

Organisation und Verwaltung:
Institut für Bauinformatik
Universität Hannover
Am Kleinen Felde 30
30167 Hannover
Telefon: 0511/ 762–5981

© 2001 P. Milbradt
Institut für Bauinformatik
Universität Hannover
Am Kleinen Felde 30
30167 Hannover

Vom Fachbereich für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover zur Erlangung der Lehrbefugnis (*venia legendi*) für “Bauinformatik” genehmigte Habilitationsschrift.

Berichterstatter: Prof. Dr.–Ing. R. Damrath (Hannover)
Prof. Dr.–Ing. R. Helmig (Stuttgart)
Prof. Dr.–Ing. W. Zielke (Hannover)

Tag des Habilitationskolloquiums: 22.01.2001
Tag der Antrittsvorlesung: 18.04.2001

Algorithmische Geometrie in der Bauinformatik

Peter Milbradt

Institut für Bauinformatik
Universität Hannover
2001

Vorwort

Die Bauinformatik als Bindeglied zwischen der Informatik und dem Bauingenieurwesen befaßt sich mit den theoretischen Grundlagen beim Einsatz der Informations- und Kommunikationstechnik im Bauingenieurwesen. Besonders der geometrische und räumliche Bezug von Bauingenieurobjekten führt in der Bauinformatik zu einer starken Verknüpfung mit der algorithmischen Geometrie. Das Buch wendet sich an Ingenieure, aber auch an Informatiker, Mathematiker und Physiker, die sich mit geometrischen Verfahren und Algorithmen zur Lösung ingenieurspezifischer Problemstellungen beschäftigen.

Das vorliegende Werk entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Bauinformatik und wurde vom Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover als Habilitationsschrift angenommen. Wesentliche Anregungen zu dieser Arbeit kamen aus unterschiedlichen Forschungsprojekten und Lehrveranstaltungen, sowie am Institut für Bauinformatik betreuten Studien und Diplomarbeiten.

Dank gilt all denen, die am Entstehen des Buches durch Förderung, Anregungen, Hinweise und Kritik beigetragen haben. Besonders zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Prof. R. Damrath und Prof. K.-P. Holz, die mich auf dem Weg der Promotions- und Habilitationsverfahren stets unterstützt haben. Für die Übernahme der Korreferate der Habilitationsschrift und die wertvollen Anregungen danke ich herzlich Herrn Prof. R. Helmig (Universität Stuttgart) und Prof. W. Zielke (Universität Hannover). Für die langjährige gute Zusammenarbeit und die vielen anregenden Gespräche sowie Hilfestellungen in fachlicher und menschlicher Hinsicht möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Bauinformatik ganz herzlich Dank sagen.

Besonderer Dank gebührt meine Familie für das entgegengebrachte Verständnis und die moralische Unterstützung in schwierigen Momenten. Ein Dankeschön gebührt meiner Ehefrau Birgit, die sich nicht nur an der mühsamen Aufgabe des Korrekturlesens beteiligt hat, sondern auch geduldig den Großteil der familiären Pflichten in der Zeit der Manuskript-erstellung getragen hat.

Hannover, im Mai 2001

Peter Milbradt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	5
1.1. Einordnung	6
1.2. Anwendungsbereiche	8
Kapitel 2. Methodische Grundlagen	13
2.1. Mengen und Folgen	13
2.2. Allgemeine Räume	14
2.3. Der topologische Raum	16
2.4. Der metrische Raum	20
2.5. Der lineare Raum	26
2.6. Der normierte Raum	32
2.7. Raum mit Skalarprodukt	33
2.8. Der euklidische Vektorraum	34
2.9. Maßtheorie	35
2.10. Elemente der Graphentheorie	38
Kapitel 3. Zelltheorie	45
3.1. Konvexe Polyeder	45
3.2. Topologische Zelle	60
3.3. Euklidischer Komplex	62
3.4. Zellkomplexe	64
3.5. Körper- und Netzmodellierung	65
Kapitel 4. Gebietszerlegungen	69
4.1. Nachbarschaften	70
4.2. Voronoi-Diagramm	71
4.3. Zellzerlegung	80
Kapitel 5. Interpolation	89
5.1. Funktionsinterpolation	90
5.2. Interpolationsräume	97
5.3. Bereichsweise konstante Interpolation	99
5.4. Finite Element Interpolation	100
5.5. Interpolation auf Zellzerlegungen	107
5.6. Netzfremde Interpolationen	114
5.7. Interpolation unter Verwendung der räumlichen Statistik	133

5.8. Morphing	142
Kapitel 6. Anwendungen in der Umweltsystemmodellierung	147
6.1. Modellbildung bathymetrischer Daten	149
6.2. Bodenmodelle	156
6.3. Geographische Informations-Systeme	160
6.4. Gitternetze für numerische Verfahren	164
6.5. Spezifikation von Randbedingungen	167
6.6. Erforschung von Parameterräumen	169
6.7. Technische Visualisierung	173
Kapitel 7. Zusammenfassung und Ausblick	177
Abbildungsverzeichnis	183
Index	187
Literaturverzeichnis	191

