Über das asymptotische Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Nachwirkung

Diplomarbeit

Humboldt - Universität zu Berlin

Sektion Mathematik

Bereich Analysis

eingereicht von Peter Milbradt
geb. am 21.06.1963 **in** Berlin

Betreuer: Dr. Klaus Morgenthal

Berlin, den 25.06.1990

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Differentialgleichungen

$$x''(t) = a(t)x'(t) - \int_0^\infty x(t-s)\,dr(t,s) \qquad (-\infty<A\le t) \qquad (1=)$$

sowie die Ungleichungen (1≥) und (1≤) betrachtet, die man aus (1=) erhält, wenn man "=" durch "≥" bzw. "≤" ersetzt.
Die Funktion $a(t)$ sei auf $[A,\infty)$ reellwertig, stetig und lokal summierbar. Der reellwertige Kern $r(t,s)$ sei definiert für $A \le t$ und $0 \le s$. Es sei $r(t,0) \equiv 0$ für $t \le A$, und in jedem $t \ge A$ sei $r(t,s)$ monoton wachsend in s. Außerdem möge eine auf $[A,\infty)$ stetige Funktion $\sigma(t)$ existieren, so daß für $A \le t$ und $\sigma(t) \le s$ gilt: $r(t,s) \equiv r(t,\sigma(t))$, und $r(t,\sigma(t))$ ist stetig für alle $t > A$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\sigma(t) > 0$ für $A \le t$. Schließlich wird noch gefordert, daß gilt:

$$\lim_{\vartheta\to t} \int_0^{\sigma(t)+1} |r(\vartheta,s) - r(t,s)|\,ds = 0 \qquad \text{für } t \ge A \quad \text{und}$$

$$\lim_{t\to\infty} (t-\sigma(t)) = \infty \quad .$$

Auf Grund der Existenz einer stetigen Funktion $\sigma(t)$ reduziert sich das Integral in (1=) auf ein endliches Integral mit der oberen Grenze $\sigma(t)$. Es wird also oft das Integral nur aus formalen Gründen als unendliches Integral geschrieben.
Unter den genannten Voraussetzungen wird das asymptotische Verhalten der Lösungen von (1=), (1≤) und (1≥) untersucht. Wesentliche Hilfsmittel sind die Resultate über Funktionensysteme mit modifizierter Durchdringungseigenschaft aus /MORGENTHAL,1979/.
In /MORGENTHAL,1979/ wurden Paare von Funktionenklassen mit modifizierter Durchdringungseigenschaft eingeführt und erste Ergebnisse über das asymptotische Verhalten der Elemente dieser Funktionenklassen angegeben. Weitere Ergebnisse die allgemein für solche Funktionenklassen gelten, findet man in den Kapiteln II., V. und VII.. Diese Ergebnisse lassen sich, wie man noch sehen wird, bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösungen von (1=) anwenden. Im vorliegenden Fall zeigt sich, daß die Lösungsmengen von (1≤) und (1≥) ein Paar von Funktionensystemen mit modifizierter Durchdringungseigenschaft bilden. Man erhält daher aus /MORGENTHAL,1979/ insbesondere, daß die final positiven Lösungen von (1=) in Klassen mit unterschiedlichem asymptotischem Verhalten aufgeteilt werden können und, daß diese Klassen sich bezüglich ihres asymptotischen Verhaltens ordnen lassen. Es existieren höchstens zwei verschiedene Klassen. Die Frage, wann genau zwei verschiedene Klassen existieren, wird im Kapitel IV der vorliegenden Arbeit mitbehandelt. Werden an die Parameter der Gleichung (1=) weitere Forderungen gestellt, so lassen sich die final positiven Lösungen von (1=) durch Exponentialfunktionen abschätzen.
In weiteren Teilen wird das asymptotische Verhalten der oszillierenden Lösungen von (1=) untersucht. Die Resultate gestatten es, den Entwicklungssatz aus /MORGENTHAL,1979/ zu verschärfen.

I. Existenz- und Einzigkeitssatz, ein Vergleichssatz

$E(t)$ sei die auf $[A,\infty)$ definierte Funktion $\mathbf{E(t) := \inf\{\vartheta - \sigma(\vartheta) : \vartheta \geq t\}}$. Der Punkt $E(t)$ beschreibt den kleinsten Zeitpunkt, der noch Einfluß auf das Verhalten der Lösung von (1=) zum Zeitpunkt t besitzt. $[E(t),t]$ wird Einflußintervall genannt. Dann ist $E(t)$ monoton wachsend, und wegen den Voraussetzungen an $\sigma(t)$ gilt $E(t) \leq t$ für $A \leq t$ und $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = \infty$.

Unter einer Lösung von (1≥) versteht man eine auf $[E(A),\infty)$ definierte stetige reellwertige Funktion, die auf $[A,\infty)$ zweimal differenzierbar ist und der Ungleichung (1≥) genügt. Analog wird der Lösungsbegriff bezüglich (1≤) und (1=) verwendet. Unter der Ableitung an der Stelle A versteht man immer die rechtsseitige Ableitung.
Unter den angegebenen Voraussetzungen folgt aus /MYSKIS, Satz 1/der Existenz- und Einzigkeitssatz, der im folgenden benötigt wird:

<u>Satz</u> I.1: Zu jeder auf $[E(A),A]$ stetigen reellwertigen Funktion φ und einer reellen Zahl α existiert genau eine Lösung f von (1=), für die $f(t) = \varphi(t)$ für $E(A) \leq t \leq A$ und $f'(A) = \alpha$ gilt.

Bei der Untersuchung der Gleichung (1=) spielt der Satz I.2, den man als lokalen Vergleichssatz bezeichnen kann, eine fundamentale Rolle.
Zunächst sei jedoch ein Lemma angegeben.
<u>Lemma</u> I.1: Gilt für ein $T > A$: $\quad \mathbf{x(t) \leq 0}$ für $E(A) \leq t \leq A$,

$$\mathbf{x(A) = 0,}$$
$$\mathbf{x'(A) \geq 0}$$
und $\quad \mathbf{x'(t) \leq 0}$ für $A < t \leq T$,

so ist:

$$\int\limits_A^t \int\limits_0^{q(\tau)} \mathbf{x(\tau - s)dr(\tau,s)d\tau \leq 0} \quad \text{für alle } A < t \leq T.$$

Bew.: $x(t)$ ist monoton nicht wachsend auf dem Intervall $(A,T]$ und dies bedeutet, daß $x(t) \leq 0$ für alle $E(A) \leq t \leq T$ ist. Auf Grund der Nichtpositivität des Integranden ist das STIELTJES-Integral nicht positiv und somit auch das im Lemma betrachtete RIEMANN-Integral. □

<u>Satz</u> I.2: Es sei $a(t)$ meßbar und $|a(t)|$ lokal summierbar. Weiterhin sei $-\infty < A < \infty$,

$$\mathbf{x(t) \leq 0} \text{ für } E(A) \leq t \leq A,$$
$$\mathbf{x(A) = 0} \text{ und}$$
$$\mathbf{x'(A) \geq 0}.$$

Für $A \leq t$ genüge $x(t)$ der Ungleichung (1≥). Dann existiert eine reelle Zahl $C > A$, so daß gilt:

$$\mathbf{x(t) \geq 0} \text{ und } \mathbf{x'(t) \geq 0} \text{ für alle } t \text{ mit } A \leq t < C.$$

Bew.: Es genügt zu zeigen, daß ein $C > A$ existiert, so daß $x'(t) \geq 0$ für alle $t \in [A,C)$ gilt, da hieraus mit

$$x'(t) = x(A) + \int_A^t x'(\tau)d\tau \qquad \text{für } A < t < C$$

folgt, daß $x(t) \geq 0$ für alle $t \in [A,C)$.

Nimmt man nun das Gegenteil an, so erhält man zwei Fälle:

(1) Es existieren rechte Umgebungen von A, so daß $x'(t) \leq 0$ gilt, wobei jede Umgebung Punkte t enthält mit $x'(t) < 0$.

(2) In allen rechten Umgebungen von A gibt es sowohl Punkte t mit $x'(t) < 0$ als auch solche mit $x'(t) > 0$.

Fall (1): Man kann nun ein $T > A$ so wählen, daß $\mathbf{x'(t) \leq 0}$ auf $A \leq t \leq T$ und $\int_A^T |a(\tau)|d\tau < 1$ gilt.

Sei $\rho := \min\{x'(t) : A \leq t \leq T\}$. Dann ist ρ nach Voraussetzung echt kleiner als Null. Integriert man nun die Ungleichung (1≥) von A bis t, wobei $A \leq t \leq T$ gelten soll und nutzt das Lemma I.1, so erhält man die Gültigkeit der folgenden Ungleichung für alle $t \in [A,T]$:

$$x'(t) \;\geq\; x'(A) + \int_A^t a(\tau)x'(\tau)d\tau - \int_A^t \int_0^\infty x(\tau-s)dr(\tau,s)d\tau \;\geq\; \rho\int_A^t |a(\tau)|d\tau \;\geq\; \rho\int_A^T |a(\tau)|d\tau \;>\; \rho.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition von ρ, d.h. die Annahme, daß der Fall (1) gilt, ist falsch.

Fall (2): Wählt man $S > A$, so daß $\mathbf{S - A < 1}$,

$$\int_A^S |a(\tau)| < \frac{1}{2},$$

$$\int_A^S \int_0^\infty dr(\tau,s)d\tau < \frac{1}{2}$$

und $\mathbf{x'(S) = 0}$ gilt,

und setzt man $\rho(S) := \max\{x'(t) : A \leq t \leq S\}$,
so ist $\rho(S) > 0$, und man findet ein $P > A$, so daß $x'(P) = \rho(S)$. Nun kann man noch einen Punkt Q finden, der die kleinste Nullstelle von $x'(t)$ im Intervall $[P,S]$ ist.

Für $P \leq t \leq Q$ hat man dann die folgende Ungleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &\geq x'(P) + \int_P^t a(\tau)x'(\tau)d\tau - \int_P^t \int_0^\infty x(\tau-s)dr(\tau,s)d\tau \\ &\geq \rho(S) - \int_P^t |a(\tau)|x'(\tau)d\tau - \int_P^t \Big[\int_0^\infty x(\tau-s) - \{x(A) + \int_A^t \rho(S)d\tau\}dr(\tau,s) \\ &\qquad\qquad + \int_0^\infty \{x(A) + \int_A^t \rho(S)d\tau\}dr(\tau,s)\Big]d\tau \end{aligned}$$

$$x'(t) \geq \rho(S) - \rho(S)\int_A^S |a(\tau)|d\tau - \int_P^t [\int_0^\infty x(\tau-s) - \rho(S)(t-A)dr(\tau,s) + \int_0^\infty \rho(S)(t-A)dr(\tau,s)]d\tau$$

und wegen $x(\tau)=x(A)+\int_A^\tau x'(\vartheta)d\vartheta \leq x(A)+\max_{A\leq t\leq \tau} x'(t)(\tau-A)$ folgt, daß das erste der beiden STIELTJES-Integrale negativ ist, somit gilt weiter

$$x'(t) \geq \rho(S) - \rho(S)\int_A^S |a(\tau)|d\tau - \int_A^S \rho(S)(S-A)\int_0^\infty dr(\tau,s)d\tau$$

$$= \rho(S)\{1 - \int_A^S |a(\tau)|d\tau - (S-A)\int_A^S\int_0^\infty dr(\tau,s)d\tau\} > 0 \ .$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zu $x'(Q)=0$.

Somit ist der Satz vollständig bewiesen. □

<u>Bemerkung</u> I.1: Setzt man in Satz I.2 zusätzlich $x'(A) > 0$ voraus, so existiert ein $C > A$, so daß $x(t) > 0$ und $x'(t) > 0$ für alle $t \in [A,C)$ gilt.

Unter Verwendung des Satzes I.2 kann man nun folgende lokale Durchdringungseigenschaft für die Mengen der Lösungen der Ungleichungen (1≥) und (1≤) formulieren.

<u>Folgerung</u> I.1: Sei f eine Lösung von (1≥) und g eine von (1≤).
Es gelte: $\mathbf{f(t) \leq g(t)}$ für $E(A) \leq t \leq A$,

$\mathbf{f(A) = g(A)}$ und

$\mathbf{f'(A) \geq g'(A)}$.

Dann existiert ein $C > A$, so daß gilt $\mathbf{g(t) \leq f(t)}$ und

$\mathbf{g'(t) \leq f'(t)}$ für $A \leq t \leq C$.

Bew.: Die Differenz $u(t)=f(t)-g(t)$ erfüllt die Ungleichung (1≥) und die Voraussetzungen des Satzes I.2, aus welchem man sofort die Folgerung erhält. □

II. Durchdringungseigenschaft

In Anlehnung an die Bezeichnungen bei /MORGENTHAL,1979/ wird die Menge aller Lösungen von (1≤) mit M^1 und die von (1≥) mit M_1 bezeichnet. $M=M^1 \cap M_1$ ist dann die Lösungsmenge von (1=).

Folgende Eigenschaften sind erfüllt:

A_1: Aus $f \in M_1$ und $g \in M_1$ folgt $g+f \in M_1$.

A_2: Aus $f \in M_1$ und $\lambda \geq 0$ folgt $\lambda f \in M_1$.

Die gleichen Eigenschaften A_1 und A_2 gelten auch für M^1.

A'_3: Aus $A < T$, $f \in M_1$, $g \in M^1$, $\mathbf{0 \leq g(t)}$ für $E(T) \leq t \leq T$,

$\mathbf{0 < g(t)}$ für $T \leq t$,

$\mathbf{f(t) \leq g(t)}$ für $E(T) \leq t \leq T$ und

$\mathbf{f(T) = g(T)}$,

folgt $\mathbf{g(t) \leq f(t)}$ für alle $t \geq T$. (II.1)

Da A_1 und A_2 offensichtlich gelten, genügt es, A'_3 nachzuweisen.

Bew. von A'_3: Da aus den Voraussetzungen folgt, daß $f'(T) \geq g'(T)$ ist, erhält man mit Folgerung I.1, daß es ein $C > T$ gibt, so daß gilt: $g(t) \geq f(t)$ für alle $t \in [T,C)$. Unter den zusätzlichen Voraussetzungen: $0 \leq g(t)$ für alle $t \in [E(T),T]$ und $0 < g(t)$ für alle $t \geq T$, kann man die Gültigkeit von (II.1) für alle $t \geq T$ zeigen.

Nimmt man nun das Gegenteil der Behauptung an, d.h. die Existenz eines Punktes $P > T$ mit $g(P) > f(P)$, und definiert man $\boldsymbol{\lambda := \max_{T \leq t \leq P} \frac{f(t)}{g(t)}}$, so ist $\lambda \geq 1$, und es gibt auf Grund der Stetigkeit von $f(t)$ und $g(t)$ mindestens einen Punkt $Q \in [T,P)$, in dem die Funktion $\frac{f(t)}{g(t)}$ ihr Maximum annimmt. Da $\lambda \geq 0$ ist, gilt $\lambda g(t) \in M^1$. Wählt man den größten Punkt $Q \in [T,P)$, in dem das Maximum angenommen wird, so gilt für diesen Punkt:

$\mathbf{0 \leq \lambda g(t)}$ für $E(Q) \leq t \leq Q$,

$\mathbf{0 < \lambda g(t)}$ für $Q \leq t$,

$\mathbf{f(t) \leq \lambda g(t)}$ für $E(Q) \leq t \leq Q$ und

$\mathbf{f(Q) = \lambda g(Q)}$.

Nach der Folgerung I.1 gibt es nun ein $C > Q$ mit $\lambda g(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [Q,C)$, was im Widerspruch zur Wahl von Q steht (d.h. Q ist größter Punkt, in dem das Maximum angenommen wird). Also gilt $g(t) \leq f(t)$ für alle $t \geq T$, womit A'_3 bewiesen ist. □

<u>Folgerung</u> II.1: Unter den Voraussetzungen von A'_3 ist die Funktion $\mathbf{q(t) := \frac{f(t)}{g(t)}}$ nicht fallend für $T \leq t$.

Bew.: Man zeigt, daß für beliebige t_0 gilt: $q(t_0)g(t) \leq f(t)$ für $T \leq t_0 \leq t$.

Sei $\Theta := \inf\{t \geq T: q(t_0)g(t) = f(t)\}$. Dann ist $T \leq \Theta \leq t_0$, und es gilt

$$f(t) \leq q(t_0)g(t) \text{ für } E(\Theta) \leq t \leq \Theta,$$
$$f(\Theta) = q(t_0)g(\Theta)$$
$$\text{sowie } 0 < q(t_0)g(t) \text{ für } E(\Theta) \leq t.$$

Wendet man nun A'_3 an, so erhält man die Behauptung. □

Beim Beweis der Folgerung II.1 wurden nur die obigen Axiome verwendet, d.h. die Folgerung II.1 gilt für allgemeine Funktionensysteme mit A'_3. Im Falle der Gleichung (1=) und der zugehörigen Ungleichungen erhält man aus der Folgerung II.1 folgende Aussage über das Verhalten der Ableitungen von f und g:
Unter den Voraussetzungen von A'_3 gilt $f(t)g'(t) \leq f'(t)g(t)$ für alle $t \geq T$.
Ein solches Paar positiver Funktionen nennt man monoton durchdringend ab dem Punkt T. Monoton sich durchdringende Funktionenpaare haben folgende wichtige Eigenschaft, die im nächsten Lemma bewiesen werden soll.

