

# Finite Elemente Approximation auf der Basis beliebiger Zellen

P. Milbradt, R. Damrath, A. Schwöppe

*Institut für Bauinformatik  
Universität Hannover*

Zum Gedenken an unseren Institutsleiter und Kollegen Prof. Dr.-Ing. Rudolf Damrath.

## 1 Einleitung

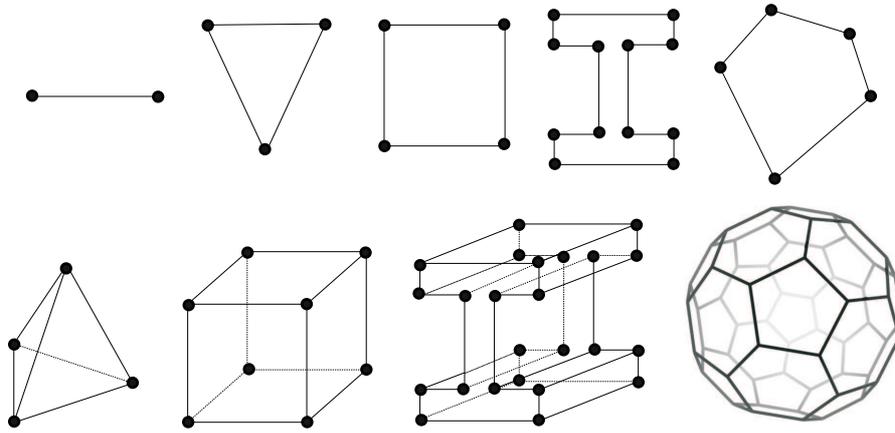
Die Methode der Finiten Elemente ist ein flexibles numerisches Verfahren sowohl zur Interpolation diskret verteilter Daten als auch zur numerischen Approximation von Lösungen partieller Differentialgleichungen. Die Grundlage dieser Methode ist die Formulierung geeigneter Finiten Elemente und Elementzerlegungen. Ein Finites Element kann als ein Tripel  $(K, P, \Sigma)$  aufgefasst werden, wobei  $K$  eine kompakte nichtleere Menge,  $P$  ein auf  $K$  definierter linearer Raum reellwertiger Funktionen und  $\Sigma$  die Menge der Freiheitsgrade darstellt. Vielfach verwendete Finite Elemente basieren auf einfachen Geometrien, auf Drei- oder Vierecken im zweidimensionalen Raum und Tetra- oder Hexaedern im dreidimensionalen Raum. Die Erweiterung der Elementgeometrien auf  $n$ -dimensionale konvexe und nichtkonvexe Polyeder und auf diesen basierenden parametrischen Zellen ermöglicht eine höhere Flexibilität bei der Geometriemodellierung der Lösungsgebiete. Konvexe Polyeder in Verbindung mit einem einfachen lokalen Koordinatensystem, den natürlichen Elementkoordinaten, lassen auf allgemeine Art die Formulierung von Ansatz- und Testfunktionen auf konvexen Polyedern zu. Mit den dann zur Verfügung stehenden Polyedern und Interpolationsfunktionen auf diesen, ist es möglich, parametrische Finite Zellelemente zu formulieren. Im Rahmen erster Anwendungen wird die Tragfähigkeit dieses Konzeptes aufgezeigt.

## 2 Geometriebeschreibung

Die geometrische Basis der Finiten Elemente wird durch kompakte nichtleere Mengen im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  gebildet. Typische Vertreter kompakter Mengen im euklidischen Raum sind solche, die abgeschlossen und beschränkt sind. Die einfachsten kompakten Mengen sind abgeschlossene Intervalle im  $\mathbb{R}^1$ , Drei- und Vierecke im  $\mathbb{R}^2$  sowie Tetra- oder Hexaedern im  $\mathbb{R}^3$ . Die Verallgemeinerung der beschriebenen geometrischen Elemente bilden konvexe Polyeder.

### 2.1 Konvexe Polyeder

Konvexe Polyeder  $Z$  im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  können auf verschiedene äquivalente Arten beschrieben werden. Die Definition eines konvexen Polyeders über die konvexe Hülle vorgegebener Bezugspunkte, im weiteren als Ecken  $E = \{e^1, e^2, \dots, e^N\}$  bezeichnet, bildet



**Bild 1:** Polyeder in verschiedenen Dimensionen

häufig die Grundlage für entsprechende Konstruktionsvorschriften bzw. -algorithmen. Im Rahmen der Formulierung Finiter Elemente erscheint die Beschreibung konvexer Polyeder über das Minkowsky-Produkt

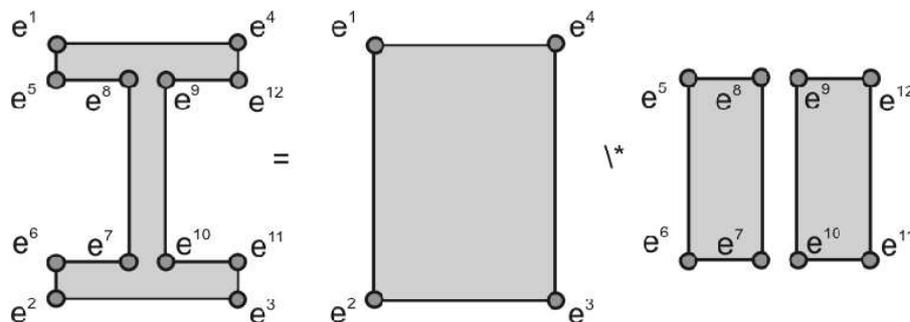
$$Z := \{p : p = \lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \dots + \lambda_N e^N, \lambda_i \geq 0 \wedge \sum_i \lambda_i = 1\} \quad (1)$$

geeigneter.