KAPITEL 1

Einleitung

Der Mensch und sein Wirken sind eingebettet in ein hochkomplexes System, seine Umwelt. Sein Verhalten und das seiner Umwelt wird von einer Vielzahl von (z.B. physikalischen, chemischen und sozialen) Gesetzmäßigkeiten bestimmt. Um seine Tätigkeiten planen zu können, die immer einen Eingriff in das natürliche System darstellen, ist es notwendig, eine Vorstellung von den zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu haben. Modelle bilden hierbei die Grundlage für die Abstraktion unserer Umwelt. Gegenstand der Untersuchungen im Ingenieurwesen sind im wesentlichen Objekte und Prozesse aus Natur und Technik. Bei der Modellierung wird unterschieden zwischen der Beschreibung der Geometrie und den Eigenschaften der Untersuchungsobjekte sowie der Modellierung ihres Verhaltens. Anwendungen für geometrische Modelle im Ingenieurwesen sind solche in der Konstruktion und Planung von Werkzeugen, Maschinen und Bauwerken (CAD-Modelle). Geometrische Modelle und Algorithmen stellen auch die Grundlage für die Verwaltung, Sicherung und Analyse von Daten dar. So müssen im Rahmen von Geoinformationssystemen (GIS) große Mengen geographischer Daten verarbeitet werden. Eine reine geometrische Modellierung ist im allgemeinen jedoch nicht ausreichend, vielmehr müssen topologische und thematische Eigenschaften bei der Modellbildung mit herangezogen werden (z.B. Netzpläne für Verkehrssysteme). Basierend auf solchen Modellen, die die Eigenschaften beschreiben, kann unter Zuhilfenahme von Simulationsverfahren deren Verhalten modelliert werden. Das Spektrum der verfügbaren Verfahren reicht von einfachen funktionalen Formulierungen über iterative Verfahren, numerischen Lösungen von Differential- und Integralgleichungen bis hin zu stochastischen und Fuzzi-Modellen. Ihnen gemeinsam ist eine starke Bindung zu einem geometrischen Modell. Häufig sind die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten jedoch nicht in ihrer vollen Komplexität bekannt. Sind solche Zusammenhänge nur unzureichend erforscht, so muß auf parametrische Ansätze zurückgegriffen werden. Bei der Parametrisierung wird auf eine genaue Kenntnis der Zusammenhänge verzichtet. Statt dessen werden nur meßbare Größen modelliert. Solche Ansätze müssen in der Regel durch Naturmessungen geeicht werden. Die zueichnenden Parameter sind häufig einfache skalare oder vektorielle Größen, und der Prozeß der Eichung läuft dann auf eine Optimierung hinaus. Für eine Vielzahl von Optimierungsaufgaben existieren geometrische Lösungsverfahren.

In allen Bereichen der Abbildung unserer Umwelt mit Hilfe von Modellen treten geometrische Fragestellungen auf. Hierbei ist der Bereich des geometrischen Modellierens und der geometrischen Algorithmen nicht nur auf rein geometrische Fragestellungen beschränkt, vielmehr kommen solche Verfahren zunehmend für Aufgaben und Problemlösungen in

nichtgeometrischen Bereichen zum Einsatz. Das geometrische Lösen von Optimierungsaufgaben ist hierfür ein klassisches Beispiel. Interpolationen in Parameterräumen sowie die allgemeine Finite Element Methode können als Anwendungen geometrischer Verfahren in abstrakten Räumen aufgefaßt werden.

Für Problemstellungen aus dem nichtgeometrischen Bereich ist es besonders wichtig, die geometrischen Algorithmen und Datenstrukturen auf Verallgemeinerungen hin zu untersuchen. Im Rahmen dieser Arbeit werden deshalb nicht nur geometrische Eigenschaften und Algorithmen eingeführt, vielmehr werden deren Einordnung in andere Spezialgebiete wie der mathematischen Theorie allgemeiner Räume (Kap. 2), der Graphentheorie (Kap. 2.10) sowie der Interpolations- und Approximationstheorie (Kap. 5) vorgenommen.

Die Entwicklung des Computers führte zu einer noch größeren Bedeutung von Algorithmen als je zuvor. Besonders die stürmische Entwicklung der Informatik führte zur verstärkten Nutzung von Algorithmen in ihren entstehenden großen Teilbereichen. Neben der theoretischen Informatik bilden die praktische und technische Informatik die Grundlagen der Entwicklung von Computern und Informationstechnologien. Eine Brückenfunktion zwischen Fachwissenschaften und der Kern-Informatik bildet die Angewandte Informatik. Diese diversen Angewandten Informatiken beschäftigen sich mit der Anwendung von Methoden der Informatik in anderen Wissenschaften und sind meist in den jeweiligen Fachwissenschaften angesiedelt. Die Bauinformatik als Bindeglied zwischen der Kern-Informatik und dem Bauingenieurwesen befaßt sich mit der Entwicklung und Anwendung informatischer Methoden zur Lösung fachspezifischer Probleme im Bauingenieurwesen. Besonders der geometrische und räumliche Bezug von Bauingenieurobjekten führt in der Bauinformatik zu einer starken Verknüpfung mit der algorithmischen Geometrie. Ziel dieser Arbeit ist es, die Grundlagen für die Nutzung geometrischer Verfahren in einem weiten Feld von Bauingenieur Anwendungen zur Verfügung zu stellen und an ausgewählten Beispielen (Kap.6) deren Umsetzung zu skizzieren.