Lemma II.1: $f \in M_1$ und $g \in M^1$ mögen sich vom Punkt $-\infty < E(T) < \infty$ monoton durchdringen. Dann gibt es zu beliebigem $Q \geq T$ und $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$, so daß gilt:

$$\alpha f(t) \leq \beta g(t) \text{ für } t \in [E(Q), Q] \text{ und}$$
$$\alpha f(Q) = \beta g(Q).$$

Bew.: Da f und g positive reellwertige Funktionen sind, existiert zu jedem Q und α ein β, so daß $\alpha f(Q) = \beta g(Q)$ gilt. Die Gültigkeit der Ungleichung auf dem Einflußintervall von Q ergibt sich wie folgt:

$$\frac{f(t)}{g(t)} \text{ ist nicht fallend für } t \geq E(T),$$

speziell gilt $\quad \dfrac{f(t)}{g(t)} \leq \dfrac{f(Q)}{g(Q)}$ für alle t mit $E(T) \leq t \leq Q$,

also auch $\quad \dfrac{\alpha f(t)}{\beta g(t)} \leq \dfrac{\alpha f(Q)}{\beta g(Q)} = 1$ für alle t mit $E(T) \leq t \leq Q$

woraus nun sofort die Behauptung folgt. □

Es wird nun eine Verschärfung der Aussage des Axioms A'_3 für Spezialfälle der Gleichung (1=) und deren Ungleichungen angegeben, die später noch benötigt wird.
Dazu wird die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Retardierung

$$x''(t) = \alpha x'(t) - \beta x(t-\gamma) \qquad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ \gamma > 0 \tag{II.2=}$$

betrachtet.

Satz II.1: Sei $\mathbf{x(t) < 0}$ für $t \in [E(A),A)$,

$$\mathbf{x(A) = 0},$$

$$\mathbf{x'(A) \geq 0}, \quad \text{und sei } x(t) \text{ Lösung von (II.2}\geq\text{)}.$$

So existiert ein $C > A$ mit $\mathbf{x(t) > 0}$ und $\mathbf{x'(t) > 0}$ für $t \in (A,C)$.
Bew.: Durch Integration von (II.2≥) von A bis t erhält man

$$\mathbf{x'(t) \geq x'(A) + \alpha x(t) - \beta\int_A^t x(\tau-\gamma)d\tau > 0}, \quad \text{falls } t \text{ hinreichend nahe an } A.$$

Dies folgt sofort aus der Positivität von β und der Stetigkeit des Integrals. □

Satz II.2: Sei $T > A$, f Lösung von (II.2≥), g Lösung von (II.2≤) mit

$$\mathbf{0 \leq g(t)} \quad \text{für } E(T) \leq t \leq T,$$

$$\mathbf{0 < g(t)} \quad \text{für } T \leq t,$$

$$\mathbf{f(t) < g(t)} \quad \text{für } E(T) \leq t \leq T \quad \text{und}$$

$$\mathbf{f(T) = g(T)},$$

so folgt $\quad \mathbf{g(t) < f(t)} \quad$ für $T \leq t$.

Der Beweis ist analog zu dem Nachweis von A'_3 für die Gleichung (1=). Weiterhin erhält man die
Folgerung II.2: Unter den Voraussetzungen des Satzes II.2 ist die Funktion $\mathbf{q(t) := \frac{f(t)}{g(t)}}$ monoton wachsend für $T \geq t$, und es gilt $\mathbf{f(t)g'(t) < f'(t)g(t)}$.
Ein solches Paar von Funktionen f und g heißt echt durchdringend ab dem Punkt T.

Im folgenden werden nun allgemeine Eigenschaften von Funktionensystemen mit der modifizierten Durchdringungseigenschaft A'_3 (in Ergänzung zu den in /MORGENTHAL,1979/ angegebenen) bewiesen.

Die folgenden beiden Sätze geben Bedingungen an, unter denen ein Element aus M^1 bzw. M_1 von einem gewissen Punkte an immer negativ bzw. positiv ist.

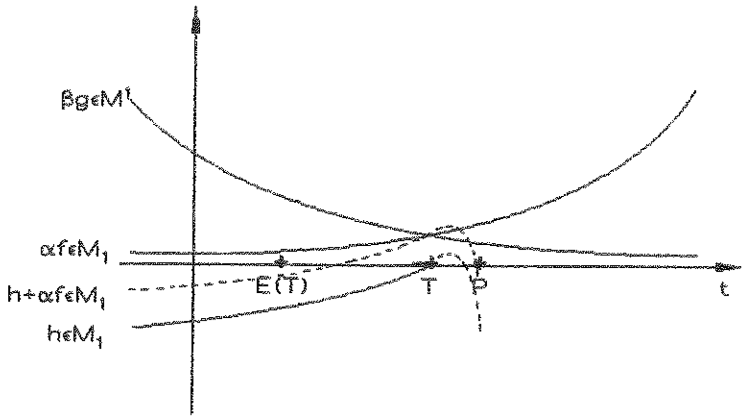
Satz II.3: Mögen A_1, A_2 und A'_3 für zwei Mengen M_1 und M^1 stetiger reellwertiger Funktionen, die definiert sind auf $[E(A),\infty)$, gelten. Existieren mindestens zwei positive Funktionen $f \in M_1$ und $g \in M^1$, so daß sich f und g monoton durchdringen für $t \geq E(A)$,

so folgt aus $T > A$, $h \in M_1$, $\quad \mathbf{h(t) \leq 0}$ für $t \in [E(T),T]$ und $\mathbf{h(T) = 0}$

die Nichtnegativität von h, d.h. es gilt $\mathbf{h(t) \geq 0}$ für alle $t \geq T$.

Bew: Da f und g sich monoton durchdringen gilt, daß für alle $T > A$ und für alle $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$ existiert, so daß gilt: $\alpha f(t) \leq \beta g(t)$ für $t \in [E(T),T)$ und $\alpha f(T) = \beta g(T)$. Vermittels A'_3 folgt nun die Gültigkeit von $\alpha f(t) \geq \beta g(t)$ für alle $t \geq T$.
Es wird nun angenommen, daß die Aussage des Satzes nicht richtig ist, d.h. es

existiert ein Punkt $P > T$ mit $h(P) < 0$. Man findet also zu jedem $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$, so daß gilt: $\mathbf{h(t) + \alpha f(t) \leq \beta g(t)}$ für $E(T) \leq t \leq T$ und $\mathbf{h(T) + \alpha f(T) = \beta g(T)}$.



Vermittels der Gültigkeit von A'_3 folgt nun $\mathbf{h(t) + \alpha f(t) \geq \beta g(t)}$ für alle $t \geq T$,

also $\mathbf{h(t) + \alpha f(t) - \beta g(t) \geq 0}$. (II.3)

Es wurde nun angenommen, daß $h(P) < 0$ und – nach obigem Ergebnis – kann man α und $\beta > 0$ so wählen, daß $\alpha f(P) - \beta g(P)$ beliebig klein wird. Hieraus folgt aber, daß es α und β gibt, so daß $\mathbf{h(P) + \alpha f(P) - \beta g(P) < 0}$ wird, was im Widerspruch zu (II.3) steht. Also ist die Annahme $h(P) < 0$ falsch, womit der Satz bewiesen ist. □

Einen analogen Satz erhält man für $h \in M^1$ und $h(t) \geq 0$ für $E(T) \leq t \leq T$.

Satz II.4: Gelten die Voraussetzungen des Satzes II.3, so folgt aus $T > A$, $h \in M^1$,

$\mathbf{h(t) \geq 0}$ für $E(T) \leq t \leq T$ und

$\mathbf{h(T) = 0}$,

die Gültigkeit von $\mathbf{h(t) \leq 0}$ für alle $t \geq T$.

Bew.: Der Beweis ist analog zu dem von Satz II.3, und man kommt mittels des folgenden Schlusses zum Widerspruch:

Aus $\alpha f(t) \leq \beta g(t) + h(t)$ für $E(T) \leq t \leq T$ und $\alpha f(T) = \beta g(T) + h(T)$ folgt
$\alpha f(t) \geq \beta g(t) + h(t)$ für $t \leq T$ also $0 \geq \beta g(t) - \alpha f(t) + h(t)$. □

Bemerkung II.1: Die Voraussetzung der Existenz zweier positiver Funktionen f und g, die sich durchdringen, erscheint als sehr streng. Sie ist jedoch im Falle der Gleichung (1=) schon dann erfüllt, wenn es eine positive Lösung g von (1≤) gibt. Die Funktion f ist dann die Lösung von (1≥) mit $f(t) = g(t)$ für $t \in [E(A),A]$ und $f'(A) = g'(A)$.

$f \in M^1 \cup M_1$ wird final positiv genannt, wenn ein $P \geq E(A)$ existiert mit $0 < f(t)$ für alle $t \geq P$. Man nennt f positiv, wenn $0 < f(t)$ für alle $t \geq E(A)$ gilt. Eine Funktion aus $M^1 \cup M_1$ wird oszillierend genannt, wenn sie in jedem Intervall $[P,\infty)$ mit $P \geq E(A)$ Nullstellen besitzt.

Als direkte Folgerung aus Satz II.3 und der obigen Bemerkung erhält man den zu einem Vergleichssatz von /KOZAKIEWIC,Th. 1" / äquivalenten

Satz II.5: Sei $T > A$ und (1≤) möge eine Lösung g_0 besitzen mit

$$\mathbf{0 \le g_0(t)} \text{ für } E(T) \le t \le T \text{ und } \mathbf{0 < g_0(t)} \text{ für alle } t \ge T.$$

Sei f eine Lösung von (1≥), g eine von (1≤) mit

$$\mathbf{f(t) \le g(t)} \text{ für } t \in [E(T),T]$$

$$\text{und } \mathbf{f(T) = g(T)}.$$

Dann gilt: $\mathbf{f(t) \ge g(t)}$ für alle $t \ge T$.

Als weitere Folgerungen aus Satz II.3 erhält man Charakterisierungen oszillierender Elemente aus $M = M_1 \cap M^1$.

Lemma II.2: Es mögen positive Elemente $f \in M_1$ und $g \in M^1$ mit den in Satz II.3 geforderten Eigenschaften existieren. Dann gilt: Ist $h \in M$ oszillierend, das für kein Intervall der Form $[T,\infty)$ mit $A \le T < \infty$ identisch verschwindet, so nimmt h auf jedem solchen Intervall sowohl positive als auch negative Werte an.
Bew.: Es sei $h \in M$, $h(t) \not\equiv 0$ für $A \le T \le t < \infty$, und es gebe einen Punkt $P > A$, so daß o.B.d.A. $h(t) \le 0$ für $t \ge E(P)$. Sei $R \ge P$ so gewählt, daß $h(R) = 0$. Dann gilt nach Satz II.3, daß $h(t) \ge 0$ für alle $t \ge R$, und dies bedeutet wiederum $h(t) \equiv 0$ für alle $t \ge R$, was im Widerspruch zu $h(t) \not\equiv 0$ für $A \le T \le t < \infty$ steht. □

Folgerung II.2: Unter den Voraussetzungen von Lemma II.2, nimmt jedes nichtverschwindende oszillierende Element von M in jedem Intervall der Form $[E(T),T]$ für $T \ge A$ sowohl positive als auch negative Werte an.

Weitere allgemeingültige Sätze findet man in den Kapiteln V. und VII.. Sie werden dort angegeben und bewiesen, da dies in den entsprechenden Kapiteln zum besseren Verständnis beiträgt.
Wie zu Beginn des Abschnitts gezeigt, erfüllt das Paar (M^1,M_1) die Axiome A_1, A_2 und A'_3. Paare von Funktionenklassen, die diese Axiome erfüllen, wurden in /MORGENTHAL,1979/ untersucht. Man erhält daher aus /MORGENTHAL,1979: Sätze 1, 7, 5 ,6/ unmittelbar die folgenden Sätze II.6 bis II.9.

Satz II.6: Sei f eine Lösung von (1≥) und g eine von (1≤). f und g seien final positiv. Dann gilt entweder $f = O(g)$ oder $g = o(f)$.

Hier und im folgenden bedeutet $f = O(g)$ stets $f(t) = O(g(t))$ für $t \to \infty$. Analog wird $g = o(f)$ verwendet.

Satz II.7: Ist h eine oszillierende Lösung von (1=) und g eine final positive Lösung von (1≤), so ist $h = O(g)$.

Man nennt zwei final positive Lösungen von (1=) äquivalent (bzgl. ihres asymptotischen Verhaltens), wenn $f = O(g)$ und $g = O(f)$ ist. In der Menge der final positiven Lösungen von (1=) ist damit eine Äquivalenzrelation definiert. Die Menge M zerfällt also in Klassen äquivalenter Elemente. $\mathfrak{M}_p$ sei die Menge der Äquivalenzklassen.
F und G seien zwei Äquivalenzklassen. Sei $f \in F$ und $g \in G$. Man schreibt $F < G$, wenn $f = o(g)$ ist. Man sieht sofort, daß die Definition von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist und, daß "$<$" in $\mathfrak{M}_p$ eine Halbordnung ist. Der folgende Satz zeigt, daß "$<$" in $\mathfrak{M}_p$ sogar eine Ordnungsrelation ist.

Satz II.8: Für je zwei Äquivalenzklassen F und G gilt genau eine der Beziehungen $F < G$, $F = G$ oder $F > G$.

Auf Grund der Gültigkeit von A'_3 gilt bzgl. der Anzahl der Klassen

Satz II.9: Es gibt höchstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

Die Frage der Existenz genau zweier Äquivalenzklassen wird im IV. Kapitel mitbehandelt.

III. Die Gleichung $x''(t) = \alpha x'(t) - \beta x(t-\gamma)$

Der schon im letzten Kapitel angeführte Spezialfall wird im Verlauf der weiteren Untersuchungen noch oft Anwendung finden. Aus diesem Grund soll nun die Gleichung

$$x''(t) = \alpha x'(t) - \beta x(t-\gamma) \qquad \text{(III.1=)}$$

mit $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ genauer untersucht werden. Es wird darauf verwiesen, daß es bzgl. der Untersuchung solcher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstanter Retardierung eine Reihe von umfangreichen Darstellungen (siehe /BELLMANN/, /EL'SGOLL'C/, /PINNEY/u.a.) gibt.
Wendet man auf (III.1=) den Eulerschen Ansatz an, so erhält man die zu (III.1=) gehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 = \alpha\lambda - \beta e^{-\gamma\lambda} \quad . \qquad \text{(III.2)}$$

Ist nun λ eine Lösung der Gleichung (III.2), so ist $x(t) = e^{\lambda t}$ eine Lösung der obenstehenden Differentialgleichung (III.1=).
Zunächst wird auf die Möglichkeit reeller Wurzeln von (III.2) eingegangen. Werden zwei Paramenter in (III.2) fixiert, so kann man den übrigbleibenden Parameter in Abhängigkeit von λ darstellen.

$$\alpha(\lambda) = \frac{\lambda^2 + e^{-\gamma\lambda}}{\lambda} \qquad \beta \text{ u. } \gamma \text{ konst.} \qquad \text{(III.3)}$$

$$\beta(\lambda) = (\alpha\lambda - \lambda^2)\, e^{\gamma\lambda} \qquad \alpha \text{ u. } \gamma \text{ konst.} \qquad \text{(III.4)}$$

$$\gamma(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\alpha\lambda - \lambda^2}{\beta}\right) \qquad \alpha \text{ u. } \beta \text{ konst.} \qquad \text{(III.5)}$$

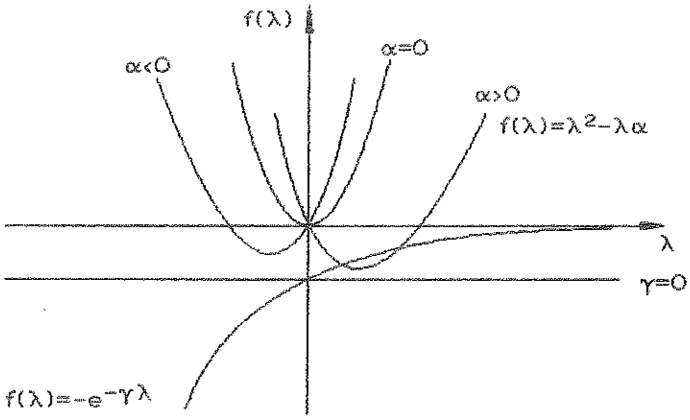
Um die weiteren Betrachtungen zu erleichtern, wird die folgende Variablentransformation durchgeführt:

$$\bar{\lambda} := \frac{\lambda}{\sqrt{\beta}} \ , \quad \bar{\alpha} := \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}, \ \bar{\gamma} := \sqrt{\beta}\,\gamma \quad . \qquad \text{(III.6)}$$

Um die Schreibweise nicht unnötig kompliziert zu gestalten, wird im weiteren der Querstrich über den neuen Variablen weggelassen. In der Zusammenfassung am Ende dieses Kapitels muß diese Schreibweise jedoch wieder verwendet werden. Mit Hilfe der Transformation (III.5) erhält man aus (III.2) das neue Quasipolynom:

$$D(\lambda,\alpha,\beta) = \lambda(\lambda-\alpha) + e^{-\gamma\lambda} = 0. \qquad \text{(III.7)}$$

Anhand der Skizze:



erkennt man, daß es maximal zwei reelle Nullstellen geben kann. Die Schnittpunkte der Funktionen $-e^{\gamma\lambda}$ und $\lambda^2-\lambda\alpha$ sind gerade die reellen Nullstellen der Funktion $D(\lambda,\alpha,\gamma)$.

Analog den Funktionen (III.3) bis (III.5) erhält man aus (III.6):

$$\alpha(\lambda)=\frac{\lambda^2+e^{-\gamma\lambda}}{\lambda} \qquad \gamma \text{ konst.}, \tag{III.8}$$

$$\gamma(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\ln(\alpha\lambda-\lambda^2) \qquad \alpha \text{ konst..} \tag{III.9}$$

Es werden nun einige Aussagen bewiesen, die im weiteren noch von Bedeutung sein werden:

(1): Für die Existenz reeller Nullstellen von $D(\lambda,\alpha,\gamma)$ ist die Bedingung:

$\alpha \in (-\infty,-2]\cup(0,\infty)$ notwendig.