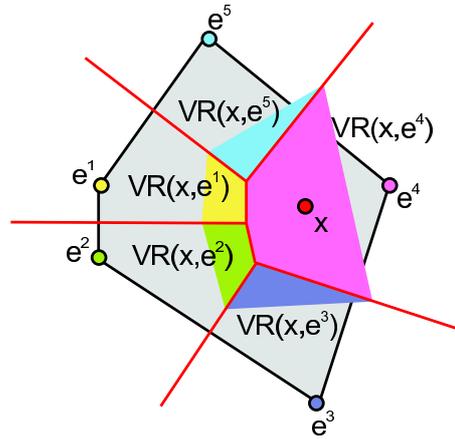
Die größte Zahl  $m$ , für die es  $m$  linear unabhängige Punkte in der Menge der Ecken  $E$  gibt, heißt Dimension des konvexen Polyeders  $Z$ . Ein  $m$ -dimensionales konvexes Polyeder hat höchstens endlich viele Seiten und jede Seite ist wieder ein konvexes Polyeder. Die  $(m - 1)$ -dimensionalen Seiten von  $Z$  werden Facetten, die 1-dimensionalen Seiten Kanten und die 0-dimensionalen Seiten Ecken genannt (siehe Bild 1).

Die Klasse der betrachteten Geometrien lässt sich auf spezielle nicht konvexe Polyeder erweitern, wenn diese über regularisierte Mengenoperationen [1] aus der konvexen Hülle der Ecken und konvexen Subpolyedern konstruiert werden können. Konvexe Subpolyeder beschreiben die Punkte des konvexen Polyeders, die im nichtkonvexen Polyeder nicht enthalten sind (siehe Bild 2).

Wesentlich für die verallgemeinerte Behandlung konvexer und nichtkonvexer Polyeder als geometrische Basis Finiter Elemente ist eine einheitliche Beschreibung aller Punkte eines Finiten Elements. Dies wird durch eine einheitliche Formulierung von Elementkoordinaten erreicht.



**Bild 2:** Konstruktion nichtkonvexer Polyeder



**Bild 3:** Voronoi-Zerlegung des konvexen Polyeders und Subregionen der Ecken bezüglich  $x$

## 2.2 Natürliche Elementkoordinaten

Die Formulierung eines lokalen Koordinatensystems ermöglicht eine einheitliche Elementformulierung in der Methode der Finiten Elemente. Die Beschreibung des konvexen Polyeders  $Z$  durch das Minkowsky-Produkt (1) seiner Ecken  $E$  legen es nahe, die Faktoren  $\lambda_i$  der Linearkombination als Koordinaten zu verwenden. Besitzt ein  $m$ -dimensionales konvexes Polyeder genau  $m + 1$  linear unabhängige Ecken, sind die Faktoren eindeutig und heißen baryzentrische Koordinaten. Besteht ein konvexes Polyeder aus mehr als  $m + 1$  Ecken, sind die Faktoren nicht eindeutig. Werden die durch Sibson [2] eingeführten natürlichen Nachbarschaftskordinaten auf das konvexe Polyeder eingeschränkt, erhält man natürliche Elementkoordinaten, welche mit den Eckpunkten des konvexen Polyeders in Beziehung stehen.

Voraussetzung für die Bestimmung der natürlichen Elementkoordinaten eines Punktes  $x$  bezüglich des Polyeders  $Z$  ist die Bestimmung von Voronoi-Zerlegungen zweiter Ordnung bezüglich der Ecken  $e^i$  und des Punktes  $x$  (siehe Bild 3).

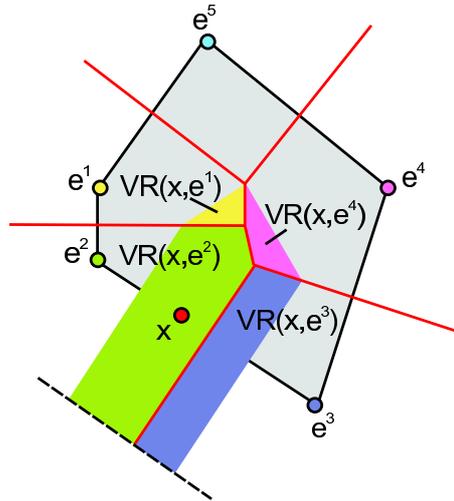
Zunächst wird die Voronoi-Zerlegung erster Ordnung eines konvexen Polyeders bezüglich seiner Ecken  $e^i$  bestimmt. Jeder Ecke des konvexen Polyeders wird eine Voronoi-Region zugeordnet. Die Voronoi-Region einer Ecke  $e^i$  ist die Menge von Punkten, deren Abstand zur Ecke  $e^i$  kleiner oder gleich ihrem Abstand zu den übrigen Ecken  $e^j$  ist,

$$\text{VR}(e^i) := \{p \in \mathbb{R}^n : d(p, e^i) \leq d(p, e^j) \quad \forall j \neq i\}. \quad (2)$$