1.1. Einordnung

In der *algorithmischen Geometrie* geht es im wesentlichen um den Entwurf und die Analyse effizienter Algorithmen für geometrische Probleme. Klassische Problemfelder sind die Bestimmung der konvexen Hülle einer gegebenen Punktmenge, Abstandsprobleme, das Suchen in Unterteilungen und das Lösen von Optimierungsaufgaben. Im weiteren wird der Schwerpunkt nicht in Effizienzanalysen liegen, sondern vielmehr im Entwurf allgemeingültiger Algorithmen. Unter der Vielzahl von Büchern zur Algorithmischen Geometrie soll an dieser Stelle auf die „Klassiker“ von Preparata & Shamos [143], Edelsbrunner [62] und R. Klein [99] verwiesen werden. Eine eher algorithmische Einführung wird von O'Rourke [137] gegeben.

Während sich die klassische Geometrie auf den euklidischen Raum beschränkt, sind viele Methoden der algorithmischen Geometrie auf nichtgeometrische Anwendungsfelder ausdehnbar. Es wird sich zeigen, daß verschiedene geometrische Fragestellungen an unterschiedliche Räume gebunden sind. Auf Räume in ihrer allgemeinen Bedeutung wird deshalb im Kapitel 2 eingegangen. Hierbei werden vor allem die Eigenschaften (wie die

lineare Unabhängigkeit, die Konvexität, die Kugel, das Volumen) im Vordergrund stehen, die einen geometrischen Bezug haben. Von besonderem Interesse wird die Frage sein, welches die minimalen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit klassischer geometrischer Algorithmen sind. Ist diese Frage geklärt, so kann man untersuchen, inwieweit zusätzliche Voraussetzungen (wie Metrik, Norm, Skalarprodukt usw.) effizientere Algorithmen ermöglichen.

Hat die algorithmische Geometrie Algorithmen im Zentrum ihrer Untersuchungen, so fordern reale Strukturen z.B. aus dem Ingenieurwesen, wie Werkstücke, Gebäude bzw. natürliche Systeme eine sowohl physikalische als auch geometrische Beschreibung. Der große Bereich des *geometrischen Modellierens* beschäftigt sich mit dem rechnergestützten Entwurf und der Manipulation von geometrischen Objekten. Die hierbei entstehenden Strukturen bilden die Grundlage zum einen für Algorithmen und zum anderen für reine Modellierungswerkzeuge.

Das geometrische Modellieren kann in verschiedene Teilgebiete gegliedert werden, die auf verschiedenen Ansätzen, Geometrie zu beschreiben, basieren. Werden die geometrischen Formen unter dem Blickwinkel der Differentialrechnung betrachtet, so werden die Methoden unter dem Sammelbegriff der *differentialgeometrischen Modellierung* zusammengefaßt. Besonderes Augenmerk wird bei der differentialgeometrischen Modellierung auf den Entwurf von Formen gelegt, die bezüglich ihrer Glattheit besonderen Ansprüchen genügen. Typische Vertreter hierfür sind die Bezier-Technik und die B-Spline-Technik.

Werden geometrische Formen aus Grundelementen wie Punkten, Kurven, Flächenstücken und Polyedern zusammengesetzt, so wird vom *kombinatorischen Modellieren* gesprochen. Das Modellieren mit Zellzerlegungen ist ein Schwerpunkt in dieser Arbeit. Durch eine konsequente Klassifikation von Zellen und Zellzerlegungen im Kapitel 3 eröffnet sich ein breites Spektrum von Anwendungen sowohl in der algorithmischen Geometrie als auch in ingenieurspezifischen Problemfeldern. Wichtig beim kombinatorischen Modellieren ist der Entwurf und die konsistente Manipulation der topologisch-kombinatorischen Struktur.

Während das differentialgeometrische Modellieren den Entwurf glatter Formen zum Ziel hat, werden beim *fraktalen Modellieren* zerklüftete Formen wie Wolken, Gebirge und Küstenlinien betrachtet. Fraktale Modelle werden häufig durch Iterationsverfahren generiert und können näherungsweise in einer der vielen anderen Darstellungsformen repräsentiert werden. Ein guter Überblick wird in [67] und [84] gegeben.

