern mehrere Wellenfelder zu betrachten. Zur Beschreibung der reflektierten Wellen wird eine neue Randbedingung an der reflektierenden Küstenlinie generiert. Der Einsatz dieser Modellvorstellung wird bei einer spektralen Erweiterung des Modells an Bedeutung gewinnen.

In Anlehnung an die vorgestellten Einbindungen weiterer physikalischer Effekte (wie Turbulenz, Wellenbrechen usw.) ist es notwendig, an Hand von Natur- und Laboruntersuchungen neue Modellvorstellungen einzubinden, die es ermöglichen, die Feinstruktur der küstennahen Strömung und der Dynamik in sehr flachen Küstengebieten wiederzugeben. Hierbei müssen jedoch immer die Gültigkeitsbereiche der Teilmodelle und des daraus entstandenen Gesamtmodells beachtet werden.

Im Rahmen des Wellenmodells ist es notwendig, effektivere numerische Approximationen der Diffraktionseffekte zu realisieren.

Speziell zum immer besseren Verständnis der küstennahen Strömung wird es notwendig sein, eine Erweiterung des Strömungsmodells auf ein Mehrschichtenmodell zur Beschreibung der Dreidimensionalität durchzuführen. Es wird jedoch nicht ausreichend sein, mit Hilfe eines solchen dreidimensionalen Strömungsmodells beispielsweise den *undertow* nur zu beschreiben. Vielmehr wird es dann auch notwendig sein, die Interaktion zwischen Strömung und Seegang neu zu betrachten.

Es wird eine Erweiterung des Modells um Transportvorgänge notwendig, um das Bild der Hydrodynamik im Küstenbereich zu vervollständigen. Dabei ist die exemplarische Implementation der Transportgleichungen in Form der Wellenamplitudengleichungen schon gegeben. Auch hier ist die Verwendung eines *streamline-upwinding-PETROV-GALERKIN*-Verfahrens naheliegend. Wesentliche Unterschiede ergeben sich in Abhängigkeit vom zu transportierenden Material, so zum Beispiel Salzkonzentrationen oder Sedimente.

Alle Erweiterungen dienen dazu, ein Werkzeug zu entwickeln, welches dazu beitragen kann, die physikalischen Vorgänge im Küstenbereich besser zu verstehen. Ein solches Modell kann als Entscheidungs- und Planungshilfe für Eingriffe des Menschen in die

Natur dienen. Es ermöglicht reproduzierbare Relativbetrachtungen von Zuständen im Küsteningenieurwesen durchzuführen.

Literaturverzeichnis

- [1] *Shore Protection Manual*. U.S. Army Coastal Engineering Research Center, Fort Belvoir, Va., 1984.
- [2] H. Arnold. Bericht über das Forschungsvorhaben "Damm-Versagen". Technical Report DFG Ho 808/10-1, Institut für Strömungsmechanik und elektr. Rechnen im Bauwesen, 1993.
- [3] J.A. Battjes. Refraction of water waves. *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE*, 94(WW4):437–451, 1968.
- [4] J.A. Battjes. A note on modelling of turbulence in the surf zone. In *Proc. Symp. Modelling Tech., ASCE*, pages 1050–1061, 1975.
- [5] J.A. Battjes and J.P.F.M. Janssen. Energy loss and set-up due to breaking of random waves. In *Proc. 16th Conf. Coastal Eng.*, pages 569–589, 1978.
- [6] J.W. Berkhoff. Mathematical models for simple harmonic linear waves, wave diffraction and refraction. Technical Report 163, Delft Hydraulics Laboratory, 1976.
- [7] A.J. Bowen. The generation of longshore currents on a plane beach. *J. Marine Res.*, 27:206–214, 1969.
- [8] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik, 20. Auflage*. Harry Deutsch, Thun und Frankfurt, 1981.
- [9] A.N. Brooks and Th.J.R. Hughes. Streamline upwind/petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, (32):199–259, 1982.
- [10] I. Christine, G.F. Griffiths, A.R. Mitchell, and O.C. Zienkiewicz. Finet element methods for second order differential equations with significant first derivatives. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10:1389–1396, 1976.

- [11] T.J. Chung. *Finite Elemente in der Strömungsmechanik*. Carl Hanser Verlag, München, 1982. Amerikanische Fassung 1977.
- [12] W.R. Dally, R.G. Dean, and R.A. Dalrymple. Wave height variation across beaches of arbitrary profile. *J. Geophysical Research*, 90(C6):11917–11927, 1985.
- [13] H. J. de Vriend. Compound 2-dh mathematical models in coastal morphology. *TOW-toegepast onderzoek waterstaat, Report on investigation*, R 1747 part 1, 1984.
- [14] J.-W. Elder. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, (5):544–560, 1959.
- [15] G. Engeln-Müllges and F. Reutter. *Numerische Mathematik für Ingenieure*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Zürich, 1985.
- [16] W.G. Gray. Some inadequacies of finite element models as simulators of two-dimensional circulation. *Advances in Water Resources*, (5):69–75, 1982.
- [17] S. Harris. *Field and model studies of nearshore circulation*. PhD thesis, University of Liverpool, 1967.
- [18] W.D. Hayes. Kinematic wave theory. In *Proc. Roy. Soc. London*, 320/A, pages 209–226, 1970.
- [19] J.C. Heinrich and O.C. Zienkiewicz. The finite element method and 'upwinding' techniques in the numerical solution of convection dominated flow problems. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, 1979.
- [20] K.P. Holz. *Mathematische Modelle Sylt*, volume 2. Abschlussbericht. Universität Hannover, Dezember 1990.
- [21] K.P. Holz. *Mathematische Modelle Sylt*, volume Abschlussbericht. Universität Hannover, Januar 1994.
- [22] K. Horikawa. *Nearshore Dynamics and Coastal Processes*. University of Tokyo Press, Tokyo, 1988.
- [23] N. Katopodes. Two-Dimensional Surges and Shocks in Open Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(6), 1984.
- [24] M. Kawahara and K. Kashiwama. Selective lumping Finite Element Method for nearshore current. *Int. J. for numerical Methods in Fluids*, 4:71–97, 1984.
- [25] J. T. Kirby. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. *J. Geoph. Res.*, (89):745–747, 1984.