Bew.: Angenommen $\alpha \in (-2,0]$, dann wird das Minimum der Funktion $h(\lambda):=\lambda^2-\alpha\lambda$ bei $-1<\lambda=\alpha/2<0$ angenommen, und es gilt $-1<h(\alpha/2)=-\alpha^2/4<0$. Im Gegensatz dazu ist die Funktion $g(\lambda):=-e^{-\gamma\lambda}$ für alle $\lambda\le 0$ immer kleiner als -1. Dies ist nun der gewünschte Widerspruch. □

(2): Für $\alpha\ge 2$ existieren immer zwei reelle Nullstellen mit $0<\lambda_2\le\alpha/2\le\lambda_1$.

Bew.: Für $\alpha\ge 2$ wird das Minimum der Funktion $h(\lambda)$ bei $\lambda=\alpha/2>0$ angenommen und ist kleiner gleich -1. Die Funktion $g(\lambda)$ ist jedoch für alle $\lambda\ge 0$ immer größer gleich -1. Hieraus folgt, daß beide Funktionen g und h sich mindestens einmal schneiden. Die behauptete Ungleichung folgt sofort aus dem Monotonieverhalten der Funktionen. □

(3): Gilt $e^{-\gamma\alpha/2}<\alpha^2/4$, so besitzt $D(\lambda,\alpha,\gamma)$ zwei reelle Nullstellen mit $\lambda_2\le\lambda_1$ und $\alpha/2\le\lambda_1$.

Bew.: Die Funktion $h(\lambda)$ hat ihr Minimum bei $\alpha/2$ mit $h(\alpha/2)=\alpha^2/4$. Gilt nun $g(\alpha/2)>h(\alpha/2)$, so müssen sich die Graphen der Funktionen h und g mindestens zweimal schneiden. □

(4): Gibt es für gewisse Parameter α und $\gamma > 0$ eine zweifache Nullstelle von D, so muß gelten:

$$\lambda_{1.2} = \lambda_{1.2}(\alpha,\gamma) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{4}}\,. \qquad \text{(III.10)}$$

Bew.: Zur Berechnung der zweifachen Nullstelle von D ist das Gleichungssystem:

$$D(\lambda,\alpha,\gamma) = \lambda^2 - \alpha\lambda + e^{-\gamma\lambda} = 0,$$

$$D'(\lambda,\alpha,\gamma) = 2\lambda - \alpha - \lambda\, e^{-\gamma\lambda} = 0$$

zu lösen.

Durch Eliminierung der Exponentialfunktion erhält man

$$\lambda^2 + \lambda\left(\frac{2}{\gamma} - \alpha\right) - \frac{\alpha}{\gamma} = 0$$

und folglich

$$\lambda_{1.2} = \lambda_{1.2}(\alpha,\gamma) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{4}}\,.$$

Bei positvem γ (dies wurde hier vorausgesetzt) muß offenbar das positive Vorzeichen der Wurzel gewählt werden, denn die Funktion $h(\lambda)$ ist streng monoton fallend für $-\infty < \lambda < \alpha/2$ und streng monoton wachsend für $\alpha/2 < \lambda < \infty$. Folglich können sich die Funktion $h(\lambda)$ und die stets streng monoton wachsende Funktion $g(\lambda)$ nur rechts von $\alpha/2$ berühren. Dies ist mit dem Auftreten einer zweifachen Nullstelle von D äquivalent. Damit ist die Richtigkeit der Aussage bewiesen. □

Wird nun die Funktion $\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)$ in $D(\lambda,\alpha,\gamma)$ eingesetzt, erhält man eine Funktion $G(\alpha,\gamma) := D(\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma),\alpha,\gamma)$. Zunächst wird die Existenz einer Funktion $\gamma_0(\alpha)$ gezeigt, die für $\alpha \in (-\infty,-2] \cup (0,2]$ definiert ist und die Identität $G(\alpha,\gamma_0(\alpha)) = 0$ erfüllt. Für $\alpha \in (-\infty,-2]$ ist das Minimum von $h(\lambda,\alpha)$ kleiner gleich -1 und wird bei $\alpha/2$ angenommen. Offenbar ist es nun möglich ein γ zu finden, so daß $g(\alpha/2,\gamma) \geq h(\alpha/2,\alpha)$ gilt, z.B. erfüllt $\gamma \equiv 0$ diese Relation immer. Wählt man weiterhin γ hinreichend groß, so gilt $g(\lambda,\gamma) < h(\lambda,\alpha)$ für alle λ. Auf Grund der Stetigkeit der Funktionen in beiden Komponenten existiert das folgende Supremum, das das gesuchte $\gamma_0(\alpha)$ ist:

$$\gamma_0(\alpha) = \sup\{\gamma : \exists\, \lambda \text{ mit } g(\lambda,\gamma) \geq h(\lambda,\alpha)\}.$$

Analog sind die Überlegungen für $\alpha \in (0,2]$.

Durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen ist es möglich das Verhalten der Funktion γ_0 zu bestimmen. Dazu wird zunächst die partielle Ableitung von G nach γ berechnet.

$$\begin{aligned}G_\gamma(\alpha,\gamma) &= 2\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)\,\lambda_{1.2_\gamma}(\alpha,\gamma) - \alpha\lambda_{1.2_\gamma}(\alpha,\gamma) - e^{-\gamma\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)}\,(\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma) + \gamma\lambda_{1.2_\gamma}(\alpha,\gamma))\\ &= \lambda_{1.2_\gamma}(\alpha,\gamma)\left[2\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma) - \alpha - \gamma\, e^{-\gamma\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)}\right] - \lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)\, e^{-\gamma\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)}\\ &= -\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)\, e^{-\gamma\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)}\end{aligned}$$

Man bemerke, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer Null wird, da $\lambda_{1.2}$ eine doppelte Nullstelle ist.
Betrachtet man nun G_γ, so erkennt man, daß die Ableitung für $\alpha \le -2$ echt größer und für $0 < \alpha \le 2$ echt kleiner als Null ist. D.h. $G(\alpha,\gamma) = 0$ impliziert eine Funktion $\gamma_0 = \gamma_0(\alpha)$ für $\alpha \in (-\infty,-2] \cup (0,2]$. Berechnet man nun noch die partielle Ableitung nach α, so erhält man:

$$\begin{aligned}G_\alpha(\alpha,\gamma) &= 2\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)\,\lambda_{1.2_\alpha}(\alpha,\gamma) - \alpha\lambda_{1.2_\alpha}(\alpha,\gamma) - e^{-\gamma\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)}\,\gamma\lambda_{1.2_\alpha}(\alpha,\gamma) - \lambda_{1.2}(\alpha,\gamma))\\ &= \lambda_{1.2_\alpha}(\alpha,\gamma)\left[2\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma) - \alpha - \gamma\, e^{-\gamma\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)}\right] - \lambda_{1.2}(\alpha,\gamma)\\ &= -\lambda_{1.2}(\alpha,\gamma).\end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß G_α echt positiv für $\alpha \le -2$ und echt negativ für $0 < \alpha \le 2$ ist. Aus diesen beiden Rechnungen ergibt sich:

$$\gamma_0'(\alpha) = -\frac{G_\alpha}{G_\gamma} < 0 \qquad \text{für } \alpha \in (-\infty,-2] \cup (0,2],$$

d.h. γ_0 ist für diese α streng monoton fallend.

Das folgende Lemma, welches hier nicht bewiesen werden soll, wird Bedingungen angeben, unter deren Gültigkeit man von der Existenz reeller Wurzeln des Quasipolynoms mit gegebenen Parametern auf die Existenz reeller Wurzeln für andere Parameter schließen kann.

<u>Lemma</u> III.1:

(i) Gilt $\alpha_2 \le \alpha_1 \le -2$ und $0 \le \gamma_2 \le \gamma_1 \le \gamma_0(\alpha_i)$, so existieren reelle Wurzeln von

$$\lambda_i^2 = \alpha_i\lambda_i - e^{-\gamma_i\lambda_i},$$

und es gilt die folgende Relation: $\lambda_{2.2} \le \lambda_{1.2} \le \lambda_{1.1} \le \lambda_{2.1} < 0$.

(ii) Gilt $\alpha_2 \ge \alpha_1 > 0$ und $\gamma_2 \ge \gamma_1 \ge \gamma_0(\alpha_1)$, so existieren reelle Wurzeln von

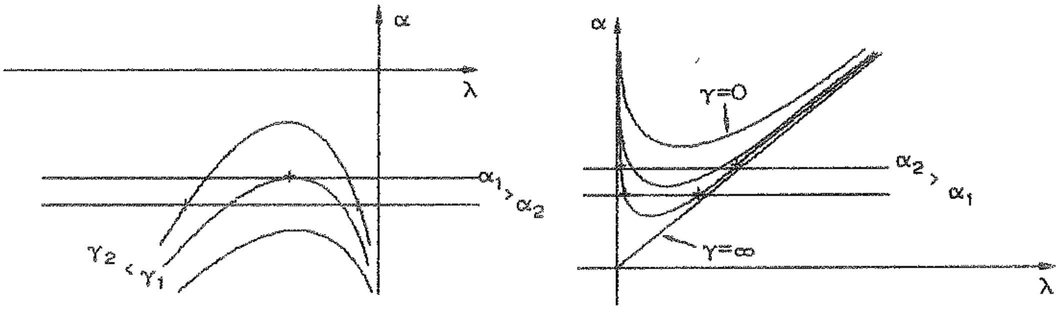
$$\lambda_i^2 = \alpha_i\lambda_i - e^{-\gamma_i\lambda_i},$$

und es gilt die folgende Relation: $0 < \lambda_{2.2} \le \lambda_{1.2} \le \lambda_{1.1} \le \lambda_{2.1}$.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß aus der Monotonie von γ_0
in (i) $\gamma_0(\alpha_1) \le \gamma_0(\alpha_2)$ und
in (ii) $\gamma_0(\alpha_1) \ge \gamma_0(\alpha_2)$ folgt.
Zur Veranschaulichung der obigen Behauptung wird die Funktion $\alpha(\lambda)$ in (III.7) skizziert. Dabei stellen die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $\alpha(\lambda)$ und $f(\lambda) \equiv \alpha$ die

reellen Nullstellen von D dar.
Die Gültigkeit der in der Behauptung angegebenen Relation ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Es sei nur der Fall (i) betrachtet, da für (ii) übertragbare Überlegungen angewendet werden können. Wie schon bemerkt, folgt aus der Monotonie von γ_0 die Existenz reeller Wurzeln der Gleichungen mit den Indizes 1 und 2. Zunächst sei die Gleichung mit dem Indize 1 betrachtet, für diese gilt $\lambda_{1,2} \leq \lambda_{1,1} < 0$. Da die partielle Ableitung von $\alpha(\lambda,\gamma)$ nach γ echt negativ für alle λ ist, liegt die Kurve $\alpha(\lambda,\gamma_2)$ immer über der Kurve $\alpha(\lambda,\gamma_1)$. Da die Funktion $\alpha(\lambda)$ konkav ist, können die Schnittpunkte des Graphen von $\alpha(\lambda,\gamma_2)$ mit der Waagerechten α_1 nicht zwichen $\lambda_{1,1}$ und $\lambda_{1,2}$ liegen. Bezeichnet man diese Schnittpunkte mit $\bar{\lambda}_1$, so gilt $\bar{\lambda}_2 \leq \lambda_{1,2} \leq \lambda_{1,1} \leq \bar{\lambda}_1 < 0$. Betrachtet man nun die Waagerechten α_1 und α_2, so erhält man die gesuchte Relation

$$\lambda_{2,2} \leq \bar{\lambda}_2 \leq \lambda_{1,2} \leq \lambda_{1,1} \leq \bar{\lambda}_1 \leq \lambda_{2,1} < 0 \quad .$$



Zusammenfassung:
Es wird nun wieder zwischen den transformierten Konstanten $\bar{\lambda}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ sowie der Funktion $\bar{\gamma}_0$ der Gleichung (III.7) und den Ausgangsparametern $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ der Gleichung (III.2) unterschieden.

(1) Die Gleichung $$x''(t) = \alpha x'(t) - \beta x(t-\gamma) \qquad \text{mit } \beta,\gamma > 0$$

besitzt für $\alpha/\sqrt{\beta} > 2$ positve Lösungen der Form

$$x_1(t) = k_1 e^{\sqrt{\beta}\;\bar{\lambda}_1 t}$$
und
$$x_2(t) = k_2 e^{\sqrt{\beta}\;\bar{\lambda}_2 t} \quad , \qquad \text{(III.11)}$$

mit $0 < \bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_1 < \infty$ und $1 < \alpha/2\sqrt{\beta} < \bar{\lambda}_1$.

(2) Positive Lösungen derselben Form existieren unter der Voraussetzung

$$\gamma\sqrt{\beta} > \bar{\gamma}_0(\alpha/\sqrt{\beta}) \quad \text{auch für } 0 < \alpha/\sqrt{\beta} \leq 2 \quad .$$

(3) Auch für $\alpha/\sqrt{\beta} \leq -2$ und $\gamma\sqrt{\beta} < \overline{\gamma}_0(\alpha/\sqrt{\beta})$ erhält man positive Lösungen der Form (III.11), jedoch mit $-\infty < \overline{\lambda}_2 < \overline{\lambda}_1 < 0$ und $\alpha/2\sqrt{\beta} \leq \overline{\lambda}_1 < 0$.

(4) Gilt $\gamma\sqrt{\beta} = \overline{\gamma}_0(\alpha/\sqrt{\beta})$ und ist $\alpha \in (-\infty,-2] \cup (0,2]$, so hat die Gleichung (III.1=) positve Lösungen der Form:

$$x_1(t) = k_1 t\, e^{\sqrt{\beta}\ \overline{\lambda}_1 t} ,$$
$$x_2(t) = k_2 e^{\sqrt{\beta}\ \overline{\lambda}_1 t} ,$$

wobei für $\overline{\lambda}_1$ gilt: $0 < \overline{\lambda}_1 < \infty$ bei $\alpha > 0$ und
$-\infty < \overline{\lambda}_1 < 0$ bei $\alpha < 0$
und $\alpha/2\sqrt{\beta} \leq \overline{\lambda}_1$.

IV. Existenz final positiver Lösungen

In diesem Abschnitt wird sich der Frage nach der Existenz nicht oszillierender Lösungen von (1=) zugewandt. Da mit f auch -f eine Lösung von (1=) ist, kann man o.B.d.A. nach der Existenz final positiver Lösungen von (1=) fragen. Es wird im folgenden oft nur über positive Lösungen gesprochen. Dies ist zulässig, da man im Falle einer final positiven Lösung den Anfangspunkt A nur hinreichend groß wählen muß, um zu einer positiven Lösung zu kommen. Der folgende Satz ist nun eine direkte Folgerung aus der Gültigkeit von A'_3 und dem Satz I.1.

<u>Satz</u> IV.1: Die Gleichung (1=) besitzt genau dann eine positive Lösung, wenn (1≤) eine positive Lösung besitzt.
Bew.: Da jede Lösung von (1=) auch eine von (1≤) ist, genügt es zu zeigen, daß die Existenz einer positiven Lösung g von (1≤) die Existenz einer positiven Lösung u von (1=) nach sich zieht. Sei also g eine positive Lösung von (1≤). Dann betrachtet man die Lösung u von (1=), für die gilt $u(t)=g(t)$ für $E(A) \le t \le A$ und $u'(A)=g'(A)$. Nach Satz I.1 existiert dann ein $C > A$, so daß gilt:

$$0 < g(t) \le u(t) \quad \text{für alle } t \in [A,C).$$

Sei $\lambda := \max\limits_{A \le t < C} \dfrac{u(t)}{g(t)}$, so ist $\lambda \geq 1$.

Es sei $Q \in [A,C)$ ein Punkt, in dem das Maximum angenommen wird. Dann gilt:

$$Q > A,\ u \in M_1,\ \lambda g \in M^1,\quad \begin{array}{ll} 0 \le \lambda g(t) & \text{für } E(Q) \le t \le Q, \\ 0 < \lambda g(t) & \text{für } Q \le t, \\ u(t) \le \lambda g(t) & \text{für } E(Q) \le t \le Q \text{ und} \\ u(Q) = \lambda g(Q)\,. & \end{array}$$

Vermittels A'_3 erhält man $u(t) \ge \lambda g(t) \ge g(t) > 0$ für alle $t \ge Q$. □

Es genügt also in konkreten Fällen die Existenz positiver Lösungen von (1=) durch die Untersuchung der Existenz positiver Lösungen von (1≤) nachzuweisen. Da die Lösungsmenge von (1≤) größer ist, als diejenige von (1=), ist dies häufig einfacher, als der direkte Nachweis der Existenz positiver Lösungen von (1=).
Der Satz II.9 besagte, daß es höchstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen von Lösungen von (1=) geben kann. Im folgenden Satz kann man nun sogar zeigen, daß es unter den Voraussetzungen des Satzes IV.1 zwei Lösungen gibt, die asymptotisch unterschiedliches Verhalten haben.

<u>Satz</u> IV.2: Hat (1≤) positive Lösungen g, so hat (1=) zwei positive Lösungen f_1 und f_2, die nicht äquivalent sind.
Bew.: Sei g eine positive Lösung von (1≤). u_1 und u_2 seien Lösungen von (1=), die be-

stimmt sind durch:

$$u_1(t) = u_2(t) = g(t) \qquad \text{für } E(A) \le t \le A,$$

$$u'_1(A) = g'(A)$$

und $$u'_2(A) = g'(A) + \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ beliebig fest.}$$

Nutzt man nun Satz IV.1 und die Gültigkeit von A'_3, so gilt für die Lösungen u_1 und u_2:

$$0 < g(t) \le u_1(t) \quad \text{und} \quad 0 < g(t) \le u_2(t) \quad \text{für alle } t \ge A.$$

Da man A'_3 auch auf u_1 und u_2 anwenden kann, erhält man

$$u_1(t) \le u_2(t), \quad \frac{u_2(t)}{u_1(t)} \text{ ist monoton nicht fallend und } \frac{u_2(t)}{u_1(t)} \ge 1 \quad \text{für alle } t \ge A.$$

Gilt

1) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_2(t)}{u_1(t)} = \infty$, so setzt man $f_1 := u_2$ und $f_2 := u_1$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_2(t)}{u_1(t)} = c < \infty$, so definiert man eine neue Funktion

$$v(t) := cu_1(t) - u_2(t),$$

die wieder eine positive Lösung von (1=) ist und für die gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v(t)}{u_1(t)} = c - \lim_{t\to\infty} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = 0 \ .$$

Nun setzt man $f_1 := u_1$ und $f_2 := v$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Es ergibt sich nun die Frage nach der Monotonie der Lösungen f_1 und f_2. Man nennt f final monoton fallend (wachsend), wenn ein P existiert, so daß f auf $[P,\infty)$ monoton fällt (wächst).