Sollen neben der Geometrie eines Objektes weitere physikalische Eigenschaften modelliert werden, so kann dies nur in den seltensten Fällen über einen einfachen funktionalen Zusammenhang geschehen. Im allgemeinen ist es nur für Teilbereiche möglich, eine geeignete Beschreibung anzugeben. Die Modellierung von Gebietszerlegungen und -überdeckungen wird in Kapitel 4 behandelt. Erfolgt die Zerlegung bezüglich einer bestimmten Abstandsfunktion, so wird von der Klasse der Voronoi-Diagramme gesprochen (Abschn. 4.2). Eine zum Voronoi-Diagramm in der Ebene duale Strukturierung ist die Delaunay-Triangulation. Eine Verallgemeinerung von Dreieckszerlegungen führt zur Simplicialzerlegung in beliebig dimensionalen Räumen. Im Abschnitt 4.3 werden diese Zellzerlegungen beschrieben

und es kann ein Algorithmus vorgestellt werden, der eine minimale konvexe Zellzerlegung generiert, die im Gegensatz zur Simplicial-Zerlegung immer eindeutig ist.

Aufbauend auf der geometrischen Modellierung von Ingenieurobjekten und auf Gebietszerlegungen können im weiteren physikalische Eigenschaften analysiert und beschrieben werden. Besonders der Übergang von punktuell verfügbaren Informationen auf räumliche Aussagen steht bei der Interpolation im Kapitel 5 im Mittelpunkt. Neben Interpolationen auf der Basis von Netzen (Zerlegungen) nehmen in der Praxis auch netzfreie Interpolationsmethoden eine wichtige Rolle ein. Durch die Hinzunahme statistischer Informationen kommt man zur statistischen Interpolation.

Ein ganz anderer Bereich, bei dem geometrische Modellierung und Interpolation kombiniert werden, ist das Morphing (Abschn. 5.8). Hauptanwendungsbereiche für Morphing sind „special Effects“ bei Film und Fernsehen. Interessante Verknüpfungen entstehen in Zukunft auch mit anderen Ingenieurwissenschaften. Im folgenden Abschnitt soll auf wichtige Anwendungsbereiche der algorithmischen Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des Bezuges zum (Bau-)Ingenieurwesen eingegangen werden.

1.2. Anwendungsbereiche

Die klassischen Anwendungsbereiche der algorithmischen Geometrie liegen in der Computergraphik, der Robotik, den geographischen Informationssystemen und dem CAD/CAM. Im folgenden soll auf einige Bereiche eingegangen und typische Problemstellungen aufgezeigt werden.

1.2.1. Computergraphik. Der Bereich der Computergraphik umfaßt allgemein die Erzeugung von Abbildern von Modellszenen auf einem Display, einem Drucker oder anderem Ausgabegerät. Hierbei können die Szenen von einfachen zweidimensionalen Zeichnungen, die aus Linien, Polygonen und anderen einfachen Objekten bestehen, bis hin zu photorealistischen dreidimensionalen Szenen reichen. Die komplexen Szenen können dabei aus vielen Millionen Polygonen oder gekrümmten Flächenstücken zusammengesetzt sein.

Da alle diese Szenen aus geometrischen Objekten bestehen, spielen geometrische Algorithmen eine wichtige Rolle in der Computergraphik.

Zu typischen Fragestellungen im zweidimensionalen Raum gehört die Behandlung von Schnitten und die Identifikation von Objekten sowie deren Lage zueinander. Werden dreidimensionale Probleme betrachtet, steigt die Komplexität der Verfahren erheblich. Ein wichtiger Schritt hierbei ist das Entfernen nicht sichtbarer Kanten und Bereiche der Szene. Soll ein realistisches Aussehen erreicht werden, so werden der Szene Licht und den Szeneobjekten Oberflächeneigenschaften hinzugefügt. Die Berechnung von Schatten und Texturen als auch das Ray-Tracing (Abb. 1.2.1) benötigen an jedem Punkt der Szene Modelleigenschaften, die durch Interpolation und Approximation (Kap. 5) beschafft werden müssen.

Verwendet man graphische Algorithmen zur Visualisierung technischer und physikalischer Prozesse, so betritt man den Bereich der technischen Visualisierung [131]. Besonders physikalische Zustände im Bereich des Bauingenieurwesens entziehen sich häufig der direkten Beobachtung, da sie im Inneren von Bauwerken, Bauteilen oder geologischen Strukturen

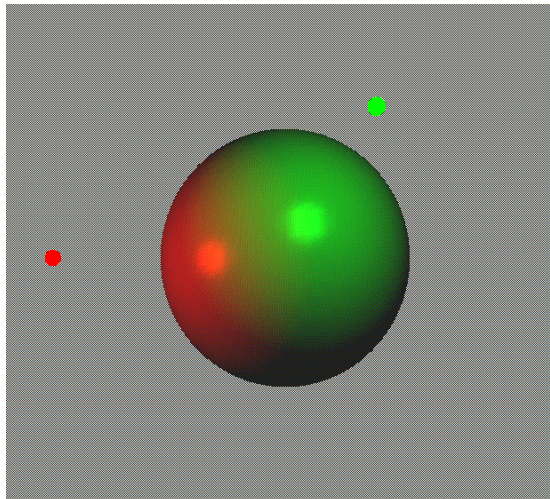


ABBILDUNG 1.2.1. Kugel mit zwei Lichtquellen

liegen. Sowohl durch moderne Meßverfahren als auch durch numerische Simulationen ist man in der Lage, diese Zustände zu modellieren. Die Verfahren der technischen Visualisierung ermöglichen es, ins Innere zu schauen und die Systemzustände zu beurteilen.