- [26] J.L. Lee and H. Wang. evaluation of numerical models on wave-current interactions. In B.L.Edge, editor, *Coastal Engineering 1992*, pages 432–446, 1992.
- [27] M.S. Longuet-Higgins. Longshore currents generated by obliquely incident sea waves. *J. Geoph. Res.*, 75(33):203–248, 1970.
- [28] M.S. Longuet-Higgins. Longshore currents generated by obliquely incident sea waves, 2,. *Journal of Geophysical Research*, 75:6790–6801, 1970.
- [29] M.S. Longuet-Higgins and R.W. Stewart. Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 8:565–583, 1960.
- [30] M.S. Longuet-Higgins and R.W. Stewart. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. *Journal of Fluid Mechanics*, 10:529–549, 1961.
- [31] M.S. Longuet-Higgins and R.W. Stewart. Radiation stress and mass transport in gravity waves with application to „surf beat“. *Journal of Fluid Mechanics*, 13:481–504, 1962.
- [32] M.S. Longuet-Higgins and R.W. Stewart. Radiation stress in water waves, a physical discussion with applications. *Deep Sea Res.*, 11(4):529–569, 1964.
- [33] C.C. Mei. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, volume 1 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1989.
- [34] P. Milbradt and K.-P. Holz. Computer modelling of seas and coastal regions - modelling wave propagation in large areas. In P.W. Partidge, editor, *Computer Modelling of Seas and Coastal Regions*, pages 3–19. Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 1992.
- [35] H. Nishimura. Numerical simulation of nearshore circulation. In *Proc. 29th Japanese Conf. on Coastal Eng.*, pages 333–337, 1982.
- [36] E.K. Noda. Wave-induced Nearshore Circulation. *J. Geophys. Res.*, 79(27):4097–4106, 1974.
- [37] S. Ohnaka and A. Watanabe. Modelling of wave-current interaction and beach change. In *Proceedings of the twenty-second ICCE 1990, Delft*, pages 2443–2456, 1990.
- [38] D.H. Peregin. Interaction of water waves and currents. In C.-S. Yih, editor, *Advances in Applied Mechanics, Vol.16*, pages 9–117. Academic Press, New York, 1976.

- [39] O.M. Phillips. *The Applied Dynamics of the Upper Ocean*. University Press, Cambridge, 1977.
- [40] H.-H. Prüser. *Zur mathematischen Modellierung der Interaktion von Seegang und Strömung im flachen Wasser*. Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover, Bericht Nr. 31, Teil1, 1991.
- [41] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. R. Soc.(A)*, (186):123–164, 1895.
- [42] J.J. Stoker. *Water Waves*. Interscience Publishes, New York, 1957.
- [43] The SWAMP-Group. *Ocean wave modeling*. Plenum Pr., 1985.
- [44] E.B. Thornton. Variation of longshore current across the surf zone. In *Proc. 12th Coastal Eng. Conf. ASCE*, pages 291–308, 1970.
- [45] A. Watanabe and K. Maruyama. Numerical modeling of nearshore wave field under combined refraction, diffraction and breaking. *Coastal Eng. in Japan*, 29:19–39, 1986.
- [46] J.R. Weggel. Maximum Breaker Height. *Journal of Waterways*, 98, 1972.
- [47] D. Yoo. *Mathematical Modelling of wave-current interacted flow in shallow waters*. PhD thesis, University of Manchester, 1986.
- [48] S.B. Yoon and P.L.-F. Liu. Wave and current interactions in shallow water. In *Proc. 20th Int. Conf. Coastal Eng.*, pages 1682–1697, 1986.
- [49] T. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. Springer Verlag, 4 edition, 1992.

Abbildungsverzeichnis

4.1	Wattstrategien	59
5.1	streamline-upwinding-PG-Verfahren	71
5.2	Bestimmung der Dreiecksausdehnung	73
5.3	Eckformen an geschlossenen Rändern	86
6.1	Gitternetze	96
6.2	Berechnete Wellenanlaufwinkel	97
6.3	Vergleich der Lösungen mit unterschiedlichen Gitternetzweiten	98
6.4	Berechneter Shoalingeffekt	98
6.5	Wellenhöhenverteilung mit Wellenbrechen	100
6.6	Berechnete Diffraktion	101
6.7	Wellenrichtungs- und -amplitudenverteilung in einer idealisierten Topographie	102
6.8	Ausbreitung einer einzelnen Welle	104
6.9	Ausbreitung einer Schwallwelle	105
6.10	Ebbströmung an der Südspitze von Sylt	107
6.11	Berechneter wave set-up / set-down	109
6.12	Simulationsergebnisse für schrägen Wellenanlauf	113

6.13 Wellenhöhen- und -richtungsverteilung / Tiefen- und Strömungsverteilung in der idealisierten Topographie	114
6.14 Wellenhöhen- und -richtungsverteilung / Tiefen- und Strömungsverteilung im Testfeld Rantum	115