Kommt man zunächst zu dem Fall, daß die Ungleichung (1≤) positive und monoton nicht fallende Lösungen besitzt, so ist es einfach zu zeigen, daß (1=) auch eine monoton nicht fallende Lösung besitzt. Man kann jedoch nicht sofort folgern, daß es zwei Klassen positiver monoton nicht fallender Lösungen gibt, da im Fall 2) des Beweises von Satz IV.2 nicht ohne weiteres Monotonieaussagen der Lösung v getroffen werden können. Fordert man von der positiven Lösung von (1≤) zusätzlich, daß diese echt monoton und unbeschränkt wächst, so erhält man sogar die Existenz zweier asymptotisch nicht äquivalenter monoton wachsender positiver Lösungen von (1=).

Bevor diese beiden Sätze formuliert werden, seien vorbereitende Lemmata angegeben.

Lemma IV.1: Seien u(t) und g(t) zwei stetige positive und differenzierbare Funktionen mit $g'(t) \ge 0$, deren Quotient $\frac{u(t)}{g(t)}$ monoton nicht fallend ist. Dann gilt:

$$u(t-\varepsilon)g'(t) \le u'(t)g(t-\varepsilon) \qquad \text{für alle } t \text{ und alle } \varepsilon \ge 0.$$

Bew.: Diese Ungleichung folgt sofort aus der Ungleichung

$$0 \le \left(\frac{u(t)}{g(t)}\right)' = \frac{u'(t)g(t) - u(t)g'(t)}{g(t)^2} . \ \square$$

Wendet man diese Eigenschaft auf die im Beweis des Satzes IV.2 konstruierte Funktion u_1 bzw. u_2 und auf die positive nicht fallende Lösung g von (1≤) an, so erhält man den

Satz IV.3: Besitzt die Gleichung (1≤) positive und monoton nicht fallende Lösungen, so besitzt die Gleichung (1=) auch mindestens eine positive monoton nicht fallende Lösung.
Bew.: Durch Anwendung des Lemma IV.1 erhält man für die Funktionen u_i aus dem Beweis von Satz IV.2 die Ungleichungen:

$$u_i'(t)g(t) \ge u_i(t)g'(t) ,$$

und hieraus folgt $\quad u_i'(t) \ge g'(t)\frac{u_i(t)}{g(t)} \ge g'(t) \ge 0$, was zu zeigen war. $\square$

Betrachtet man noch einmal den Beweis des Satzes IV.2, so erkennt man: Nur bei der Gültigkeit des Falls 1) kann man auf die Existenz zweier nicht äquivalenter monoton nicht fallender Lösungen von (1=) schließen. Um die Nichtnegativität von $v'(t)$ im Fall 2) zu sichern, muß eine Aussage über das Verhalten des Quotienten $\frac{u'_2(t)}{u'_1(t)}$ gemacht werden. Dies leisten die folgenden zwei Lemmata.

Lemma IV.2: u_1 und u_2 seien wie in Beweis von Satz IV.2 konstruiert, und es sei $u'_1(t) > 0$. Dann ist der Quotient $\frac{u'_2(t)}{u'_1(t)}$ monoton nicht fallend.
Bew.: Differenziert man den zu betrachtenden Quotienten, so erhält man

$$\left(\frac{u'_2(t)}{u'_1(t)}\right)' = \frac{u''_2(t)u'_1(t) - u'_2(t)u''_1(t)}{u'_1(t)^2} .$$

Nutzt man, daß die u_i, i=1,2, positive Lösungen von (1=) sind, so erhält man

$$\begin{aligned} u''_2(t)u'_1(t) - u'_2(t)u''_1(t) &= a(t)u'_2(t)u'_1(t) - u'_1(t)\int_0^\infty u_2(t-s)dr(t,s) \\ &\quad - a(t)u'_2(t)u'_1(t) - u'_2(t)\int_0^\infty u_1(t-s)dr(t,s) \\ &= \int_0^\infty u'_2(t)u_1(t-s) - u'_1(t)u_2(t-s)dr(t,s) \ \ge 0 . \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. $\square$

Es ergibt sich nun die Frage nach dem Grenzwert des Quotienten $\frac{u'_2(t)}{u'_1(t)}$ für $t\to\infty$, falls der Quotient $\frac{u_2(t)}{u_1(t)}$ einen endlichen Grenzwert besitzt.

Lemma IV.3: u_1 und u_2 seien wie in Beweis von Satz IV.2 konstruiert, und es gelte:

$u_1'(t) > 0$ für alle t, $\lim_{t\to\infty} u_1(t) = \infty$ und $\lim_{t\to\infty} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = c < \infty$.

Dann gilt sogar $\lim_{t\to\infty} \frac{u'_2(t)}{u'_1(t)} = c$.

Bew.: Da $\frac{u_2(t)}{u_1(t)}$ nicht fallend ist, so ist $\lim_{t\to\infty} u_2(t) = \infty$.

Nimmt man nun $\lim_{t\to\infty} \frac{u'_2(t)}{u'_1(t)} \neq c$ an, so folgt unter Verwendung der l'Hospitalschen Regel

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} \neq c ,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. □

Unter diesen Voraussetzungen kann man nun die Ableitung der Funktion v(t) berechnen und erhält, daß v(t) monoton wachsend ist. Man formuliert nun den

Satz IV.4: Besitzt die Gleichung (1≤) positive und monoton unbeschränkt wachsende Lösungen, so besitzt die Gleichung (1=) auch zwei positive und monoton wachsende Lösungen.

Im folgenden wird der Fall monoton nicht wachsender positiver Lösungen von (1≤) betrachtet. Auch hier ist es relativ einfach zu zeigen, daß dann auch die Funktionen der asymptotisch kleineren Lösungsklasse von (1=) monoton nicht wachsend sind.

Lemma IV.4: Ist g(t) eine positive Lösung von (1≤) und existiert ein $T > A$ mit $E(T) \geq A$, so daß $g'(T) < 0$, so gilt für alle $t > T$: $g'(t) < 0$.

Bew.: Aus der Positivität von g und aus (1≤) folgt

$$g''(t) \leq a(t)g'(t) \text{ und}$$

$$g'(t) \leq g'(T)\, e^{\int_T^t a(\tau)d\tau} < 0 \quad \text{für alle } t \geq T. \quad \square$$

Satz IV.5: Ist g(t) eine positive nicht wachsende Lösung von (1≤) mit $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ und $f_2 \in F_2 < F_1$ final positve Lösung von (1=), so ist f_2 monoton fallend.

Bew.: Es wird zunächst gezeigt, daß es in allen Intervallen der Form $[T,\infty)$ Punkte Q gibt, so daß $f'_2(Q) < 0$. Dazu nimmt man an, es existiere ein Punkt R hinreichend groß, so daß $f'_2(t) \geq 0$ für alle $t \geq R$. Nach einem Vergleichssatz /MORGENTHAL,1979: Satz 11/, der noch in einem späteren Kapitel formuliert wird, existiert eine Zahl $m > 0$, so daß gilt:

$$m f_2(t) \leq g(t) \quad \text{für alle } t \geq Q .$$

Es ist nun möglich, die linke Seite dieser Ungleichung durch eine Konstante größer

Null abzuschätzen:

$$m f_2(t) = m(f_2(R) + \int_R^t f'_2(\tau)d\tau) \geq m f_2(R) \text{ ,}$$

d.h. die Funktion mf_2 konvergiert für $t \to \infty$ nicht gegen Null. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Konvergenz von g. Man erhält, daß es in allen Intervallen der Form $[T,\infty)$ Punkte Q gibt, so daß $f'(Q) < 0$. Aus dem Lemma IV.4 folgt die Behauptung. □

Satz IV.6: Sei g eine Lösung von (1≤) und f eine Lösung von (1≥), die positiv und monoton nicht wachsend sind. Weiterhin mögen sich f und g echt monoton durchdringen für alle $t \geq A$. Dann existieren zwei positive und monoton nicht wachsende Lösungen f_1 und f_2 von (1=), die nicht äquivalent sind.

Bew.: O.B.d.A. gelte $f(t) \leq g(t)$ für $t \in [E(A),A]$,

$$f(A) = g(A),$$

$$f'(A) > g'(A).$$

Ansonsten wählt man einen Anfangspunkt größer als A und/oder man nimmt Vielfache von f bzw. g.

(1) u_1 sei wie in Satz IV.2 konstruiert. Dann erfüllen die Funktionen f und u_1 die Voraussetzungen von A'_3, und man erhält,

$\frac{f(t)}{u_1(t)}$ ist monoton nicht fallend für $t \geq A$, d.h. $0 \leq \left(\frac{f(t)}{u_1(t)}\right)' = \frac{f'(t)u_1(t) - f(t)u_1(t)}{f(t)^2}$,

woraus $f(t)u'_1(t) \leq f'(t)u_1(t)$ folgt. Auf Grund der Positivität der Funktionen f und u_1 erhält man $u'_1(t) \leq 0$, d.h. u_1 ist monoton nicht wachsend.

(2) u_2 sei die Lösung von (1=) die bestimmt ist durch

$$u_2(t) = g(t) \quad \text{für alle } t \in [E(A),A]$$

und $$u'_2(A) = g'(A) + \varepsilon \text{ ,}$$

wobei $\varepsilon > 0$ so gewählt ist, daß $f'(A) > u'_2(A) > g'(A)$.

Analog wie in (1) folgt: u_2 ist positiv und monoton nicht wachsend.

Gilt der

Fall 1) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \infty$, so setzt man $f_1 := u_2$ und $f_2 := u_1$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = c < \infty$, so gilt $0 \leq \left(\frac{u_2(t)}{u_1(t)}\right)'$, und hieraus folgt $u_2(t)u'_1(t) \leq u'_2(t)u_1(t)$ und $\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \leq c$.

Es wird nun eine neue Funktion definiert $v(t) := cu_1(t) - u_2(t) \geq 0$.

Differenziert man v, so erhält man

$$v'(t) = cu'_1(t) - u'_2(t) \leq \frac{u_2(t)}{u_1(t)}u'_1 - u'_2(t) \leq 0 \text{ .}$$

Somit ist v monoton nicht wachsend, und man erhält die gesuchten Funktionen durch $f_1 := u_1$ und $f_2 := v$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Im weiteren werden nun konkrete Bedingungen für die Existenz final positiver Lösungen von (1=) angegeben. Die Funktion M(t) sei wie folgt definiert $M(t) := r(t,\sigma(t))$. Auf Grund der Forderungen an den Kern r(t,s), die in der Einleitung formuliert sind, ist die Funktion M(t) in allen Punkten $t > A$ stetig und in A rechtsseitig stetig.
Um eine Vereinfachung der Schreibweise zu erreichen, wird die Gleichung (1=) und die zugehörigen Ungleichungen mit Hilfe

$$u(t) := e^{-\int_A^t a(\tau)d\tau} \quad \text{und} \quad \eta(t,s) := r(t,s)u(t) \tag{IV.1}$$

in $$(u(t)x'(t))' = -\int_0^{\sigma(t)} x(t-s)d\eta(t,s) \tag{IV.2=}$$

transformiert.

Satz IV.7: Ist $\int_A^t \frac{1}{u(\tau)} \int_A^\tau M(s)\, u(s)\, ds\, d\tau < 1$, (IV.3)

so besitzt (IV.2≤) eine positive nicht wachsende Lösung.

Bew.: Setzt man $g(t) := 1 - \int_A^t \frac{1}{u(\tau)} \int_A^\tau M(s)\, u(s)\, ds\, d\tau$, so gilt nach Voraussetzung $0 < g(t) < 1$ und eine kurze Rechnung zeigt, daß g(t) sogar eine Lösung von (IV.2≤) ist:

$$g'(t) = -\frac{1}{u(t)} \int_A^t M(s)u(s)ds < 0$$

$$(u(t)g'(t))' = -M(t)u(t)\cdot 1 \le -M(t)u(t)g(t-\delta(t)) \le -\int_0^{\sigma(t)} g(t-s)d\eta(t,s) \quad \square$$

Folgerung IV.1: Gilt die Relation (IV.3), so besitzt die Gleichung (1=) final positive Lösungen.

Bemerkung IV.1: Im Fall $a(t) \equiv 0$ folgt die Existenz einer final positiven nicht wachsenden Lösung von (1=) aus

$$\int_A^t \int_A^\tau M(s)u(s)ds d\tau < 1.$$

Bemerkung IV.2: Zur Vorbereitung auf den nächsten Satz sei darauf hingewiesen, daß jede positive Lösung x(t) von (IV.2=) der Ungleichung

$$x(t) \le x(A) + x'(A) \int_A^t \frac{1}{u(\tau)} d\tau$$

genügt. Man erhält diese Ungleichung durch Integration der Ungleichung

$$(u(t)x'(t))' = -\int_0^{\sigma(t)} x(t-s)d\eta(t,s) \le 0.$$

Abschließend sei Satz IV.7 angegeben, der eine direkte Folgerung aus dem eben erwähnten ist.

Satz IV.8: Ist $\int_A^\infty \frac{1}{u(\tau)} d\tau = \infty$, und hat (1=) eine positive Lösung x(t), so gilt: $x'(t) \ge 0$.

Satz IV.9: Existiert ein $c > 0$, so daß

$$\int_A^t \int_0^\infty \left(c + \int_A^{\tau-r} \frac{1}{u(s)}\, ds \right) d\eta(\tau,s)\, d\tau \le 1, \tag{IV.4}$$

wobei für $\tau - r < A$ $\;c + \int_A^{\tau-r} \frac{1}{u(s)}\, ds := 1$ gelten soll,

so besitzt (IV.2=) positive Lösungen mit $x'(t) \ge 0$.

Bew.: Sei $\;x(t) := 1\;$ für $t \in [E(A), A]$,

$$0 < \frac{1}{c} \le x'(A), \tag{IV.5}$$

und $x(t)$ sei Lösung von (IV.2=) für alle $t \ge A$.

Auf Grund der Stetigkeit von $x(t)$ ist $x(t) > 0$ für ein gewisses Intervall $[A,B]$ mit $A < B$. Für alle $t \in [A,B]$ gilt unter Ausnutzung von (IV.4) und (IV.5):

$$\begin{aligned} 0 \;\le\; & x'(A) - \int_A^t \int_0^\infty \left(x(A) + x'(A) \int_A^{t-\tau} \frac{1}{u(s)}\, ds \right) d\eta(\tau,r)\, d\tau \;\le \\ & \le\; x'(A) - \int_A^t \int_0^\infty x(\tau - r)\, d\eta(\tau,r)\, d\tau \;=\; x'(t) \;. \end{aligned} \tag{IV.6}$$

Man erhält also $x(t) \ge 1$ und $x'(t) \ge 0$ für alle $t \in [A,B]$. Wie man an der Ungleichung (IV.6) sieht, ist ihre Gültigkeit gesichert, wenn $x(t) \ge 0$ für alle $t \ge A$ gilt. Da $x(B) \ge 1$ ist, kann man wiederum auf Grund der Stetigkeit ein weiteres Intervall $[B,C]$ finden, auf dem die Funktion x nicht negativ ist. Man sieht, daß auch auf diesem die Ableitung von $x(t)$ nicht negativ ist. Durch mehrmalige Wiederholung dieses Schlusses erhält man die echte Positivität der Lösung $x(t)$ und die Gültigkeit der Ungleichung (IV.6) für alle $t \ge A$. □

Bemerkung IV.3: Aus diesem Satz folgt sofort die Existenz positiver nicht fallender Lösungen von (1=) für $M(t) \equiv 0$. In diesem Fall ist (1=) eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Es seien nun weitere hinreichende Bedingungen für die Existenz final positiver Lösungen von (1=) angegeben.

Satz IV.10: Existiert eine auf $[E(A),\infty)$ definierte, integrierbare und auf $[A,\infty)$ stetig differenzierbare Funktion ϕ, die der Ungleichung

$$\phi'(t) + \phi^2(t) \le a(t)\,\phi(t) - \int_0^{\sigma(t)} \exp\Big\{-\int_{t-s}^{t} \phi(\tau)\, d\tau\Big\}\, dr(t,s) \qquad \text{für alle } t \ge A \tag{IV.7}$$

genügt, so besitzt (1=) final positive Lösungen.

Bew.: Die Funktion

$$g(t) := \exp\Big[\int_A^t \phi(\tau)\, d\tau\Big] \qquad \text{, mit } E(A) \le t,$$

Lemma IV.5: Besitzt die Gleichung

$$x''(t) = l\,x'(t) - M_0 x(t-\delta_0)$$

final nicht fallende positive Lösungen, so sind diese auch Lösungen von (1≤).
Bew.: Aus den finalen Eigenschaften folgt die Existenz eines $T \geq A$, so daß die Lösung $x(t)$ monoton nicht fällt und positiv ist, folglich gilt die Ungleichung

$$x''(t) = l\,x'(t) - M_0 x(t-\delta_0) \leq a(t)x'(t) - \int_0^{q(t)} x(t-s)\,dr(t,s)$$

für hinreichend große t. □

Lemma IV.6: Besitzt die Gleichung

$$x''(t) = Lx'(t) - M_0 x(t-\Delta_0)$$

final nicht wachsende positive Lösungen, so sind diese auch Lösungen von (1≤).

Lemma IV.7: Besitzt die Gleichung

$$x''(t) = lx'(t) - m_0 x(t-\delta_0)$$

final nicht wachsende positive Lösungen, so sind diese auch Lösungen von (1≥).