1.2.2. Geographische Informationssysteme. Ein geographisches Informationssystem, oder kurz GIS, speichert und verwaltet geographische Daten wie Flächen von Ländern, die Höhe von Bergen, den Verlauf von Flüssen, die Art der Vegetation an verschiedenen Stellen, die Bevölkerungsdichte oder den Niederschlag. Es kann aber auch durch den Menschen geschaffene Strukturen wie Straßen, Bahnlinien, Elektro- oder Gasleitungen einbeziehen. Ein GIS kann verwendet werden, um Informationen in einem gewünschten Bereich zu extrahieren oder mit anderen Daten in Beziehung zu stellen.

Die meisten geographischen Informationen sind an Punkte oder Regionen der Erdoberfläche gebunden und somit geometrischer Natur. Für nichtgemessene Orte müssen die Eigenschaften (z.B. Höhen) durch Interpolation aus benachbarten Messungen bestimmt werden. Der Bereich der Interpolationen wird im Kapitel 5 behandelt. Hierbei wird zum einen zwischen netzfreien und netzbasierten Interpolationsmethoden unterschieden und zum anderen können zusätzliche statistische Informationen für eine Interpolation herangezogen werden (Abschn. 5.7).

Digitale Geländemodelle dienen der Wiedergabe von tatsächlichen räumlichen Situationen (z.B. Landschaftsbildsimulationen bei Baumaßnahmen, Abbauvorhaben) als Grundlage für numerische Simulationen oder auch bei Funknetzplanungen sowie in der Städteplanung. Durch eine generalisierte Herangehensweise wird die Beschreibung beliebiger funktionaler Zusammenhänge möglich. Die Visualisierung erfolgt in der Regel durch Draht- oder Netzmodelle und durch Auflegen von Flächendaten (thematische Karten, Luftbilder etc.). Berechnet werden diese häufig mittels Dreiecksvermaschung (Abb. 1.2.2) oder durch regelmäßige Gitter.

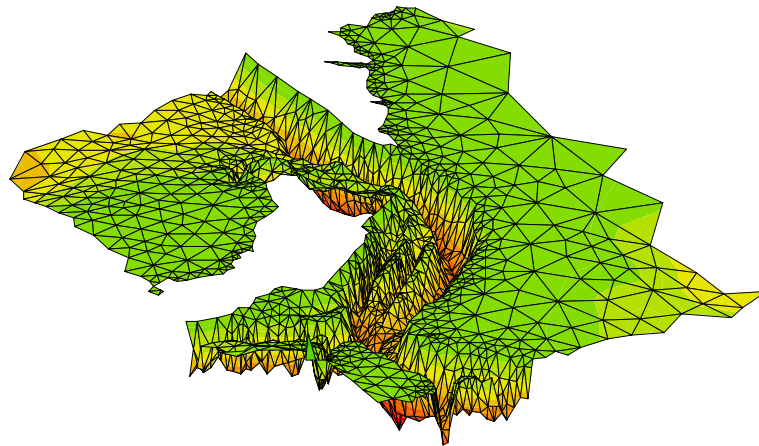


ABBILDUNG 1.2.2. Digitales Bathymetriemodell der Gellenrinne

Besonderes Gewicht erhalten Interpolations- und Analysemethoden durch die Verfügbarkeit riesiger Datenmengen im *World Wide Web*.

1.2.3. CAD/CAM. Computer aided design (CAD) beschäftigt sich mit dem Entwurf von Produkten mit Hilfe des Computers. Die Produkte können von Maschinenteilen, Möbeln, Autos bis hin zu ganzen Gebäuden (Abb. 1.2.3) reichen. In all diesen Fällen ist das entstehende Produkt eine geometrische Realisierung. Die auftretenden Problemstellungen reichen vom Verschneiden und Vereinigen von Objekten über das Zerlegen bis hin zur Visualisierung.

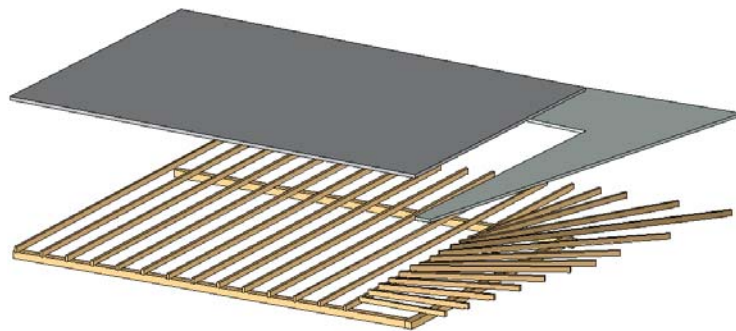


ABBILDUNG 1.2.3. Dachkonstruktion

Auf die Körpermodellierung (Solid Modeling) als ein wesentlicher Teil des computerunterstützten Designs wird im Zusammenhang mit Zellkomplexen im Abschnitt 3.5 eingegangen. Sollen die zu erwartenden Eigenschaften der entworfenen Produkte abgeschätzt

werden, so führt dies häufig zu einer Kopplung mit einem numerischen Berechnungsverfahren. Die für die Simulationen (z.B. mit der Methode der Finiten Elemente (FEM)) notwendigen Berechnungsnetze werden durch Netzgeneratoren auf der Grundlage des Körpermodells erzeugt. Die Vereinheitlichung von Modellvorstellungen und Datenstrukturen führt zu einer noch engeren Bindung.