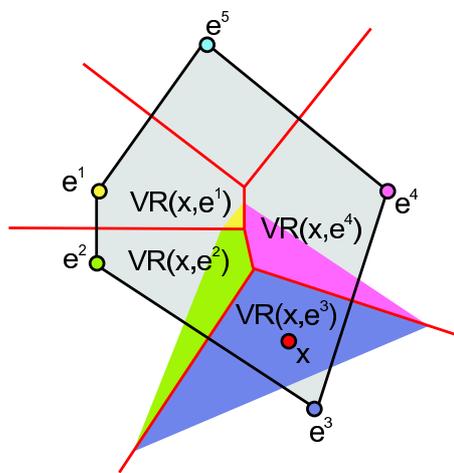
Die Voronoi-Region zweiter Ordnung eines konvexen Polyeders wird bezüglich seiner Ecken und einem Punkt  $x$  des konvexen Polyeders bestimmt. Eine Voronoi-Region zweiter Ordnung ist die Menge von Punkten, deren Abstand zum Punkt  $x$  kleiner oder gleich ihrem Abstand zu einer Ecke  $e^i$  ist, wenn ihr Abstand zu dieser Ecke kleiner oder gleich ihrem Abstand zu den übrigen Ecken  $e^j$  ist,

$$\text{VR}(x, e^i) := \{p \in \mathbb{R}^n : d(p, x) \leq d(p, e^i) \leq d(p, e^j) \quad \forall j \neq i\}. \quad (3)$$

Die natürlichen Elementkoordinaten des Punktes  $x$  bezüglich der Ecke  $e^i$  werden über die Voronoi-Regionen zweiter Ordnung bestimmt (siehe Bild 3). Jeder Voronoi-Region erster oder zweiter Ordnung lässt sich ein Lebesgue-Maß  $\mu(\text{VR}(e^i))$  bzw.  $\mu(\text{VR}(x, e^i))$  zuordnen [3]. Dieses Maß entspricht im 2-dimensionalen Raum dem euklidischen Flächeninhalt. Das Verhältnis des Maßes der Voronoi-Region zweiter Ordnung einer Ecke  $e^i$  und dem Punkt  $x$  zum Maße der



**Bild 4:** Bestimmung der natürlichen Elementkoordinaten auf der Facette



**Bild 5:** Einfluss der Koordinaten

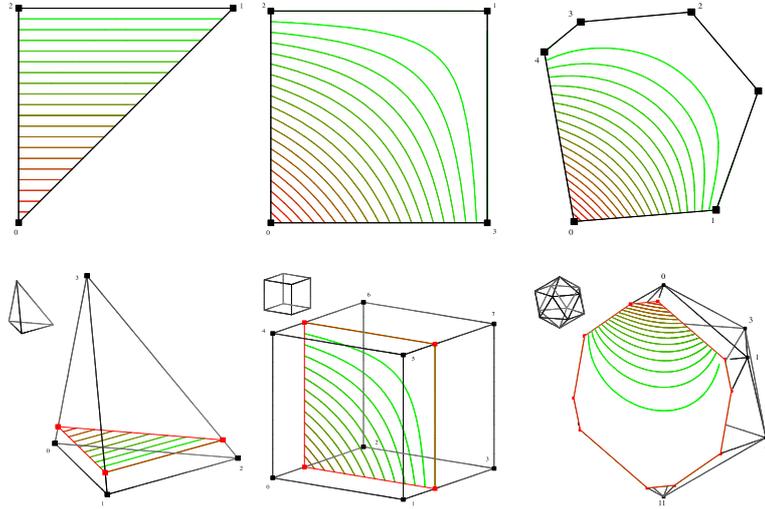
Voronoi-Regionen erster Ordnung des Punktes  $x$  bezüglich aller Ecken des konvexen Polyeders ergeben die eindeutigen natürlichen Elementkoordinaten,

$$\lambda_i(x, e_i) := \frac{\mu(\text{VR}(x, e^i))}{\mu(\text{VR}(x))}. \quad (4)$$

Liegt der zu betrachtende Punkt  $x$  außerhalb des Polyeders, so existiert keine Darstellung in natürlichen Elementkoordinaten. Liegt der Punkt  $x$  genau auf einer Facette des Polyeders, entstehen Voronoi-Regionen zweiter Ordnung mit unendlichen Maßen. Durch Grenzwertbetrachtungen kann gezeigt werden [3], dass die Berechnung der natürlichen Koordinaten allein von den Ecken der Facette abhängen und somit die Berechnung auf das konvexe Polyeder der Facette beschränkt ist.