Lemma IV.8: Besitzt die Gleichung

$$x''(t) = Lx'(t) - m_0 x(t-\Delta_0)$$

final nicht fallende positive Lösungen, so sind diese auch Lösungen von (1≥).

Man erhält aus den Lemmata IV.5 und IV.6 aus der Existenz positiver Lösungen solcher Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und konstanter Retardierung die Existenz von final positiven Lösungen von (1=). Wie schon im Kapitel III gezeigt, reduziert sich dieses Problem auf die Untersuchung zugehöriger charakteristischer Gleichungen. Es ist nun noch zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man auf die Existenz nicht äquivalenter Lösungen von (1=) schließen kann. So genügt es, als direkte Folgerung aus Satz IV.5, im Lemma IV.5 vorauszusetzen, daß die Lösung echt monoton und unbeschränkt wachsend ist.

Satz IV.12: Sei $l \leq a(t) \leq L$ sowie $M_0 > 0$, $M_0 \Delta_0 < \infty$. Dann besitzt die Gleichung (1=) mindestens zwei nicht äquivalente final positive und nicht fallende Lösungen, falls

$$\frac{l}{\sqrt{M_0}} \geq 2$$

bzw.

$$0 < \frac{l}{\sqrt{M_0}} \leq 2 \quad \text{und} \quad \sqrt{M_0}\,\delta_0 \geq \gamma_0\!\left(\frac{l}{\sqrt{M_0}}\right)$$

gilt.

Es ist möglich, in den betrachteten Fällen von der Existenz positiver Lösungen der Gleichung (1=) auf die reelle Lösbarkeit der charakteristischen Gleichungen zu schließen. Dies soll der Inhalt der folgenden beiden Sätze sein.

Satz IV.14: Sei $\Delta_0 M_0 < \infty$, $l \leq a(t)$ und $l < 0$. Besitzt (1=) final positive und monoton fallende Lösungen, so hat

$$\lambda^2 = l\lambda - m_0 e^{-\delta_0 \lambda} \tag{IV.10}$$

eine Lösung $\lambda < 0$.

Bew.: Ist $m_0 = 0$, so ist $\lambda = 0$ und $\lambda = l < 0$ einzige Lösung von (IV.10). Es wird daher $m_0 > 0$ vorausgesetzt. Es muß gezeigt werden, daß (IV.10) eine negative Lösung besitzt. Nimmt man das Gegenteil an, so kommt man in folgender Weise zum Widerspruch.

a) g sei eine final positive und monoton fallende Lösung von (1=), d.h. es gibt ein $T > E(A)$, so daß für alle $t \geq E(T)$ gilt:

$$0 < g(t) \qquad \text{und} \qquad g'(t) < 0\,.$$

Hieraus und aus (1=) erhält man

$$g''(t) \leq lg'(t) - m_0 g(t-\delta_0) \qquad \text{für alle } t \geq T. \tag{IV.12≤}$$

g(t) ist also eine final positive und monoton fallende Lösung der Differentialungleichung (IV,12≤), die zu der speziellen Differentialgleichung

$$g''(t) = lg'(t) - m_0 g(t-\delta_0) \qquad \text{für alle } t \geq T \tag{IV.12=}$$

gehört.

Durch Anwendung des Satzes IV.5 erhält man die Existenz einer monoton nicht wachsenden Lösung von (IV.12=).

b) Es wurde angenommen, daß

$$\lambda^2 = l\lambda - m_0 e^{-\delta_0 \lambda}$$

keine negativen Lösungen besitzt. So ist also λ entweder positiv oder komplex.

Ist λ positive Lösung von (IV.10), so besitzt - nach den Ausführungen im Kapitel III - die Gleichung (IV.12=) zwei Klassen positiver monoton wachsender Lösungen. Da in a) gezeigt wurde, daß (IV.12=) eine final positive nicht wachsende Lösung besitzt, hat die Gleichung (IV.12=) drei asymptotisch nicht äquivalente Lösungen, was im Widerspruch zu Satz II.9 steht. Also hat (IV.12=) zwei Klassen positiver nicht wachsender Lösungen.

Sei nun λ komplex und $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$, wobei die $U_2 < U_1$ die Lösungsklassen sind. Ist λ eine Lösung von (IV.10), so gilt

$$e^{\lambda t} = o(u_1(t)).$$

Da λ komplex ist, sind $\mathrm{Re}(e^{\lambda t})$ und $\mathrm{Im}(e^{\lambda t})$ oszillierende Lösungen von (IV.12=), und

Satz II.7 liefert $\mathrm{Re}(e^{\lambda t}) = O(u_2(t))$ und $\mathrm{Im}(e^{\lambda t}) = O(u_2(t))$. Also gilt $e^{\lambda t} = O(u_2(t))$. Wegen $u_2(t) = o(u_1(t))$ erhält man oben genannte Relation.

c) Sei eine Lösung λ^* von (IV.10) gewählt, und es sei $\gamma^* := \mathrm{Re}(\lambda^*)$. Dann gilt nach b) die Beziehung

$$e^{\lambda^* t} = o(u_1(t))$$

und somit (IV.13)

$$e^{\gamma^* t} = o(u_1(t)) .$$

Andererseits gilt (vgl. /HALE/):

(IV.10) hat in $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \gamma^*$ nur endlich viele Nullstellen. Bezeichnet man diese mit $\lambda_1 = \lambda^*, \lambda_2, .. , \lambda_k$ und ihre Vielfachheiten mit $m_1, .. , m_k$, so kann man jede Lösung f von (IV.12=) darstellen als

$$f(t) = \varphi_1(t) + .. + \varphi_k(t) + r(t).$$

Dabei gilt $\varphi_i(t) = P_i(t)\, e^{\lambda_i t}$, $i = 1, .. ,k$,

wobei die $P_i(t)$ Polynome vom Grad kleiner gleich m_i-1 sind und $r(t) = o(e^{\gamma^* t})$ ist.

Speziell läßt sich u_1 in der obigen Form darstellen:

$$u_1(t) = \varphi_1(t) + .. + \varphi_k(t) + r(t). \tag{IV.14}$$

Da $\mathrm{Re}(t^\mu e^{\lambda_i t})$ und $\mathrm{Im}(t^\mu e^{\lambda_i t})$ für $i = 1, . . ,k$ und $\mu = 0, . . ,(m_i-1)$ oszillierende Lösungen von (IV.12=) sind, erhält man wie in b)

$$t^\mu e^{\lambda_i t} = o(u_1(t)) \quad \text{für } i = 1, . . ,k \text{ und } \mu = 0, . . ,(m_i-1).$$

Also gilt auch $\varphi_i(t) = o(u_1(t))$ für $i = 1, . . ,k$.

Dividiert man (IV.14) durch $u_1(t)$ und läßt $t \to \infty$, so erhält man

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(t)}{u_1(t)} = 1 .$$

Hieraus und aus der Abschätzung von r(t) folgt

$$u_1(t) = o(e^{\gamma^* t}),$$

was im Widerspruch zu (IV.13) steht. Damit ist der Satz bewiesen. □

Einen analogen Satz erhält man bei der Existenz monoton wachsender Lösungen, der hier aber nicht bewiesen werden soll, da der Beweis analog geführt werden kann.

Satz IV.15: Ist $L > 0$ und besitzt die Gleichung (1=) final positive und monoton wachsende Lösungen, so hat

$$\lambda^2 = L\lambda - m_0 e^{-\Delta_0 \lambda}$$

eine Lösung $\lambda > 0$.

(2) (1=) möge zwei Klassen $F_2 < F_1$ final positiver und monoton wachsender Lösungen besitzen. Ist $L > 0$, dann hat

$$\lambda^2 = L\lambda - m_0 e^{-\Delta_0 \lambda} \tag{V.4}$$

die positiven Lösungen λ_1 und λ_2 mit $\lambda_2(L;m_0,\Delta_0) \leq \lambda_1(L;m_0,\Delta_0)$. Für jede Lösung $f \in F_2 < F_1$ von (1=) existieren Zahlen k_1, $k_2 > 0$, so daß für alle hinreichend großen t gilt:

$$k_2 x_2(t;L,m_0,\Delta_0) \leq f(t) \leq k_1 x_1(t;L,m_0,\Delta_0). \tag{V.5}$$

Bew.:

(1) Da (1=) zwei Klassen final positive und monoton fallende Lösungen besitzt und $l < 0$, hat (V.3) nach Satz IV.14 eine Lösung $\lambda < 0$. Also hat (V.3) die Lösungen λ_1 und λ_2 mit $\lambda_2(l,m_0,\delta_0) \leq \lambda_1(l,m_0,\delta_0) < 0$. Die spezielle Differentialgleichung

$$x''(t) = lx'(t) - m_0 x(t-\delta_0) \tag{V.6=}$$

hat daher zwei Klassen final positive und monoton fallende Lösungen, die durch $x_1(t;l,m_0,\delta_0)$ und $x_2(t;l,m_0,\delta_0)$ repräsentiert werden. Da f final positiv und monoton fallend ist, existiert ein $T \geq A$, so daß f Lösung von (V.6≤) für $t \geq T$ ist. Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz V.1.

(2) wird hier nicht ausgeführt, da der Beweis analog erfolgt. □

Weiterhin werden noch zwei allgemeingültige Sätze für Funktionensysteme mit der Eigenschaft A'_3 angegeben. Dabei ist der Satz V.3 eine Folgerung aus den Sätzen /MORGENTHAL,1979; Th. 4,5/ und der Satz V.4 eine direkte Folgerung aus V.3.

<u>Satz</u> V.3: M möge zwei Klassen final positiver Funktionen $F_2 < F_1$ besitzen. Sei $f_i \in F_i$, $i = 1,2$. Weiter sei f final positive Funktion von M_1 und g von M^1. Dann gilt:

1. Entweder ist $f_1 = O(f)$ oder $f = O(f_2)$.
2. Es gilt $f_2 = O(g)$ und $g = O(f_1)$.

<u>Satz</u> V.4: M möge zwei Klassen final positiver Funktionen $F_2 < F_1$ besitzen. Sei $f_i \in F_i$, $i = 1,2$. Weiterhin mögen Funktionen φ_i und ϕ_i, $i = 1,2$ existieren, die Elemente aus M^1 bzw. M_1 sind und den folgenden Bedingungen genügen:

$$\phi_2 = O(\varphi_2)\ , \quad \varphi_2 = o(\varphi_1)\ , \quad \varphi_1 = O(\phi_1).$$

Dann gilt:

$$\varphi_1 = O(f_1) \text{ und } f_1 = O(\phi_1) \text{ sowie} \tag{V.7}$$

$$\phi_2 = O(f_2) \text{ und } f_2 = O(\varphi_2). \tag{V.8}$$

Bew.: Satz V.3/2. liefert sofort

$$\varphi_1 = O(f_1) \text{ und } f_2 = O(\varphi_2)\,. \qquad \text{(V.9)}$$

Nach Satz V.3/1. gilt nun entweder $f_1 = O(\psi_1)$ oder $\psi_1 = O(f_2)$. Wäre $\psi_1 = O(f_2)$, so wäre wegen $\varphi_2 = o(\psi_1)$ auch $\varphi_2 = o(f_2)$, was im Widerspruch zu (V.9) steht. Also gilt $f_1 = O(\psi_1)$. Für ψ_2 liefert der Satz V.3/1. wieder, entweder ist $f_1 = O(\psi_2)$ oder $\psi_2 = O(f_2)$. Wäre $f_1 = O(\psi_2)$, so wäre wegen $\psi_2 = o(\varphi_1)$ auch $f_1 = o(\varphi_1)$ im Widerspruch zu (V.9). Also gilt $\psi_2 = O(f_2)$. □

Weiterhin ist es sogar für allgemeine Funktionensysteme mit A'_3 möglich, die Relationen (V.7) zu verschärfen. In Vorbereitung des nächsten Satzes sei das folgende Lemma bewiesen.

Lemma V.1: f sei ein final positives Element aus M_1, zu dem ein final positives Element u aus M^1 existieren möge mit $u = o(f)$. Ist dann g ein final positives Element aus M^1, so konvergiert der Quotient $\frac{g(t)}{f(t)}$ für $t \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert.

Bew.: Man wählt ein $T_1 \geq A$, so daß f(t), g(t) und u(t) für $t \geq E(T_1)$ positiv sind. Weiter wählt man ein $\alpha > 0$, so daß

$$f(t) < \alpha u(t) \quad \text{für alle } t \in [E(T_1), T_1] \text{ ist.}$$

Nun existiert ein $T_2 > T_1$ mit $f(T_2) > \alpha u(T_2)$, da anderenfalls $f = O(u)$ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung. Man wählt nun noch ein $\beta > 0$, so daß gilt:

$$f(T_2) > \alpha u(T_2) + \beta g(T_2).$$

Offenbar gilt $f(t) < \alpha u(t) + \beta g(t)$ für alle $t \in [E(T_1), T_1]$.

Ist dann $T_3 := \inf\{t > T_1 : f(t) > \alpha u(t) + \beta g(t)\}$,

so gilt $T_1 < T_3$ und $f(t) \leq \alpha u(t) + \beta g(t)$ für alle $t \in [E(T_3), T_3]$,

$$f(T_3) = \alpha u(T_3) + \beta g(T_3).$$

Nach A'_3 ist der Quotient

$$\frac{f(t)}{\alpha u(t) + \beta g(t)} \quad \text{für alle } t \geq T_3 \text{ monoton wachsend.}$$

Daher konvergiert $\frac{\alpha u(t) + \beta g(t)}{f(t)}$ für $t \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert.

Wegen $u = o(f)$ folgt hieraus die Behauptung. □

Es folgt nun eine konkrete Anwendung dieser Sätze.

Satz V.5: Sei $l \le a(t) \le L$, $M_0\Delta_0 < \infty$.
(1) Besitzt die Gleichung

$$\lambda^2 = L\lambda - M_0 e^{-\Delta_0\lambda}$$

negative reelle Wurzeln, so gilt: (1=) hat zwei Klassen und

$$x_2(t; l, m_0, \delta_0) = O(f_2) \text{ und } f_2 = O(x_2(t; L, M_0, \Delta_0)) \text{ sowie} \tag{V.10.1}$$

$$x_1(t; L, M_0, \Delta_0) = O(f_1) \text{ und } f_1 = O(x_1(t; l, m_0, \delta_0)). \tag{V.11.1}$$

(2) Besitzt die Gleichung

$$\lambda^2 = l\lambda - M_0 e^{-\delta_0\lambda}$$

positive reelle Lösungen und gilt $\sqrt{m_0}\,\Delta_0 \ge \sqrt{M_0}\,\delta_0$,

so gilt: (1=) hat zwei Lösungsklassen und

$$x_2(t; L, m_0, \Delta_0) = O(f_2) \text{ und } f_2 = O(x_2(t; l, M_0, \delta_0)) \text{ sowie} \tag{V.10.2}$$

$$x_1(t; l, M_0, \delta_0) = O(f_1) \text{ und } f_1 = O(x_1(t; L, m_0, \Delta_0)). \tag{V.11.2}$$

Bew.: Die Existenz von zwei Klassen final positiver Lösungen von (1=) folgt aus den Sätzen IV.12 und IV.13.
(1) Unter Verwendung der Behauptungen aus Kapitel III. und unter Hinzunahme der im Beweis von Satz IV.12 erhaltenen Ungleichungen kommt man zur Gültigkeit von

$$\sqrt{\frac{M_0}{m_0}}\,\lambda_2(l, m_0, \delta_0) \le \lambda_2(L, M_0, \Delta_0) \le \lambda_1(L, M_0, \Delta_0) \le \sqrt{\frac{M_0}{m_0}}\,\lambda_1(l, m_0, \delta_0) \le \lambda_1(l, m_0, \delta_0) < 0. \tag{V.12.1}$$

Setzt man

$$\varphi_2(t) := x_2(t; L, M_0, \Delta_0),$$

$$\varphi_1(t) := x_1(t; L, M_0, \Delta_0),$$

$$\psi_1(t) := x_1(t; l, m_0, \delta_0),$$

so erhält man mit Satz V.4 bis auf $x_2(t; l, m_0, \delta_0) = O(f_2)$ alle Aussagen.
Die nun noch fehlende Aussage ist jedoch schon mit Satz V.2 gesichert.
(2) Unter Hinzunahme der zusätzlichen Forderung $\sqrt{m_0}\,\Delta_0 \ge \sqrt{M_0}\,\delta_0$ erhält man wiederum:

$$0 < \lambda_2(L, m_0, \Delta_0) \le \sqrt{\frac{M_0}{m_0}}\,\lambda_2(L, m_0, \Delta_0) \le \lambda_2(l, M_0, \delta_0) \le \lambda_1(l, M_0, \delta_0) \le \sqrt{\frac{M_0}{m_0}}\,\lambda_1(L, m_0, \Delta_0). \tag{V.12.2}$$

Setzt man

$$\psi_2(t) := x_2(t; L, m_0, \Delta_0),$$

$$\varphi_2(t) := x_2(t; l, M_0, \delta_0),$$

$$\varphi_1(t) := x_1(t; l, M_0, \delta_0),$$

so erhält man erneut mit Satz V.4 bis auf $f_1 = O(x_1(t;L,m_0,\Delta_0))$ alle Aussagen. Die fehlende Aussage sichert Satz V.2 . $\square$

Mit Lemma V.1 soll die Relation (V.11.ı) verschärft werden.

Satz V.6: Unter den Voraussetzungen des Satzes V.5 existieren endliche Grenzwerte:

(1) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f_1(t)}{x_1(t;l,m_0,\delta_0)}$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_1(t;L,M_0,\Delta_0)}{f_1(t)}$,

(2) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f_1(t)}{x_1(t;L,m_0,\Delta_0)}$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_1(t;l,M_0,\delta_0)}{f_1(t)}$,

wobei $f_1 \in F_1 > F_2$ sein soll.
Bew.: Der Beweis wird wieder nur für (1) geführt, da (2) analog übertragen werden kann. Wendet man nun Lemma V.1 an mit $f(t) = x_1(t;l,m_0,\delta_0)$, $g = f_1$ und $u = f_2 \in F_2$, so erhält man die Existenz des ersten Grenzwertes. $u = o(f)$ ist erfüllt, da $f_2 = o(f_1)$ und nach Satz V.5 $f_1 = O(x_1(t;l,m_0,\delta_0))$ gilt.
Die Existenz des zweiten Grenzwertes erhält man mit Lemma V.1 und $f = f_1$, $g = x_1(t;L,M_0,\Delta_0)$ und $u = f_2$. $\square$

Man kann annehmen, daß eine analoge Abschätzung des Grenzwertes auch für (V.10.ı) möglich ist. Hier ist es jedoch nur möglich gewesen eine solche Aussage für (V.10.1) zu beweisen.