Nachdem ein Objekt entworfen und getestet wurde, folgt häufig eine computergestützte Herstellung (Computer Aided Manufacturing, CAM). Auf die hierbei auftretenden geometrischen Problemstellungen soll im weiteren nicht eingegangen werden.

1.2.4. Robotik, Netzwerke und Transportprobleme. Auf den ersten Blick haben die Steuerung von Robotern, der Entwurf von Netzwerken und Transportprobleme nicht viel gemeinsam. Ihnen allen gemein ist jedoch der Wunsch, möglichst kurze Wege zurückzulegen. Beispielsweise geht es bei der Bahnplanung für Roboter darum, eine Bewegung von einer Ausgangskonfiguration in eine Endkonfiguration zu planen, die Kollisionen mit der Umgebung vermeidet und außerdem möglichst effizient ist. Ein anderes Beispiel, in dem Abstände eine zentrale Rolle spielen, ist die Planung von Warenlagern und Umschlagorten. Wesentliches Hilfsmittel zur Lösung solcher Abstandsprobleme bilden metrische Räume (Kap. 2.4) und die Bestimmung von Voronoi-Zerlegungen, die im Abschnitt 4.2 studiert werden.

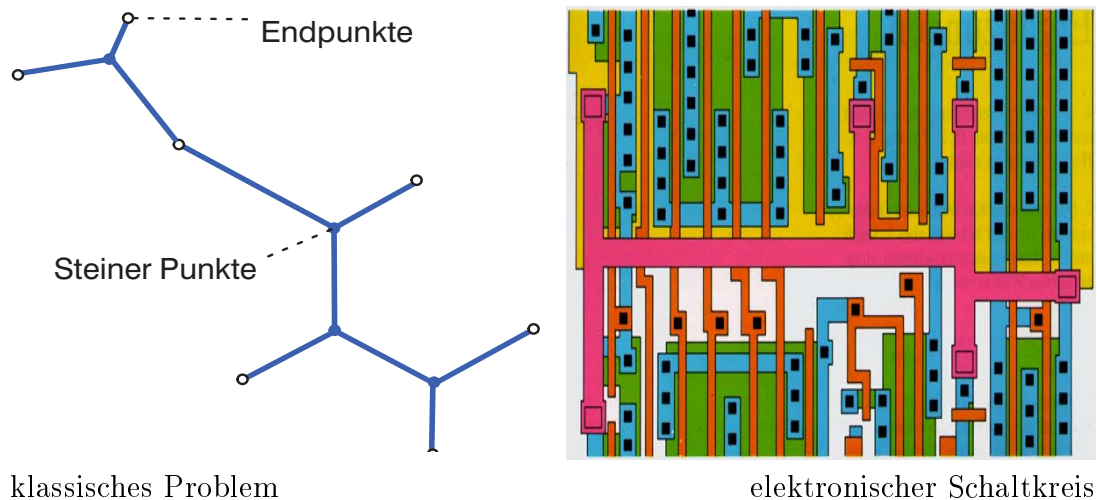


ABBILDUNG 1.2.4. Steiner-Probleme (aus [36])

Auch bei der Planung von Energie-, Wasserleitungs- und Telefonnetzen spielt der Wunsch, möglichst kurze Verbindungen zu realisieren eine zentrale Rolle. Die Abstraktion solcher Probleme kann auf die Bestimmung kürzester Netzwerke zurückgeführt werden. Hierbei stellt sich die Frage, wie kann man das kürzeste Netzwerk, das eine Anordnung von beispielsweise hundert Punkten durch gerade Linien verbindet, finden. Die Klasse solcher Problemstellungen werden nach dem Schweizer Mathematiker Jacob Steiner (1796-1863) als Steiner-Probleme bezeichnet. Anwendungen sind im Bereich der Planung und

Realisierung von Telefon-, Pipeline- und Straßennetzen zu finden. Angenäherte oder exakte Lösungen können Richtlinien für das Netzwerk-Layout und den Materialbedarf liefern. Unter Zuhilfenahme von Nebenbedingungen können geographische Geländestrukturen mit einbezogen werden oder es können die kürzesten Verbindungen in bereits vorhandenen Netzwerken gefunden werden. Die weitaus wichtigste Anwendung liegt im Design elektronischer Schaltkreise (Abb. 1.2.4). Die mögliche Schaltgeschwindigkeit hängt von der Länge des Netzwerkes von Leiterverbindungen ab. Da die Leiterverbindungen im allgemeinen nur in zwei Richtungen verlaufen, müssen andere geometrischen Eigenschaften als die der euklidischen Geometrie zugrunde gelegt werden.