Infolge der Konstruktion der lokalen Elementkoordinaten eines konvexen Polyeders mittels der Voronoi-Regionen zweiter Ordnung sind die lokalen Elementkoordinaten eines Punktes  $x$  nicht zwangsläufig von jeder Ecke des Polyeders abhängig. Ist die Voronoi-Region zweiter Ordnung des Punktes  $x$  und einer Ecke leer, so sagt man, dass der Punkt  $x$  und die Ecke nicht benachbart sind. Die Koordinate des Punktes bezüglich der Ecke hat den Wert null.

Die natürlichen Elementkoordinaten sind äquivalent zu den baryzentrischen Koordinaten der



**Bild 6:** Verlauf der natürlichen Elementkoordinaten in 2D- und 3D- konvexen Polyedern

Simplexe und haben im Inneren von Quadraten einen bilinearen Verlauf. Die natürlichen Elementkoordinaten beinhalten somit die bekannten lokalen Koordinatensysteme klassischer Finite Elemente.

Die Konstruktion der natürlichen Elementkoordinaten ist zunächst auf konvexe Polyeder beschränkt. Bei der Übertragung auf nichtkonvexe Polyeder werden die auftretenden Nachbarschaftsbeziehungen modifiziert [4].

### 2.3 Parametrische Zellen

Die polyedrischen Elementgeometrien sind eben berandet. Als Polyeder beschreibbare Untersuchungsgebiete sind so exakt zerlegbar. Um auch Untersuchungsgebiete mit gekrümmten Rändern betrachten zu können, werden parametrische Zellen als geometrischer Träger Finite Elemente eingeführt.

Die hier verwendeten parametrischen Zellen sind spezielle topologische Zellen [3]. Sie werden beschrieben durch konvexe oder nichtkonvexe Polyeder und einer auf diesen definierten Abbildung  $F$  (einem Homöomorphismus). Die Abbildung wird über Formfunktionen für die Seiten (Ecken, Kanten, Facetten) in Abhängigkeit von den natürlichen Elementkoordinaten  $\lambda_i$  der Polyeder beschrieben

$$x = \sum_{\text{Ecken}} N_j(\lambda(r)) + \sum_{\text{Kanten}} N_{ij}(\lambda(r)) + \sum_{\text{Seiten}} N_{ij\dots k}(\lambda(r)). \quad (5)$$

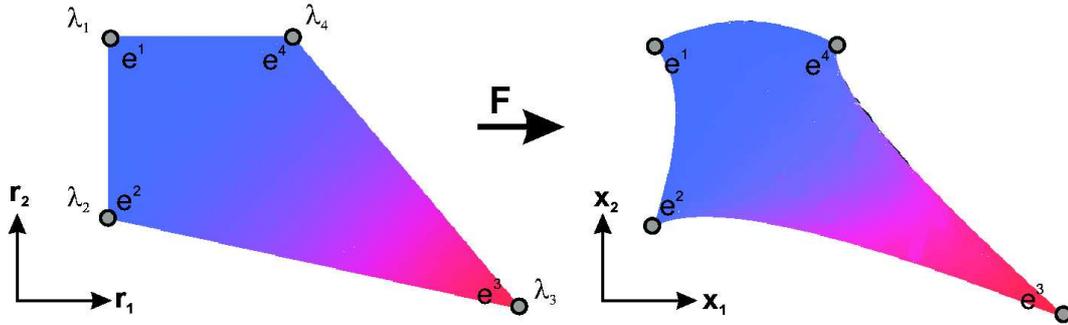
Im Gegensatz zu den klassischen parametrischen Elementen, bei denen das Urbild das Einheits-element ist, werden bei den parametrischen Zellen nicht die Ecken transformiert, sondern die Facetten der Polyeder (siehe Bild 7).

Die Abbildungsvorschrift wird auf den Facetten des Polyeders formuliert:

$$x = \sum_{\text{Kanten}} N_{ij}(\lambda(r)) + \sum_{\text{Seiten}} N_{ij\dots k}(\lambda(r)). \quad (6)$$

Als Formfunktion auf den Kanten bieten sich Funktionen der Art

$$N_{ij} := (\lambda_i(r) + \lambda_j(r))^l \cdot f_{ij}(s(r)) \quad (7)$$



**Bild 7:** parametrische Zelle

mit

$$s_m := \frac{\lambda_m(r)}{\lambda_i(r) + \lambda_j(r)}, \quad m \in (i, j), \quad (8)$$

an. Diese Formfunktionen haben die Eigenschaft, dass ihr Einfluss gleichmäßig über der Zelle abnimmt. Mit der Potenz  $l$  wird das Abklingen der Formfunktion im inneren der Zelle gesteuert. Wird eine Kante der Zelle mit den Ecken  $e^i$  und  $e^j$  betrachtet, so kann der Verlauf der Kante durch die Funktion  $f_{ij}(s)$  in Abhängigkeit von den natürlichen Elementkoordinaten der Kante beschrieben werden. Für jeden Punkt auf der betrachteten Kante gilt  $\lambda_i + \lambda_j = 1$  sowie  $s_i = \lambda_i$  und  $s_j = \lambda_j$ . Die Formfunktion  $N_{ij}(\lambda(r))$  liefert daher für jeden Punkt der betrachteten Kante die Abweichung des vorgegebenen Kantenverlaufes vom gradlinigen Verlauf der Sehnenkante. Sie liefert für jeden Punkt auf einer anderen Kante den Nullvektor und besitzt einen glatten Verlauf über das Element.