Lemma V.2: Sei g final positiv und monoton fallende Lösung von (1≤) mit

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{g(E(t))} > 0 \,. \tag{V.13}$$

Dann gilt:
(1) Ist h eine oszillierende Lösung von (1≥), so ist $h^+ := \max\{h,0\} = o(g)$.
(2) Ist f eine final positive Lösung von (1≥) mit $f = O(g)$, so konvergiert der Quotient

$\dfrac{f(t)}{g(t)}$ für $t\to\infty$ gegen einen endlichen Grenzwert.

Bew.: (1) Wegen (V.13) kann man eine Stelle $S > A$ und eine Zahl $1 > k > 0$ wählen, so daß $0 < g(t)$ für $t \ge E(S)$, $g'(t) < 0$ für $t \ge S$ und

$$\frac{g(t)}{g(E(t))} > k > 0 \tag{V.14}$$

für alle $t \ge S$ gilt.
Sei nun $\alpha > 0$ so gewählt, daß $h(t) < \alpha g(t)$ für $t \in [E(S),S]$ ist. Diese Ungleichung bleibt für alle $t \ge S$ bestehen. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine kleinste Stelle $T_1 > S$ mit $h(T_1) = \alpha g(T_1)$. Für diese Stelle wäre dann außerdem $h(t) \le \alpha g(t)$ für $t \in [E(T_1),T_1]$ und nach A'_3 würde $h(t) \ge \alpha g(t) > 0$ für alle $t \ge T_1$ folgen. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Oszilliertheit von h. Also gilt tatsächlich

$$h(t) < \alpha g(t) \quad \text{für alle } t \ge E(S).$$

Da h oszilliert, kann man ein R so wählen, daß $E(R) \geq S$ und $h'(R) \geq 0$ ist. Man betrachtet die Lösung $g_1 := \alpha g - h$ von (1≥). Da g_1 auf $[E(S), \infty)$ positiv ist und $g_1'(R) < 0$, folgt aus Bemerkung IV.2, daß g_1 monoton fallend für $t \geq R$ ist. Man wählt nun ein S_1, so daß $E(S_1) \geq R$ und $h(S_1) = 0$ ist. Man kann nun zeigen, daß dann

$$h(t) < \alpha(1-k)\,g(t) \qquad \text{für alle } t \geq E(S_1) \text{ gilt.} \tag{V.15}$$

Auf Grund des Monotonieverhaltens von g_1 gilt für alle $t \in [E(S_1), S_1]$ die Ungleichung

$$g_1(t) \geq g_1(S_1)$$

und wegen $h(S_1) = 0$

$$\alpha g(t) - h(t) \geq \alpha g(S_1).$$

Damit gilt auf $[E(S_1), S_1]$ $\quad h(t) \leq \alpha(g(t) - g(S_1)) = \alpha\left(1 - \frac{g(S_1)}{g(t)}\right) g(t).$

Auf Grund der Monotonie von g und (V.14) folgt

$$h(t) \leq \alpha\left(1 - \frac{g(S_1)}{g(E(S_1))}\right) g(t) < \alpha(1-k)\,g(t).$$

Damit ist (V.15) für alle $t \in [E(S_1), S_1]$ als richtig erkannt. Analog der obigen Aussage folgt, daß (V.15) für alle $t \geq S_1$ bestehen bleibt. Durch wiederholte Anwendung der benutzten Schlußweise erhält man:
Zu jeder natürlichen Zahl i existiert ein S_i, so daß

$$h(t) < \alpha(1-k)^i\,g(t) \qquad \text{für alle } t \geq E(S_i) \text{ gilt.}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.
(2) Wegen $f = O(g)$ gilt

$$0 \leq c = \varliminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} \leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = C < \infty .$$

Wäre $c < C$, so wäre

$$h = f - \frac{c+C}{2} g \qquad \text{eine oszillierende Lösung von (1≥),}$$

für die $\varlimsup_{t\to\infty} \frac{h(t)}{g(t)} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} - \frac{c+C}{2} = -\frac{c+C}{2} > 0$ gilt,

was im Widerspruch zur Behauptung (1) steht. Also muß $c = C$ sein. Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen. □

<u>Lemma</u> V.3: Es mögen final positive und monoton fallende Lösungen f von (1≥) und u von (1≤) existieren mit $f = o(u)$ und es gelte

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{f(t)}{f(E(t))} > 0 . \tag{V.16}$$

Dann gilt (V.14) für jede final positive und monoton fallende Lösung von (1≤).
Bew.: Man wählt ein T_1 mit $E(E(T_1)) \geq A$, so daß f, g, u auf $[E(E(T_1)), \infty)$ positiv und monoton fallend sind. Sei nun eine beliebige Stelle $T_2 \geq T_1$ gewählt und

$$\gamma := \max\left\{\frac{f(t)}{g(t)} : E(E(T_2)) \le t \le E(T_2)\right\}.$$

Dann ist $f(t) \le \gamma g(t)$ für alle t mit $E(E(T_2)) \le t \le E(T_2)$, und es existiert ein $P \in [E(E(T_2)), E(T_2)]$ mit $f(P) = \gamma g(P)$.
Es wird nun gezeigt, daß für alle $t \ge E(T_2)$ gelten muß: $f(t) \le \gamma g(t)$.
Angenommen, es existiert ein $T_3 \ge E(T_2)$ mit $f(T_3) > \gamma g(T_3)$, so kann man ein $\beta > 0$ wählen, so daß gilt:

$$f(T_3) > \gamma g(T_3) + \beta u(T_3).$$

Außerdem gilt auf Grund der Wahl von γ: $f(t) < \gamma g(t) + \beta u(t)$ für alle t mit $E(E(T_2)) \le t \le E(T_2)$. Ist daher

$$T_4 := \inf\{t > E(T_2) : f(t) > \gamma g(t) + \beta u(t)\},$$

so ist $E(T_2) < T_4$ und

$$f(t) \le \gamma g(t) + \beta u(t) \quad \text{für alle } t \in [E(T_4), T_4],$$

$$f(T_4) = \gamma g(T_4) + \beta u(T_4).$$

Nach A'_3 folgt $f(t) \ge \gamma g(t) + \beta u(t) > \beta u(t)$ für alle $t \ge T_4$ im Widerspruch zur Voraussetzung $f = o(u)$.
Also gilt für alle $t \ge E(T_2)$ $\quad f(t) \le \gamma g(t)$. (V.17)
Aus (V.16) und (V.17) folgt nun

$$\frac{\gamma g(t)}{f(t)} \ge \frac{\gamma g(P)}{f(P)} = 1 \quad \text{für alle } t \ge E(T_2).$$

Bei spezieller Wahl $t = T_2$ erhält man

$$\frac{g(T_2)}{g(P)} \ge \frac{f(T_2)}{g(P)}. \tag{V.18}$$

Wegen $E(E(T_2)) \le P \le E(T_2)$ und der Monotonie von g und f ist $g(P) \ge g(E(T_2))$ und $f(P) \le f(E(E(T_2)))$. Daher folgt aus (V.18)

$$\frac{g(T_2)}{g(E(T_2))} \ge \frac{f(T_2)}{f(E(E(T_2)))} = \frac{f(T_2)}{f(E(T_2))}\,\frac{f(E(T_2))}{f(E(E(T_2)))}.$$

Da diese Ungleichung für jede Stelle $T_2 \ge T_1$ gilt, folgt unter Ausnutzung von (V.16) die Behauptung. □

Es sollen nun diese beiden Lemmata auf die Relation (V.10.1) angewendet werden.

<u>Lemma</u> V.4: Ist $\Delta_0 < \infty$, $\lambda < 0$, so gilt für die Funktionen $e^{\lambda t}$ die Relation

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda E(t)}} > 0.$$

Dies folgt direkt aus der Ungleichung

$$\frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda E(t)}} \ge \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda(t-\Delta_0)}} = e^{-\lambda\Delta_0} > 0.$$

Satz V.7: Unter den Voraussetzungen des Satzes V.5 und der Einschränkung auf den Fall 1), d.h. der Existenz negativer reeller Wurzeln von

$$\lambda^2 = L\lambda - M_0 e^{-\Delta_0 \lambda} ,$$

existieren endliche Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f_2(t)}{x_2(t; L, M_0, \Delta_0)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x_2(t; l, m_0, \delta_0)}{f_2(t)},$$

wobei $f_2 \in F_2 < F_1$.

Bew.: Betrachtet man den Fall einer Gleichung mit konstanten Koeffizienten und konstanter Retardierung, so ist die Behauptung offenbar richtig. Dies ergibt sich aus der in /HALE/ bewiesenen Möglichkeit der Darstellung jeder Lösung von (1=) als eine gewisse Summe von Exponentialfunktionen der charakteristischen Wurzeln (siehe Bew. von Satz IV.13).

Schließt man den ebend betrachteten Fall aus ,so kann man wie folgt schließen.

Setzt man $f := x_2(t; l, m_0, \delta_0)$,

$u := x_2(t; L, M_0, \Delta_0)$

und nutzt die Relation (V.12.1), so erfüllen diese Funktionen die Voraussetzungen des Lemma V.3. Man erhält weiterhin die Gültigkeit von (V.16) für $x_2(t; L, M_0, \Delta_0)$ und $f_2(t)$. Wendet man nun Lemma V.2/(2) zum einen auf das Paar $f := f_2$ und $g := x_2(t; L, M_0, \Delta_0)$ und zum anderen auf das Paar $f := x_2(t; l, m_0, \delta_0)$ und $g := f_2$ an, so erhält man die Existenz der Grenzwerte. $\square$

VI. Bedingungen für das Auftreten ausschließlich oszillierender Lösungen

In diesem Kapitel soll versucht werden, notwendige Bedingungen für das Auftreten ausschließlich oszillierender Lösungen von (1=) anzugeben. Dazu wird sich hauptsächlich auf die Ergebnisse des 4.Kapitel aus /LADDE/ bezogen.
Es wird die Gleichung (1=) und die zugehörigen Ungleichungen mittels

$$u(t) := e^{-\int_A^t a(\tau)d\tau} \quad \text{und} \quad \eta(t,s) := r(t,s)u(t)$$

in
$$(u(t)x'(t))' = -\int_0^{\sigma(t)} x(t-s)d\eta(t,s) \tag{VI.1=}$$

transformiert.
Diese Gleichung entspricht der, die in /LADDE/ untersucht wurde.

<u>Satz</u> VI.1 /LADDE,Th.4.7.1/ :

(i) 1) $\eta(t,s)$ ist meßbar und von beschränkter Variation in s für fixierte t,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^{\min(\sigma(t_0),\sigma(t))} |\eta(t,s) - \eta(t_0,s)|\, ds = 0$ für $t_0 \in \mathbb{R}^+$,

3) $\bigvee_0^{\sigma(t)} \eta(t,s) \le m(t)$ für $t \in \mathbb{R}^+$, wobei m lokal integrierbar in $\mathbb{R}^+$ sei,

4) $\eta(t,s)$ ist nicht fallend in s für festes t und nicht negativ in t für festes s.

(ii) 1) $0 < \sigma(t) < t$, $\sigma \in C^1([A,\infty))$, $\sigma'(t) \le 1$ und $\lim\limits_{t\to\infty} (t-\sigma(t)) = \infty$,

2)
$$\int_A^\infty \frac{1}{u(\tau)}\, d\tau = \infty, \tag{VI.2}$$

3) es existieren zwei positive Funktionen $\rho \in C^2(0,\infty)$ und $\Phi \in C^1(0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

$\rho'(t) \ge 0$, $(u(t)\rho'(t))' \le 0$, $\Phi'(t) \ge 0$,

$$\int_\delta^\infty \frac{1}{t\Phi(t)}\, dt < \infty, \quad \int_{-\delta}^{-\infty} \frac{1}{t\Phi(t)}\, dt < \infty \quad \text{für gewisse } \delta > 0, \tag{VI.3}$$

$$\int_{T_2}^\infty \frac{\rho(t-\sigma(t))}{\Phi(\alpha R_T(t-\sigma(t)))} \bigvee_0^{\sigma(t)} \eta(t,s)\, dt = \infty \quad \text{für gewisse } T > A,\ T_2 > T,\ \alpha > 0 \text{ const.} \tag{VI.4}$$

und
$$R_T(t) = \int_T^t \frac{1}{u(\tau)}\, d\tau.$$

Dann oszillieren alle Lösungen von (VI.1=).

Bew.: Angenommen, es existiert eine nicht oszillierende Lösung x(t) von (VI.1=). O.B.d.A. $x(t) > 0$ für alle $t > T$. Aus (VI.1=) folgt nun $(u(t)x'(t))' \le 0$ für alle $t \ge T$ und wegen (VI.2) folgt die Gültigkeit von $x'(t) \ge 0$ für alle $t \ge T_1 \ge T$ durch Satz IV.7. Hieraus erhält man $u(t)x'(t) \leq u(T_1)x'(T_1)$ für alle $t \geq T_1$ bzw. $x'(t) \leq \frac{u(T_1)x'(T_1)}{u(t)}$.

Integriert man diese Ungleichung von T_1 bis $t-\sigma(t)$ und beachtet, daß der Quotient

$\frac{x(T_1)}{R_{T_1}(t-\sigma(t))}$ für große t gegen Null geht, erhält man die Gültigkeit von

$$x(t-\sigma(t)) \leq \alpha R_{T_1}(t-\sigma(t)) \quad \text{für } t \geq T_2\,, \tag{VI.5}$$

wobei T_2 hinreichend groß sein soll, so daß für $t \geq T_2$ gilt: $t-\sigma(t) > T_1$.
Multipliziert man (VI.1=) mit $\rho(t-\sigma(t))/x(t-\sigma(t))\,\Phi(\alpha R_{T_1}(t-\sigma(t))$ und integriert über $[T_2,t]$, erhält man

$$\int_{T_2}^{t} \frac{\rho(\tau-\sigma(\tau))(u(\tau)x'(\tau))'}{x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))}\,d\tau + \int_{T_2}^{t} \frac{\rho(\tau-\sigma(\tau))}{x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))}\Big[\int_0^{\sigma(\tau)} x(\tau-s)\,d\eta(\tau,s)\Big]d\tau = 0.$$

Durch partielle Integration des ersten Integrals und unter Beachtung der Gültigkeit von

$\frac{x(t-s)}{x(t-\sigma(t))} \geq 1$ für $0 \geq s \geq \sigma(t)$ erhält man die Ungleichung

$$\frac{\rho(t-\sigma(t))\,u(t)x'(t)}{x(t-\sigma(t))\Phi(\alpha R_{T_1}(t-\sigma(t)))} - \int_{T_2}^{t}(u(\tau)x'(\tau))\big[\rho'(\tau-\sigma(\tau))(1-\sigma'(\tau))x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))$$

$$-\ \rho(\tau-\sigma(\tau))[x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))]'\big] / (x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau))))^2 d\tau$$

$$-\ c + \int_{T_2}^{t} \frac{\rho(\tau-\sigma(\tau))}{\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))} \int_0^{\sigma(\tau)} d\eta(\tau,s)\,d\tau \leq 0,$$

wobei c eine Konstante ist, die die untere Integrationsgrenze T_2 zum ersten Summanden verkörpert.
Es wird nun der erste Teil des Integrals in der oben stehenden Ungleichung untersucht. Dabei wird die Gültigkeit von (VI.5) und $(u(t)x'(t))' \leq 0$ für die betrachteten τ benutzt.

$$\int_{T_2}^{t} \frac{u(\tau)x'(\tau)\rho'(\tau-\sigma(\tau))(1-\sigma'(\tau))}{x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))}\,d\tau \leq \int_{T_2}^{t} \frac{u(\tau-\sigma(\tau))x'(\tau-\sigma(\tau))\rho'(\tau-\sigma(\tau))(1-\sigma'(\tau))}{x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))}\,d\tau$$

$$\leq u(T_2-\sigma(T_2))\rho'(T_2-\sigma(T_2)) \int_{x(T_2-\sigma(T_2))}^{x(t-\sigma(t))} (x\,\Phi(x))\,dx < \infty$$

Der zweite Teil dieses Integrals ist in jedem Fall negativ,

da $$\int_{T_2}^{t} \frac{u(\tau)x'(\tau)\rho(\tau-\sigma(\tau))[x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))]'}{[x(\tau-\sigma(\tau))\Phi(\alpha R_{T_1}(\tau-\sigma(\tau)))]^2}\,d\tau \geq 0.$$

Die Voraussetzung (VI.4) ergibt nun, daß das dritte Integral für $t \mapsto \infty$ gegen $+\infty$ geht. Dies impliziert jedoch, daß

$$\frac{\rho(t-\sigma(t))\,u(t)x'(t)}{x(t-\sigma(t))\Phi(\alpha R_{T_1}(t-\sigma(t)))} \longrightarrow -\infty \quad \text{für } t\to\infty \text{ gilt.}$$

Dies steht im Widerspruch zur Nichtnegativität von x' für alle $t \geq T_1$, da alle in diesem Quotienten auftretenden Funktionen positiv sind.
Damit ist der Beweis vollständig. □

Setzt man nun

$$\rho(t) := \int_T^t e^{\int_A^\tau a(s)ds}\, d\tau$$

und

$$\Phi(t) := t^\varepsilon \quad \text{mit } 0 < \varepsilon \leq 1,$$

so ist

$$\int_{T_2}^\infty R_T^{1-\varepsilon}(t-\sigma(t)) \bigvee_0^\infty \eta(t,s)\, dt = \infty$$

hinreichend für das Auftreten ausschließlich oszillierender Lösungen von (VI.1=).