1.2.5. Sonstige Anwendungsbereiche. Neben obigen Anwendungsbereichen gibt es eine Vielzahl von Einzelanwendungen in denen geometrische Probleme auftreten und geometrische Algorithmen und Datenstrukturen zu deren Lösung eingesetzt werden. Bekannte Beispiele kommen aus dem Bereich der molekularen Modellierung und der Mustererkennung. Anwendungen aus dem produzierenden Gewerbe können die Steuerung von Fräsmaschinen oder Zuschnittsprobleme in der Textilindustrie sein. In Zukunft werden auch nichtgeometrische Fragestellungen geometrisch formuliert und gelöst. Beispiele hierfür sind Optimierungsaufgaben, Parameterinterpolationen und die Datenhaltung innerhalb von Datenbanken. Neue Fragestellungen kommen hinzu, wenn Interpolation und Extrapolation von Daten sowohl im Raum als auch in der Zeit betrachtet werden müssen.

Neben den Bezügen zu Anwendungen im Bauingenieurwesen in den jeweiligen Kapiteln wird am Ende dieser Arbeit der Schwerpunkt auf Anwendungen geometrischer Algorithmen in der Umweltsystemmodellierung (Kap. 6) gelegt. Hierbei wird sowohl auf die verschiedenen Aspekte der bathymetrischen Modellierung im Küsteningenieurwesen (Abschn. 6.1) als auch auf geometrische Aspekte der Modellbildung geologischer Systeme eingegangen.

Geographische Informations-Systeme bilden in vielen Bereichen die Basis für Planungs- und Entscheidungsprozesse. Auf der anderen Seite entwickeln sich Geographische Informations-Systeme (Abschn. 6.3) immer mehr zu einem bindenden Glied zwischen Datenerhebung und -haltung über die Datenanalyse bis hin zu prognostischen Werkzeugen in Form von Simulationssystemen. Für eine Vielzahl numerischer Simulationen zur Beschreibung von Umweltprozessen müssen aus den Geometrieinformationen Gitternetze generiert werden, die als Rechenetze Verwendung finden. Neben den Netzen haben die verwendeten Rand- und Anfangswerte einen entscheidenden Einfluß auf die Qualität der Simulationsergebnisse. Auch in diesen Bereichen können geometrischer Algorithmen zur Adaption der Modellrandwerte (Abschn. 6.5) und zur Identifikation von Parametern aus parametrischen Modellansetzen (Abschn. 6.6) herangezogen werden.

Methodische Grundlagen

Seit frühester Kindheit verbinden wir mit dem Begriff des Raumes unsere Umgebung. Schon im Altertum haben sich Wissenschaftler wie PYTAGORAS und EUKLID mit geometrischen Problemen beschäftigt und erste wissenschaftliche Grundlagen des Raumbegriffes eingeführt. EUKLID führte eine Axiomatik ein, die dem Raum unserer Erfahrungen mit dem Begriff des euklidischen Raumes eng in Verbindung brachte. Die Geometrie des euklidischen Raumes war über Jahrhunderte Gegenstand intensiver Forschungen. Die Einführung von Koordinaten durch DESCARTES ermöglichte es, geometrische Objekte durch Zahlen zu beschreiben. Weitere Eigenschaften der uns umgebenden Räume konnten mit der Zeit formalisiert werden. So sind Konstruktionsprozesse [106], die Schaffung geographischer Informationssysteme [75] als auch die Modellierung von Verkehrssystemen [80] im Rechner ohne die Kenntnis topologischer Eigenschaften nicht oder nur unzureichend möglich. Erst durch eine solche Formalisierung wird man in die Lage versetzt, komplexe Sachverhalte im Rahmen numerischer Methoden zu beschreiben. Das grundlegende Verständnis von Funktionenräumen ermöglicht die Nutzung der Methode der Finiten Elemente (siehe [182] und [71]) sowohl in der Umwelttechnik, der Meteorologie, dem Küsteningenieurwesen [130] als auch im Fahrzeugbau. Nicht zuletzt der stochastische Charakter der meisten natürlichen Prozesse erfordert die Kenntnis von Maßräumen, die am Ende dieses Abschnittes behandelt werden.

Durch die Nutzung des Computers als Werkzeug ohne Augen, rückten geometrische Fragestellungen und deren Abstraktion wieder in den Vordergrund. Bei der Organisation von Daten und der Formulierung von Algorithmen muß sich die Frage gestellt werden, auf welchen geometrischen bzw. mathematischen Eigenschaften diese basieren. Bevor jedoch auf konkrete mathematische Räume eingegangen werden kann, sind einige Vorbetrachtungen notwendig. So läßt es sich nicht vermeiden, den Begriff der Menge näher zu beleuchten.