Als Formfunktion auf den Seitenflächen werden Funktionen der Form

$$N_{ij\dots k} := (\lambda_i(r) + \lambda_j(r) + \dots + \lambda_k(r))^l f_{ij\dots k}(s(r)) - (N_{ij}(\lambda(r)) + \dots + N_{ki}(\lambda(r))) \quad (9)$$

mit

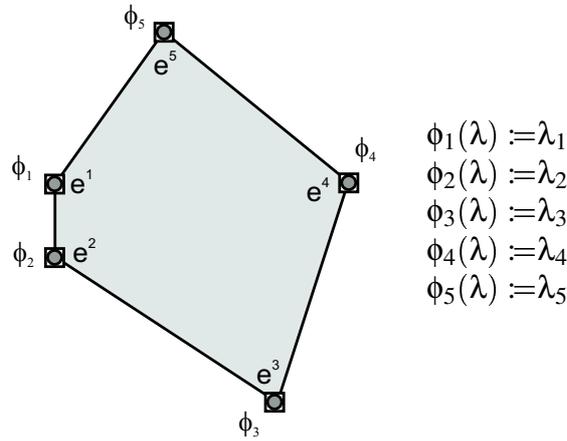
$$s_m := \frac{\lambda_m(r)}{\lambda_i(r) + \lambda_j(r) + \dots + \lambda_k(r)}, \quad m \in (i, j, \dots, k), \quad (10)$$

verwendet.

Betrachtet wird eine ebene Seite der Zelle mit den Ecken  $e^i, e^j, \dots, e^k$  und den Kanten  $(e^i, e^j), \dots, (e^i, e^k)$ . Der Verlauf der Seite wird durch die Funktion  $f_{i,j,\dots,k}(s)$  in Abhängigkeit von den natürlichen Elementkoordinaten der Seite festgelegt. Für jeden Punkt der betrachteten Seite gilt  $\lambda_i + \lambda_j + \dots + \lambda_k = 1$  sowie  $s_i = \lambda_i$  bis  $s_k = \lambda_k$ . Die Formfunktion  $N_{ij\dots k}(\lambda(r))$  liefert daher für jeden Punkt der betrachteten Seite die Abweichung des vorgegebenen Seitenverlaufes vom Verlauf, der sich aus den Formfunktionen für die Kanten der Seite ergibt. Sie liefert für jeden Punkt auf einer anderen Seite den Nullvektor und besitzt einen glatten Verlauf über das Element. Werden für die Abbildung der Zelle Formfunktionen für Kanten und Seiten verwendet, so besitzen die Seiten des Elements die vorgegebenen Seitenverläufe.

### 3 Ansatzfunktionen

Die grundlegende Idee der Finiten-Element-Methode ist es, durch einfache Ansatzfunktionen mit noch unbekanntem Parametern für Teilgebiete das Gesamtverhalten von komplexen Aufgabenstellungen zu beschreiben. Die Lösung der Differentialgleichung kann dann auf die Lösung eines algebraischen Gleichungssystems für die unbekanntem Parameter überführt werden.



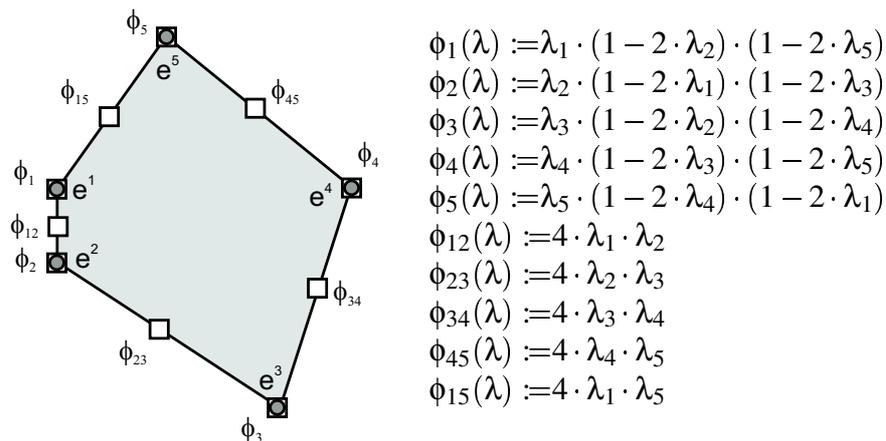
**Bild 8:** Lagrangesche Ansatzfunktionen – kantenlinearer Ansatz

Die natürlichen Elementkoordinaten erlauben es, Ansatzfunktionen auf Polyedern bzw. parametrischen Zellen generalisiert zu formulieren. Im Weiteren wird auf die Definition von kantenorientierten Ansatzfunktionen eingegangen.