Der zweite Satz beschäftigt sich nun mit dem Fall, daß $\int_A^\infty \frac{1}{u(\tau)}\, d\tau < \infty$ ist.

Satz VI.2 /LADDE,Th.4.7.2/: Es seien die Bedingungen (i) und (ii)/1) des Satzes VI.1 erfüllt, und es gelte

$$\int_A^\infty \frac{1}{u(\tau)}\, d\tau < \infty \quad .$$

Zusätzlich wird angenommen, daß eine positive Funktion $\Theta(t) \in C^2(0,\infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\Theta'(t) \leq 0, \quad (u(t)\Theta'(t))' \geq 0,$$

$$\int_A^\infty \frac{1}{\Theta(t)u(t)}\, dt = \infty \quad \text{und}$$

$$\int_A^\infty \Theta(t) \bigvee_0^{\sigma(t)} \eta(t,s)\, dt = \infty \quad \text{existiert.}$$

Dann oszillieren alle Lösungen von (VI.1=), also auch von (1=).
Bew.: Angenommen, es existiert eine positive Lösung $x(t) > 0$ für $t \geq E(T_1)$. Dann folgt, daß $u(t)x'(t)$ nicht wachsend für $t \geq T_1$ ist, und so ist $x'(t)$ für hinreichend große t von gleichem Vorzeichen. Multipliziert man (VI.1=) mit $\Theta(t)/x(t-\sigma(t))$ und integriert von T_1 bis t, so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\Theta(t)u(t)x'(t)}{x(\tau-\sigma(\tau))} + \int_{T_1}^t \frac{\Theta(\tau)u(\tau)x'(\tau)[x(\tau-\sigma(\tau))]'}{x(\tau-\sigma(\tau))^2}\, d\tau = \\ &= c + \int_{T_1}^t \frac{u(\tau)x'(\tau)\Theta'(\tau)}{x(\tau-\sigma(\tau))}\, d\tau - \int_{T_1}^t \frac{\Theta(\tau)}{x(\tau-\sigma(\tau))} \int_0^{\sigma(\tau)} x(\tau-s)\, d\eta(\tau,s)\, d\tau, \end{aligned} \tag{VI.6}$$

wobei c eine Konstante ist.

Fall 1: $x'(t) \geq 0$ für $t \geq E(T_1)$. Die linke Seite von (VI.6) ist nicht negativ. Das erste Integral auf der rechten Seite ist nicht positiv, und für das zweite Integral gilt

$$\int_{T_1}^{t} \frac{\Theta(\tau)}{x(\tau-\sigma(\tau))} \int_0^{\sigma(\tau)} x(\tau-s)\, d\eta(\tau,s)\, d\tau \geq \int_{T_1}^{t} \Theta(\tau) \int_0^{\sigma(t)} d\eta(\tau,s)\, d\tau \longrightarrow \infty \quad \text{für } t\to\infty.$$

Damit erhält man einen Widerspruch zur Nichtnegativität der linken Seite.
Fall 2: $x'(t) \leq 0$ für $t \geq E(T_1)$. Multipliziert man (VI.1=) mit $\Theta(t)/x(t)$ und integriert von T_1 bis t, so erhält man eine ähnliche Gleichung wie (VI.6). Da $u(t)x'(t)$ nicht wachsend und $x'(t) \leq 0$ ist, gilt:

$$\int_{T_1}^{t} \frac{u(\tau)x'(\tau)\Theta'(\tau)}{x(\tau)}\, d\tau \leq u(T_1)\Theta'(T_1) \int_{T_1}^{t} \frac{x'(\tau)}{x(\tau)}\, d\tau = u(T_1)\Theta'(T_1)[\ln x(t) - \ln x(T_1)] < \infty$$

und
$$\int_{T_1}^{t} \frac{\Theta(\tau)}{x(\tau)} \int_0^{\sigma(\tau)} x(\tau-s)\, d\eta(\tau,s)\, d\tau \geq \int_{T_1}^{t} \Theta(\tau) \int_0^{\sigma(t)} d\eta(\tau,s)\, d\tau \longrightarrow \infty \quad \text{für } t\to\infty.$$

Folglich kann man ein $T_2 \geq T_1$ so wählen, daß die rechte Seite von (VI.6) kleiner als -1 ist, d.h.

$$1 + \int_{T_2}^{t} \frac{\Theta(\tau)u(\tau)[x'(\tau)]^2}{x(\tau)^2}\, d\tau \leq -\frac{\Theta(t)u(t)x'(t)}{x(t)} \quad \text{für } t \geq T_2. \tag{VI.7}$$

Multipliziert man beide Seiten der Ungleichung mit der positiven Größe

$$-\frac{x'(t)}{x(t)}\left[1 + \int_{T_2}^{t} \frac{\Theta(\tau)u(\tau)[x'(\tau)]^2}{x(\tau)^2}\, d\tau\right]^{-1}$$

und integriert von T_2 bis t, so erhält man

$$\ln\frac{x(T_2)}{x(t)} \leq \ln\left[1 + \int_{T_2}^{t} \frac{\Theta(\tau)u(\tau)[x'(\tau)]^2}{x(\tau)^2}\, d\tau\right]. \tag{VI.8}$$

Aus (VI.7) und (VI.8) folgt nun $x(T_2) \leq -\Theta(t)u(t)x'(t)$ für alle $t \geq T_2$.
Durch Integration dieser Ungleichung erhält man

$$x(t) - x(T_2) \leq -x(T_2) \int_{T_2}^{t} \frac{1}{\Theta(\tau)u(\tau)}\, d\tau \longrightarrow -\infty \text{ für } t\to\infty.$$

Dies widerspricht jedoch der Annahme, daß $x(t) > 0$ ist.
Somit wurde gezeigt, daß es keine positiven Lösungen von (VI.1=) geben kann. □

Zur Abrundung dieses Kapitels sei ein anderes Oszillationskriterium angegeben, welches eine gute Ergänzung zu dem Satz IV.11 (Existenz final positiver Lösungen) ist.

Lemma VI.1: Sei $a(t) \le L$ und $m_0 > 0$. Sei $g(t)$ eine final positive und monoton nicht fallende Lösung von (1≤) und $\alpha > 0$ beliebig, dann existiert ein $T \ge A$ und eine Konstante $K > 0$, so daß für alle $t \ge T$ gilt:

$$0 < K \le \frac{g(t)}{g(t+\alpha)}. \tag{VI.9}$$

Bew.: Aus den finalen Eigenschaften von g folgt die Existenz eines $T \ge A$, so daß g positiv und nicht fallend für alle $t \ge T$ ist. Somit ist $g(t)$ auch Lösung der Ungleichung

$$x''(t) \le Lx'(t) \quad \text{für alle } t \ge T \ge A. \tag{VI.10≤}$$

Die spezielle Gleichung (VI.10=) besitzt die Lösungen $x_1(t) \equiv e^{Lt}$ und $x_2(t) \equiv c > 0$. Da $L > 0$ ist, gilt $x_2(t) = o(x_1(t))$. Durch Anwendung des Satzes V.1 erhält man die Existenz reeller echt positiver Zahlen m und n, so daß

$$mx_2(t) \le g(t) \le nx_1(t) \quad \text{für hinreichend große t gilt.}$$

Nutzt man weiterhin das Lemma V.1, mit $f=x_1$, $u=x_2$ und $g=g$, so erhält man, daß der Quotient $\frac{g(t)}{x_1(t)}$ gegen einen endlichen nicht negativen Grenzwert a konvergiert.

Sei zunächst der Fall $a > 0$ betrachtet. Sei eine Zahl $\varepsilon > 0$ fixiert, dann existiert auf Grund der Konvergenz ein $T^* \ge T$, so daß

$$a - \varepsilon \le \frac{g(t)}{x_1(t)} \le a + \varepsilon \quad \text{für alle } t \ge T^* \text{ gilt.}$$

Dies nutzend erhält man für jedes $\alpha > 0$ die Gültigkeit von

$$\frac{g(t)}{g(t+\alpha)} \ge \frac{(a-\varepsilon)x_1(t)}{(a+\varepsilon)x_1(t+\alpha)} = \frac{(a-\varepsilon)}{(a+\varepsilon)} e^{-L\alpha} > 0 .$$

Ist aber $a = 0$, so bedeutet dies, daß $g(t) = o(x_1(t))$ gilt. Man wählt nun ein $k > 0$, so daß $k\,g(t) \ge x_1(t)$ für alle $t \in [E(T),T]$ gilt. Da aber $g(t) = o(x_1(t))$ gilt muß es mindestens einen Punkt t geben, so daß $k\,g(t) = x_1(t)$ gilt. Es wird der kleinste solche Punkt T^* gewählt. Für diesen Punkt sind die Voraussetzungen von A'_3 erfüllt. Man erhält die Gültigkeit von

$$kg(t) \le x_1(t)$$

und

$$\frac{x_1(t)}{kg(t)} \text{ ist monoton nicht fallend für alle } t \ge T^*.$$

Dies nutzend erhält man die Gültigkeit von

$$\frac{x_1(t)}{kg(t)} \le \frac{x_1(t+\alpha)}{kg(t+\alpha)} \quad \text{für alle } t \ge T^* \text{ und } \alpha > 0.$$

Hieraus ergibt sich nun die Behauptung:

$$0 < e^{-L\alpha} = \frac{x_1(t)}{x_1(t+\alpha)} \le \frac{g(t)}{g(t+\alpha)} . \quad \square$$

Satz VI.3: Sei a(t) beschränkt, $m_0 > 0$ und existiert eine Zahl $\mu \in [0,1)$, so daß für alle λ gilt

$$\lambda^2 \geq a(t)\,\lambda - \mu\int_0^\infty e^{-\lambda s} dr(t,s) \quad , \tag{VI.11}$$

so oszillieren alle Lösungen von (1=).

Bew.: Da a(t) beschränkt ist, ist es möglich l und L so zu wählen, daß $l \leq 0$, $L \geq 0$ und $l \leq a(t) \leq L$ gilt. Angenommen es existiert eine nicht oszillierende Lösung g(t) von (1=), o.B.d.A. $g(t) \geq 0$. Wie schon im Beweis von Satz VI.2 bemerkt, besitzt die Ableitung von g(t) für hinreichend große t das selbe Vorzeichen. Sei also der Anfangspunkt auf eine hinreichend große Stelle verschoben.

Es wird $\quad x''(t) = a(t)x'(t) - \mu\int_0^\infty x(t-s)d\,r(t,s) \quad$ mit (1μ=) bezeichnet.

Offenbar ist g(t) neben (1=) auch Lösung von ($1\mu\leq$).

Fall 1: $g'(t) \leq 0$.

Es wird sich zeigen, daß eine Zahl $\rho_0 > 0$ existiert, so daß auch $g(t)\cdot e^{\rho_0 t}$ Lösung von ($1\mu\leq$) ist.

Zunächst wird darauf verwiesen, daß die Ungleichung

$$\rho_0^2 - l\,\rho_0 \leq m_0\,[\,1-\mu\,]$$

mindestens eine Lösung $\rho_0 > 0$ besitzt. Dies folgt aus der Stetigkeit der beiden Seiten der Ungleichung und der Tatsache, daß die linke Seite für $\rho_0 = 0$ identisch Null ist und die rechte echt größer Null ist.

Sei also ein solches $\rho_0 > 0$ fixiert. Daß $g(t)\cdot e^{\rho_0 t}$ Lösung von ($1\mu\leq$) ist ergibt sich aus den folgenden Ungleichungen

$$\rho_0^2 - l\,\rho_0 \leq m_0\,[\,1-\mu\,] \leq M(t)\,[1-\mu] \qquad \text{folglich gilt}$$

$$\rho_0^2 g(t) - l\rho_0 g(t) + 2\rho_0 g'(t) \leq \rho_0^2 g(t) - l\rho_0 g(t) \leq \int_0^\infty g(t-s)[1-\mu]d\,r(t,s) \leq \int_0^\infty g(t-s)[1-\mu e^{-\rho_0 s}]dr(t,s)$$

und

$$(a(t)g'(t) - \int_0^\infty g(t-s)d\,r(t,s))\,e^{\rho_0 t} + 2\rho_0 g'(t)e^{\rho_0 t} + \rho_0^2 g(t)e^{\rho_0 t}$$
$$\leq a(t)g'(t)e^{\rho_0 t} + a(t)g(t)\rho_0 e^{\rho_0 t} - \mu\int_0^\infty g(t-s)e^{\rho_0(t-s)}d\,r(t,s).$$

Der auf der linken Seite stehende Klammerausdruck ist gleich g''(t), da g(t) Lösung von (1=) ist. Somit erhält man, daß $g(t)e^{\rho_0 t}$ Lösung von ($1\mu\leq$) ist und es gilt

$$g(t) = o(g(t)e^{\rho_0 t}).$$

Wie man leicht sieht, folgt aus der Voraussetzung (VI.11), daß alle Funktionen $e^{\lambda t}$ für alle λ Lösungen der Ungleichung ($1\mu\geq$) sind.

Durch Anwendung des 1.Tennungssatzes /MORGENTHAL,1979/ erhält man folgende Alternative:

entweder gilt $\quad g(t)\cdot e^{\rho_0 t} = O(e^{\lambda t})$

oder $\quad e^{\lambda t} = O(g(t))$.

Auf Grund dieser Alternative wird die Menge der reellen Zahlen in zwei Mengen K_1 und K_2 eingeteilt, wobei jede reelle Zahl λ genau zu einer der Mengen gehört.

Das die beiden Mengen nicht leer sind ergibt sich aus der Existenz reeller Zahlen $k_1,k_2 > 0$ und $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ für jede Lösung $x(t)$ von ($1\mu\leq$), so daß gilt

$$k_2 e^{\lambda_2 t} \leq x(t) \leq k_1 e^{\lambda_1 t} .$$

Um dies zu zeigen betrachtet man folgende Ungleichungen:

$$x''(t) = a(t)x'(t) - \mu\int_0^\infty x(t-s)\, d\,r(t,s)$$
$$\leq l x'(t) - \mu m_0 x(t-\delta_0) \leq l_1 x'(t) - \mu m_0 x(t-\delta_0)$$

wobei $l_1 \leq l < 0$ so gewählt sei, daß

$$l_1 / \sqrt{\mu m_0} \leq -2$$

und $$\delta_0 \sqrt{\mu m_0} < \gamma_0(l_1 / \sqrt{\mu m_0}) \quad \text{gilt.}$$

Dies ist möglich, da $\gamma_0(\alpha)$ in α streng monoton fallend für $\alpha \in (-\infty,-2]$ ist.
Aus der Gültigkeit der beiden Ungleichungen folgt, daß

$$x''(t) = l_1 x'(t) - \mu m_0 x(t-\delta_0) \qquad \text{(VI.12=)}$$

Lösungen der Form $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ mit $\lambda_2 < \lambda_1 \leq 0$ hat. Wie oben gezeigt, ist $x(t)$ Lösung von (VI.12≤) und man kann den Einschließungssatz (Satz V.3) anwenden. Man erhält also, daß beide Mengen nicht leer sind.
Offenbar folgt auch aus $\lambda \in K_1$ und $\lambda_1 < \lambda$, daß λ_1 auch zu K_1 gehört.
Damit sind alle Voraussetzungen für einen Dedekinschen Schnitt erfüllt. Es existiert also eine Schnittzahl D, so daß gilt

$$g(t)\cdot e^{\rho_0 t} = O(e^{\lambda t}) \quad \text{für alle } \lambda > D \qquad \text{(VI.13)}$$

und $$e^{\lambda t} = O(g(t)) \quad \text{für alle } \lambda < D. \qquad \text{(VI.14)}$$

Die Relation (VI.13) kann sogar dahingehend verschärft werden, daß gilt:

$$g(t)\cdot e^{\rho_0 t} = o(e^{\lambda t}) \quad \text{für alle } \lambda > D. \qquad \text{(VI.15)}$$

Dies gilt, da man für alle $\lambda > D$ immer ein λ_0 finden, so daß $\lambda > \lambda_0 > D$ gilt. Auch für dieses λ_0 gilt (VI.13). Andererseits gilt aber auch $e^{\lambda_0 t} = o(e^{\lambda t})$, woraus (VI.15) folgt.
Es sei nun ein $\lambda_1 > D$, so gewählt, daß $\lambda_1 - \rho_0 < D$ ist. Aus (VI.15) folgt

$$g(t) = o(e^{(\lambda_1-\rho_0)t}).$$

Andererseits gilt jedoch wegen $\lambda_1 - \rho_0 < D$:

$$e^{(\lambda_1-\rho_0)t} = O(g(t)),$$

was ein Widerspruch ist. Also ist die Annahme der Existenz einer positiven nicht wachsenden Lösung von (1=) falsch.

Fall 2: $g'(t) \geq 0$
Hier wird sich zeigen, daß ein $\rho_0 > 0$ existiert, so daß auch $g(t)\, e^{-\rho_0 t}$ Lösung von ($1\mu\leq$) ist. Zunächst wird darauf verwiesen, daß die Ungleichung

$$\frac{K}{m_0}\,(\rho_0^2 + L\rho_0) \leq 1 - \mu\, e^{\rho_0 \Delta_0} \quad \text{für beliebiges } K > 0$$

mindestens eine Lösung $\rho_0 > 0$ besitzt. Dies folgt auf Grund der Stetigkeit beider Seiten der Ungleichung und des Erfülltseins der Ungleichung für $\rho_0 = 0$.

Sei also $K > 0$ so bestimmt, daß die Relation (VI.9) mit $\alpha = \Delta_0$ für die positive Lösung g gilt, und $\rho_0 > 0$ so fixiert, daß die obige Ungleichung gilt, dann ist $g(t)\,e^{-\rho_0 t}$ Lösung von (1µ≤) auf Grund der folgenden Ungleichungsketten:

$$\begin{aligned} L\rho_0 + \rho_0^2 &\le K\, m_0 \,[1 - \mu e^{\rho_0 \Delta_0}] \\ &\le \frac{g(t-\Delta_0)}{g(t)} M(t)\,[1 - \mu e^{\rho_0 \Delta_0}] \qquad \text{(Lemma VI.1)} \\ &\le \int_0^\infty \frac{g(t-s)}{g(t)}\,[1 - \mu e^{\rho_0 s}]\, d\,r(t,s) \quad , \end{aligned}$$

$$a(t)\rho_0 g(t) + \rho_0^2 g(t) - 2\,\rho_0 g'(t) \le \int_0^\infty g(t-s)\,[1 - \mu e^{\rho_0 s}]\, d\,r(t,s)$$

und

$$\begin{aligned} &(a(t)g'(t) - \int_0^\infty g(t-s)\,d\,r(t,s))e^{-\rho_0 t} - 2\rho_0 g'(t)e^{-\rho_0 t} + \rho_0^2 g(t)\,e^{-\rho_0 t} \\ &\qquad\le a(t)(g(t)\,e^{-\rho_0 t})' - \mu \int_0^\infty g(t-s)e^{-\rho_0(t-s)}\,d\,r(t,s). \end{aligned}$$

Somit hat man zwei Lösungen von (1µ≤) für die gilt

$$\mathbf{g(t)\,e^{-\rho_0 t} = o(g(t))}.$$

Wie man leicht sieht, folgt aus der Voraussetzung (VI.11), daß alle Funktionen $e^{\lambda t}$ für alle λ Lösungen der Ungleichung (1µ≥) sind.
Durch Anwendung des 1.Tennungssatzes /MORGENTHAL,1979/ erhält man folgende Alternative:

entweder gilt $\qquad \mathbf{g(t) = O(e^{\lambda t})}$

oder $\qquad \mathbf{e^{\lambda t} = O(g(t)\cdot e^{-\rho_0 t})}.$

Auf Grund dieser Alternative wird die Menge der reellen Zahlen in zwei Mengen K_1 und K_2 eingeteilt, wobei jede reelle Zahl λ genau zu einer der Mengen gehört.
Das die beiden Mengen nicht leer sind ergibt sich aus der Existenz reeller Zahlen $k_1, k_2 > 0$ und $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ für jede Lösung $x(t)$ von (1µ≤), so daß gilt

$$k_2 e^{\lambda_2 t} \le x(t) \le k_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Um dies zu zeigen betrachtet man folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} x''(t) &= a(t)x'(t) - \mu\int_0^\infty x(t-s)\,d\,r(t,s) \\ &\le Lx'(t) - \mu m_0 x(t-\Delta_0) \\ &\le Lx'(t) - \mu m_1 x(t-\Delta_0) \end{aligned}$$

dabei sei $m_0 \ge m_1 > 0$ so gewählt, daß $L/\sqrt{\mu m_1} > 2$ ist.
Aus der Gültigkeit dieser Ungleichung folgt, daß

$$\mathbf{x''(t) = Lx'(t) - \mu m_1 x(t-\Delta_0)} \qquad \text{(VI.16=)}$$

Lösungen der Form $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ mit $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ hat. Wie oben gezeigt, ist $x(t)$ Lösung von (VI.16≤) und man kann den Einschließungssatz (Satz V.3) anwenden. Man erhält also, daß beide Mengen nicht leer sind.
Offenbar folgt auch aus $\lambda \in K_1$ und $\lambda_1 < \lambda$, daß λ_1 auch zu K_1 gehört.

Damit sind alle Voraussetzungen für einen Dedekinschen Schnitt erfüllt. Es existiert also eine Schnittzahl D, so daß gilt

$$g(t) = O(e^{\lambda t}) \qquad \text{für alle } \lambda > D \tag{VI.17}$$

und

$$e^{\lambda t} = O(g(t) \cdot e^{-\rho_0 t}) \qquad \text{für alle } \lambda < D. \tag{VI.18}$$

Die Relation (VI.17) kann sogar dahingehend verschärft werden, daß gilt:

$$g(t) = o(e^{\lambda t}) \quad \text{für alle } \lambda > D. \tag{VI.19}$$

Dies gilt, da man für alle $\lambda > D$ immer ein λ finden, so daß $\lambda > \lambda_0 > D$ gilt. Auch für dieses λ_0 gilt (VI.17). Andererseits gilt aber auch $e^{\lambda_0 t} = o(e^{\lambda t})$, woraus (VI.19) folgt. Es sei nun ein $\lambda_1 > D$, so gewählt, daß $\lambda_1 - \rho_0 < D$ ist. Dann gilt nach (VI.18)

$$e^{(\lambda_1 - \rho_0)t} = O(g(t) \cdot e^{-\rho_0 t}).$$

Andererseits erhält man jedoch aus (VI.15) durch multiplikation mit $e^{-\rho_0 t}$ die Relation

$$g(t) \cdot e^{-\rho_0 t} = o(e^{(\lambda_1 - \rho_0)t}),$$

was ein Widerspruch ist. Also ist die Annahme der Existenz einer positiven nicht fallender Lösung von (1=) falsch.

Womit der Satz vollständig bewiesen ist. $\square$

Folgerung VI.1: Hinreichend für die Gültigkeit von (VI.11) ist

$$\sup_{\lambda} \frac{a(t)\lambda - \lambda^2}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} dr(t,s)} < 1.$$

VII. Das Verhalten der oszillierenden Lösungen

Nach Satz II.7 gilt für jede oszillierende Lösung h von (1=) und jede final positive Lösung g von (1≤) die Beziehung $h = O(g)$. Es ist nun naheliegend zu fragen, ob sich diese Aussage zu $h = o(g)$ verschärfen läßt. Bevor ein allgemeingültiger Satz für bestimmte symmetrische Funktionensysteme angegebenen wird, sei ein vorbereitendes Lemma angegeben.

Lemma VII.1: Sei h eine oszillierende Funktion aus M_1 und g eine positive Funktion aus M^1. Weiter sei $A < T$, $0 < g(t)$ für $t \geq E(T)$ und $h(t) < g(t)$ für $E(T) \leq t \leq T$. Dann gilt für alle $t \geq E(T)$ die Abschätzung $h(t) < g(t)$.
Bew.: Angenommen, die Behauptung ist falsch, d.h. es existiert ein $C > T > A$, so daß gilt

$$\mathbf{h(C) = g(C)} \ ,$$

$$\mathbf{0 < g(t)} \quad \text{für } E(T) \leq E(C) \leq t,$$

$$\mathbf{h(t) \leq g(t)} \quad \text{für } E(C) \leq t \leq C.$$

Dann sind alle Voraussetzungen von A'_3 erfüllt, und es folgt

$$\mathbf{0 < g(t) \leq h(t)} \quad \text{für } t \geq C.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Oszilliertheit von h. Somit ist das Lemma bewiesen. □

Die in dieser Arbeit betrachtete lineare Gleichung (1=) legt es nahe, zu den Axiomen A_1, A_2, A'_3 aus /MORGENTHAL 1979/ noch das Axiom

A_4: Es gilt $f \in M_1$, genau dann, wenn $-f \in M^1$.

hinzunehmen.
Es ergibt sich dann folgender allgemeiner Satz.

Satz VII.1: Existieren für ein R mit $A \leq R < \infty$ Elemente $f \in M_1$ und $g \in M^1$ mit $f(t) > 0$ und $g(t) > 0$ für $t \geq R$ sowie $g = o(f)$, und existiert eine positive Konstante K mit

$$\mathbf{Kg(E(T))\, f(T) \leq f(E(T))\, g(T)} \quad \text{für alle } T \text{ mit } R \leq T < \infty, \tag{VII.1}$$

so gilt $h = o(g)$ für jedes oszillierende Element h aus M.
Bew.: Es sei $\alpha > 0$, $R_1 > R$ so gewählt, daß $R \leq E(R_1)$,

$$\mathbf{\alpha g(t) > h(t)} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{\alpha g(t) > f(t)} \quad \text{für } t \in [E(R_1), R_1] \text{ gilt.}$$

Die erste Ungleichung bleibt nach Lemma VII.1 für alle $t \geq R_1$ bestehen. Wegen $g = o(f)$ existiert mindestens ein Punkt R_2 mit $\alpha g(R_2) = f(R_2)$.

Sei $\quad Q := \inf\{ t : \alpha g(t) = f(t),\ R_1 \leq t < \infty \}$.

Nach A'_3 gilt, daß die Funktion $q(t) = \frac{f(t)}{\alpha g(t)}$ für $t \geq Q$ nicht fallend ist.

Man wählt nun ein S derart, daß $E(E(S)) \geq Q$ gilt. Sei $\beta > 0$ so gewählt, daß

$$w(t) = \alpha g(t) - \beta f(t) > \max\{ h(t), 0 \} \quad \text{für } t \in [E(S), S].$$

Unter Beachtung von A_4 gilt: $w \in M^1$. Es sei T die kleinste Nullstelle von $w(t)$ im Intervall $[S, \infty)$.

In $S \leq t \leq E(T)$ gilt $w(t) > h(t)$. Anderenfalls ergäbe sich mit dem Satz II.3 unter Verwendung einer analogen Argumentation wie im Beweis von Satz II.5:

$$h(t) \geq w(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \text{ mit } E(T) \leq t \leq T.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Oszilliertheit von h (siehe Folgerung II.2).

Aus (VII.1) folgt $K q(E(T)) \leq q(E(E(T)))$ und $K q(T) \leq q(E(T))$. Unter Beachtung der Monotonie von $q(t)$ gilt für $E(E(T)) \leq t \leq E(T)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} h(t) < w(t) &\leq (1 - \beta q(E(E(T))))\, \alpha g(t) \\ &\leq (1 - \beta K q(E(T)))\, \alpha g(t) \\ &\leq (1 - \beta K^2 q(T))\, \alpha g(t) \quad \leq (1 - K^2)\, \alpha g(t) . \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus der Wahl von β:

Aus $0 = \alpha g(T) - \beta f(T)$ folgt $\beta q(T) = 1$.

Diese Abschätzung gilt nun wiederum für alle $t \geq E(T)$. Durch Fortsetzung der durchgeführten Überlegungen erhält man zu jeder natürlichen Zahl n ein Stelle P_n derart, daß

$$h(t) < (1 - K^2)^n \alpha g(t) \text{ für alle } t \geq P_n \text{ gilt.}$$

Da $-h$ auch oszillierendes Element von M ist, gilt eine entsprechende Abschätzung für $-h$. Damit erhält man $h = o(g)$. $\square$

Es sei bemerkt, daß (VII.1) erfüllt ist, falls es zwei positive Konstanten k und l gibt, so daß für alle $T \geq R$ gilt:

$$k f(t) \leq f(E(T)) \quad \text{und} \quad l g(E(T)) \leq g(t) \quad \text{für alle } t \in [E(T), T].$$

Es stellt sich nun noch die Frage, unter welchen Bedingungen an die Gleichung (1=) bzw. die entsprechenden Ungleichungen die Existenz solcher Elemente f und g, die der Relation (VII.1) genügen, gesichert werden kann. Es wird sich zeigen, daß diese Bedingung erfüllt ist, falls $a(t)$ beschränkt ist, $m_0 > 0$, $M_0 \Delta_0 < \infty$ und die in den Sätzen IV.11 und IV.12 betrachteten charakteristischen Gleichungen reelle Lösungen besitzen. Dies wird nun in dem folgenden Satz formuliert.

Satz VII.2: Sei $l \le a(t) \le L$ mit $l < L$, $m_0 > 0$, $M_0 \Delta_0 < \infty$ und gelte

(1) $\frac{l}{\sqrt{M_0}} > 2$ bzw. $0 < \frac{l}{\sqrt{M_0}} < 2$ und $\sqrt{M_0}\,\delta_0 > \gamma_0\left(\frac{l}{\sqrt{M_0}}\right)$ und

gilt $0 < \lambda_2(l,M_0,\delta_0) < \lambda_1(L,m_0,\Delta_0)$, oder

(2) $\frac{L}{\sqrt{M_0}} < -2$ und $\sqrt{M_0}\,\Delta_0 < \gamma_0\left(\frac{L}{\sqrt{M_0}}\right)$.

Dann existieren Lösungen von (1≥) und (1≤), die die Voraussetzungen des Satzes VII.1 erfüllen.

Bew.: (2) Wie im Kapitel V. zu sehen war, existieren unter den gegebenen Voraussetzungen Exponentialfunktionen, die Lösungen von (1≥) bzw. (1≤) sind. Man setzt

$$f(t) := e^{\lambda_1(l,m_0,\delta_0)t},$$

$$g(t) := e^{\lambda_2(L,M_0,\Delta_0)t},$$

mit $\lambda_2(L,M_0,\Delta_0) < \lambda_1(l,m_0,\delta_0) < 0$ (siehe (V.12.i)). Hieraus folgt sofort die Gültigkeit von $g = o(f)$.

Weiterhin gilt:

$$\frac{f(E(t))\;g(t)}{f(t)\;g(E(t))} = e^{(\lambda_2(L,M_0,\Delta_0)-\lambda_1(l,m_0,\delta_0))(t-E(t))} \ge e^{(\lambda_2(L,M_0,\Delta_0)-\lambda_1(l,m_0,\delta_0))\Delta_0}.$$

Die in der Behauptung gesuchte Konstante ist $K := e^{(\lambda_2(L,M_0,\Delta_0)-\lambda_1(l,m_0,\delta_0))\Delta_0} > 0$.

(1) Setzt man voraus, daß $0 < \lambda_2(l,M_0,\delta_0) < \lambda_1(L,m_0,\Delta_0)$ gilt, so erhält man die Lösungen von (1≤) und (1≥) mit $g = o(f)$ durch

$$f(t) := e^{\lambda_1(L,m_0,\Delta_0)t} \text{ und}$$

$$g(t) := e^{\lambda_2(l,M_0,\delta_0)t}.$$

Aus der folgenden Ungleichung erhält man
die Behauptung.

$$\frac{f(E(t))\;g(t)}{f(t)\;g(E(t))} = e^{(\lambda_2(l,M_0,\delta_0)-\lambda_1(L,m_0,\Delta_0))(t-E(t))} \ge K$$

Die Existenz einer solchen Konstante ist gesichert, da der Exponent positiv ist. □

VIII. Der Entwicklungssatz

In diesem Kapitel wird vorausgesetzt, daß (1=) zwei Klassen $F_2 < F_1$ final positiver Lösungen besitzt. Sei $f_i \in F_i$ mit $i = 1, 2$. Dann gilt nach /MORGENTHAL 1979, Satz8/ der folgende Satz.

Satz VIII.1: Jede Lösung u von (1=) läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$u(t) = c_1 f_1(t) + r(t)$$

mit $c_1 = \text{const.}$ und $r = o(f_1)$.

Es ergibt sich nun die Frage, ob sich eine Darstellung jedes beliebigen f findet, so daß auch f_2 berücksichtigt wird.

Satz VIII.2: (1=) möge zwei Klassen final positiver Lösungen $F_2 < F_1$ besitzen, und es mögen Elemente $f_i \in F_i$ existieren, so daß (VII.1) erfüllt ist. Dann läßt sich jede Lösung u von (1=) in eindeutiger Weise in der Form

$$u = c_1 f_1 + c_2 f_2 + r$$

darstellen, wobei c_1 und c_2 reelle Konstanten sind und $r = o(f_2)$ gilt.
Bew.: Die Einzigkeit der Darstellung ist offensichtlich. Es wird nun die Existenz der angegebenen Darstellung gezeigt.
(1) Ist u eine oszillierende Lösung von (1=), so gilt nach Satz VII.1: $u = o(f_2)$. Man setzt also $c_1 = c_2 = 0$ und $r = u$.
Nun sei u nicht oszillierend. O.B.d.A. sei $u(t) > 0$ für hinreichend große t.
(2) Sei $u \in F_2$ und $k := \sup\{c : cf_2(t) \leq u(t) \text{ für alle hinreichend großen } t\}$,

$$K := \inf\{c : cf_2(t) \geq u(t) \text{ für alle hinreichend großen } t\}.$$

Dann ist $0 < k \leq K < \infty$. Wäre nun $k < K$, so hätte man mit

$$v(t) := u(t) - \frac{K+k}{2} f_2(t)$$

eine oszillierende Lösung von (1=) mit $v \neq o(f_2)$, was nach Satz VII.1 nicht möglich ist. Also ist

$$K = k = \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{f_2(t)},$$

und man setzt $c_1 = 0$, $c_2 = k$ und $r = u - c_2 f_2$.
(3) Sei $u \in F_1$. Dann gilt $u = O(f_1)$, und nach Lemma V.1 konvergiert $\frac{u(t)}{f_1(t)}$ für $t \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert. Man setzt also $c_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{f_1(t)}$ und $r' = u - c_1 f_1$. Ist nun r' oszillierend, so setzt man $c_2 = 0$ und $r = r'$. Ist r' nicht oszillierend, so sei o.B.d.A. r' final positiv. Wegen $r' = o(f_1)$ gilt $r' \in F_2$. Also kann man nach (2) schreiben $r' = c_2 f_2 + r$ mit $r = o(f_2)$. □

Literaturverzeichnis

R. Bellmann u. K.L. Cooke: Differential-Difference Equations. New York; London: Academic Press, 1963.

L.E. El'sgoll'c: Introduction to the theory of differential equations with deviting arguments, Holden-Day, 1966

J. Hale: Theory of Funktional Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New York 1977.

E. Kozakiewice: On the asymptotic behavior of positive solutions of tow differential inequalities with retarded argument. Differential Equations Coll. Math. Soc. Bolyai 15(1977), 309-319.

G.S. Ladde u.a.: Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1987.

K. Morgenthal: Asymptotische Untersuchungen bei Funktionensystemen mit modifizierter Durchdringungseigenschaft. Beiträge zur Analysis 13(1979), 179-189.

A.D. Myskis: Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument. -Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

E. Pinney: Ordinary Difference-Differential Equation. Berkeley and Los Angeles 1959

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe

Berlin, 25.06.1990