Eine mögliche Art der Definition von Ansatzfunktionen  $\phi_i$  stellen die Lagrangeschen Ansatzfunktionen dar. Sie werden über die natürlichen Elementkoordinaten für die konvexen Polyeder bzw. parametrischen Zellen formuliert. Für kantenlineare Ansätze besteht hierbei die Ansatzfunktion ausschließlich aus der natürlichen Elementkoordinate des zugehörigen Eckknotens (siehe Bild 8).

Bei kantenquadratischen Ansätzen besteht die Ansatzfunktion für den mittleren Freiheitsgrad einer Seite aus einem Vorfaktor und den beiden natürlichen Elementkoordinaten der jeweiligen Ecken (siehe Bild 9). Damit enthält die Ansatzfunktion einer Ecke die natürlichen Elementkoordinaten der Eckpunkte aller abgehenden Kanten.

Die vorgestellten Ansatzfunktionen ermöglichen eine  $c^0$ -stetige Interpolation auf Zerlegungen, bestehend aus Polyedern und parametrischen Zellen, und bilden die Basis für Finite Element Approximationen.



**Bild 9:** Lagrangesche Ansatzfunktionen – kantenquadratischer Ansatz

## 4 Finite Element Approximation

Unter der Finiten Element Approximation versteht man die numerische Näherung der unbekannt Lösung  $u(x)$  einer Gleichung

$$F(u) = 0. \quad (11)$$

Im Weiteren werden Randwert- und Rand-Anfangswert-Aufgaben betrachtet, wobei man unter der Gleichung (11) im Allgemeinen ein System partieller Differentialgleichungen mit zugehörigen Randbedingungen versteht.

Die Grundidee der Methode besteht darin, die unbekannt Lösung  $u(x)$  nicht im unendlich-dimensionalen Raum aller Funktionen zu suchen, sondern einen endlich-dimensionalen Unterraum zu wählen, in dem dann die bestmögliche Lösung  $\hat{u}(x)$  gesucht wird. Der endlich-dimensionale Unterraum wird von endlich vielen Ansatzfunktionen  $\phi_i$  aufgespannt, so dass die Approximation der unbekannt Lösung die Form

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \quad (12)$$

hat. Setzt man die Approximation  $\hat{u}(x)$  der Lösung in die zu lösende Gleichung ein, so wird diese im Allgemeinen nicht genau erfüllt. Die auftretende Differenz wird als Defekt oder Residuum

$$\varepsilon = F(\hat{u}) \quad (13)$$

bezeichnet. Um eine bestmögliche Approximation zu erhalten, wird der Defekt minimiert. Das Standard-Galerkin-Verfahren geht von der Forderung aus, dass der Defekt nicht im endlich-dimensionalen Teilraum der Approximation liegen darf, sondern zu diesem orthogonal ist. Das heißt, dass der Defekt zu allen Ansatzfunktionen orthogonal sein muss:

$$\int_{\Omega} \phi_i \varepsilon = 0. \quad (14)$$

Das hieraus entstehende Gleichungssystem liefert die Koeffizienten  $c_i$  aus (12).

An zwei Beispielen aus der Mechanik und Strömungsmechanik sollen erste Ergebnisse vorgestellt werden.

## 5 Numerische Beispiele

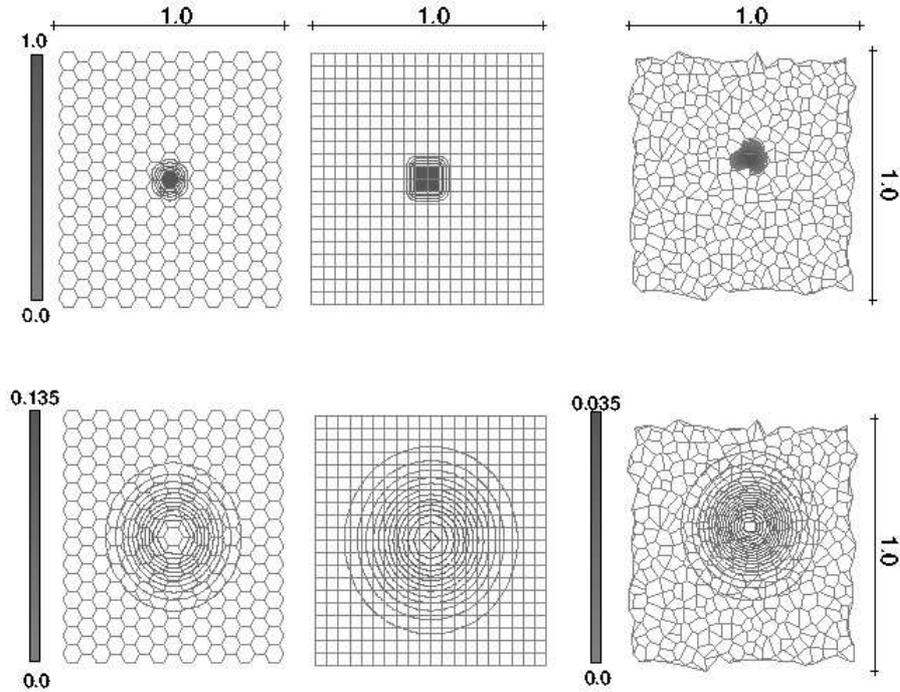
### 5.1 Diffusionsgleichung

Zunächst soll die numerische Approximation einer zweidimensionalen Diffusionsgleichung mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen vorgestellt werden,

$$\frac{\partial c(x, y, t)}{\partial t} - k \nabla^2 c(x, y) = 0. \quad (15)$$

Das Standard-Galerkin-Verfahren für die örtliche Approximation und des impliziten Euler-Verfahrens für die zeitliche Approximation liefern ein Gleichungssystem der Form

$$(\mathbf{M} - \mathbf{D}) \hat{u}^{t+dt} = \mathbf{M} \hat{u}^t, \quad (16)$$



**Bild 10:** Approximationen der Lösung einer 2-dimensionalen Diffusionsgleichung

wobei  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix und  $\mathbf{D}$  die zugehörige Diffusionsmatrix des Problems sind.

Als Anfangsbedingung wurde in der Mitte des Untersuchungsgebietes eine Stoffkonzentration injiziert und deren Ausbreitung berechnet.

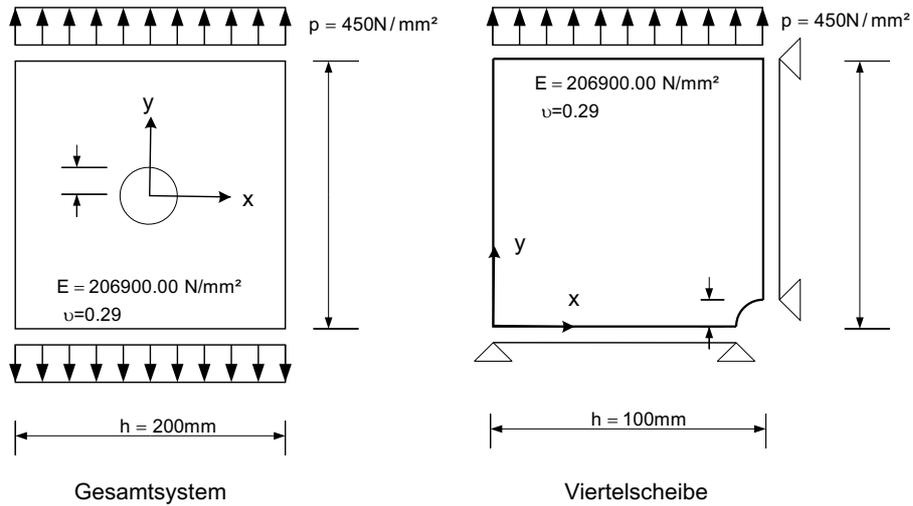
Im Bild 10 sind die verwendeten Zerlegungen und in der oberen Reihe die zugehörigen Anfangsbedingungen dargestellt. Neben den beiden regulären Zerlegungen auf der Basis von Sech- und Vierecken wurde für die dritte Zerlegung die Voronoi-Zerlegung einer zufällig verteilten Punktemenge gewählt. Die Finite Element Approximation auf allen drei Zerlegungen generiert die zu erwartende Verteilung.

## 5.2 Mechanische Systeme

In einem weiteren Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Mechanik sollen die Verschiebungen für eine gelochte Scheibe unter Zugbeanspruchung untersucht werden. Es wird ein elastisches Materialverhalten angenommen. Aufgrund der doppelten Symmetrie der Geometrie des Gesamtsystems muss die Diskretisierung lediglich für eine Viertelscheibe erfolgen. Die aus der Symmetrie bedingten Randbedingungen an der Viertelscheibe ergeben sich zu  $u(0, y) = 0$  und  $v(x, 0) = 0$ . Bild 11 zeigt die Abmessungen und die Randbedingungen des Gesamtsystems und des zu untersuchenden Viertelsystems.

Als Scheibe werden ebene Bauteile bezeichnet, deren Dicke klein gegenüber den Abmessungen in der Ebene ist und welche nur durch Kräfte in der Ebene belastet werden. Die Berechnungen werden auf der Grundlage der linearen Elastizitätstheorie durchgeführt. Die kinematische Beziehung lässt sich als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (17)$$



**Bild 11:** Gesamtsystem und Viertelsystem

formulieren, wobei  $\mathbf{L}$  die so genannte Differentialoperatormatrix ist. Das Elastizitätsgesetz ergibt sich aus

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (18)$$

mit der Materialmatrix  $\mathbf{C}$  für den ebenen Verzerrungszustand,

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

wobei  $\nu$  die Querkontraktionszahl und  $E$  das E-Modul darstellt.

Mit den Oberflächenlasten  $t$  und den Volumenkräften  $f$  ergibt sich die schwache Form des Gleichgewichtes zu

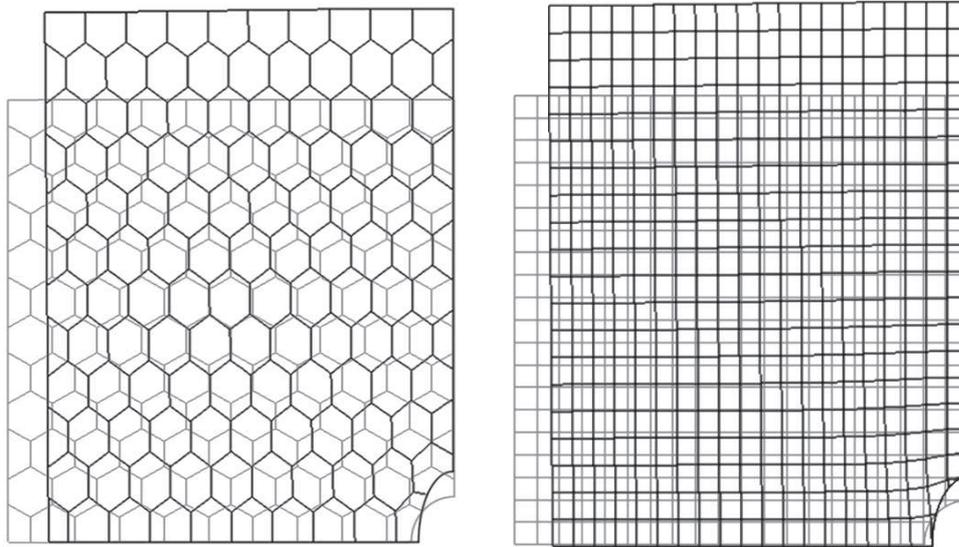
$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}\mathbf{v}]^T \mathbf{C} [\mathbf{L}\mathbf{u}] d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \quad (20)$$

In Bild 12 sind die Verschiebungen für zwei unterschiedliche Zerlegungen dargestellt. Die Ergebnisse entsprechen im Wesentlichen den aus der Literatur bekannten Lösungen [5].

Die Berechnungen wurden mit kantenquadratischen Ansatzfunktionen zweiter Ordnung durchgeführt. Das Berechnungsnetz bestand aus einem regulären Rechtecknetz mit 1273 Freiheitsgraden und aus einem quasiregulärem Sechsecknetz mit 627 Freiheitsgraden. Trotz geringerer Anzahl von Freiheitsgraden liefert das quasireguläre Sechsecknetz sowohl in den maximalen Verschiebungen als auch bei den Verschiebungen am Lochrand eine bessere Approximation.

## 6 Zusammenfassung

Es wurden generalisierte Finite Elemente vorgestellt, deren Basis allgemeine konvexe und nicht-konvexe Polyeder sind. Durch die Definition einer Abbildung auf diesen konnten im Weiteren



**Bild 12:** Verschiebungen zweier unterschiedlichen Zerlegungen, hundertfach überhöht dargestellt

parametrische Zellen eingeführt werden. Durch die Einführung der natürlichen Elementkoordinaten auf Polyedern und parametrischen Zellen konnte eine generalisierte Formulierung von Form- und Ansatzfunktionen erreicht werden. Somit eignen sich diese Finiten Elemente sowohl zur Interpolation als auch zur Approximation von Lösungen partieller Differentialgleichungen. Am Beispiel der 2-dimensionalen Diffusionsgleichung und einem Benchmark-Problem „Scheibe mit Loch“ konnte die Tragfähigkeit des vorgestellten Konzeptes aufgezeigt werden.

## Literatur

- [1] ABRAMOWSKI, S. ; MÜLLER, H.: *Geometrisches Modellieren*. BI-Wissenschaftsverlag, 1991
- [2] SIBSON, R.: A vector identity for the Dirichlet tessellation. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* Bd. 87, 1980, S. 151–155
- [3] MILBRADT, P.: *Algorithmische Geometrie in der Bauinformatik*. – Habilitationsschrift, Universität Hannover, 2001
- [4] SCHWÖPPE, A. ; MILBRADT, P.: A Class of Convex, Polygonal Bounded Finite Elements. In: *Tagungsband WCCM V*. Wien, 2002
- [5] STEIN, E.: *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. John Wiley & Sons Ltd., 2002
- [6] BOWYER, A.: Computer Dirichlet tessellations. In: *The Computer Journal* 24 (1981), Nr. 2, S. 162–166
- [7] FARIN, G.: Surfaces over Dirichlet tessellations. In: *Computer Aided Geometric Design* 7 (1990), Nr. 1-4, S. 281–292
- [8] MILBRADT, P. ; SCHWÖPPE, A.: Finite Element Approximation auf der Basis geometrischer Zellen. In: *Tagungsband IKM*. Weimar, 2003

- [9] SCHIERBAUM, J. ; SCHWÖPPE, A.: Ansatzfunktionen höherer Ordnung für Finite konvexe Zellen. In: *Forum Bauinformatik 2003*, Shaker-Verlag Aachen, 2003
- [10] WATSON, D. F.: Computing the  $n$ -dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes. In: *The Computer Journal* 24 (1981), Nr. 2, S. 167–172