2.1. Mengen und Folgen

Als wesentliche Grundlage vieler Bereiche der Naturwissenschaften dient der Begriff der **Menge**. Und gerade dieser mathematische Grundbegriff ist nicht eindeutig definierbar. Häufig wird deshalb auf eine von G.CANTOR gegebene Beschreibung zurückgegriffen: „Jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ der Menge genannt werden) zu einem Ganzen“ wird als Menge bezeichnet. In einer Menge darf jedes Element nur einmal vertreten sein. Es wird also vorausgesetzt, daß für je zwei Elemente $x, y \in M$ festgestellt werden kann,

ob sie gleich (was mit $x = y$ gekennzeichnet wird) oder ungleich sind. Hierbei muß die Relation der Gleichheit eine Äquivalenzrelation sein.

Im weiteren werden die grundlegenden Begriffe **Teilmenge**, **Komplement** sowie die Mengenoperationen **Durchschnitt** (\cap), **Vereinigung** (\cup) und **Mengendifferenz** (\setminus) als bekannt vorausgesetzt ([8],[48],[2]). Die Anzahl der Elemente einer Menge M wird als **Mächtigkeit** bzw. Kardinalzahl von M ($|M|$) bezeichnet. Ist $|M| = 0$, so wird von der **leeren Menge** \emptyset gesprochen, von einer endlichen, wenn $|M| < \infty$ und sonst von einer unendlichen. Zwei Mengen M und N werden als **disjunkt** bezeichnet, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt. Die Elemente einer Menge können selbst wieder Mengen sein. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M .

Ein wesentliches Merkmal einer Menge ist, daß in ihr keinerlei Ordnung herrscht. So kann man nicht von einem ersten oder letzten Element sprechen bzw. von Nachfolgern. Durch die Aufprägung einer natürlichen Ordnung wird aus einer Menge eine Folge.

DEFINITION 2.1.1. Eine eindeutige Abbildung φ der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen in eine Menge M heißt **Folge**. Setzt man für $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) = a_n$, so nennt man die a_n die **Glieder** der Folge und schreibt $\varphi = \{a_n\}$.

Ausgehend von der Ordnung der natürlichen Zahlen kann ein allgemeiner Ordnungsbe-
griff über die Definition von Relationen mit speziellen Eigenschaften erfolgen.

DEFINITION 2.1.2. Eine Menge M mit den Elementen a, b, c besitzt eine Relation \preceq , die eine **Ordnung**(-srelation) auf M definiert, wenn die drei folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. $a \preceq a$,
2. falls $a \preceq b$ und $b \preceq a$, dann ist $a = b$,
3. falls $a \preceq b$ und $b \preceq c$, dann ist $a \preceq c$.

Das Paar (M, \preceq) heißt dann eine **geordnete Menge**. Die Ordnung kann auch auf Mengen von Mengen erweitert werden.

Erfüllt eine Relation die unter 1 genannte Bedingung, so wird sie als reflexiv bezeichnet. Ist dagegen 2 erfüllt, wird sie als antisymmetrisch bezeichnet. Gilt demgegenüber 3, so ist die Relation transitiv. Damit eine Ordnung auf einer Menge definiert ist, muß folglich eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf dieser Menge gegeben sein.

Der Zermelo'sche Wohlordnungssatz besagt, daß sich jede Menge wohlordnen läßt. Hierbei bezeichnet man eine Menge M als wohlgeordnet, wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein erstes Element hat.

2.2. Allgemeine Räume

Das Konzept der mathematischen Räume hat einen sehr allgemeinen Charakter. Bei der Einführung und Definition von Räumen wird im weiteren versucht, eine ständige Spezialisierung der Räume zu dokumentieren und ihre wichtigsten Eigenschaften aufzuführen. Die grundlegendste Eigenschaft eines Raumes kann durch die Regel: „Wo ein Körper ist, kann sich kein zweiter befinden.“, beschrieben werden. Dies bedeutet, daß die Elemente

eines Raumes wohlunterscheidbar sind und jedes nur einmal auftreten darf. Durch bestimmte Beziehungen zwischen den Elementen des Raumes erfolgt eine Strukturierung der Menge. Dies führt zur folgenden

DEFINITION 2.2.1. Ein **Raum** M ist eine *strukturierte Menge* von Elementen m_i , deren Anzahl beliebig sein kann.

Werden die Elemente eines Raumes betrachtet, so spricht man auch häufig von den Punkten des Raumes. Eine genauere Festlegung der Verschiedenheit der Elemente eines Raumes kann z.B. über die Definition eines Abstand zwischen ihnen geschaffen werden. Hat ein Raum die Eigenschaft, zwischen zwei Elementen den Abstand zu definieren, so spricht man von einem metrischen Raum. Durch die Bildung von Teilmengen von Elementen eines Raumes mit festgelegten Eigenschaften erhält man eine andere Strukturierung der Elemente eines Raumes. Räume, auf denen Mengensysteme definiert sind, werden topologische Räume genannt. Werden Rechenregeln (in Anlehnung an die der reellen Zahlen) wie Addition und Multiplikation mit und auf den Elementen des Raumes definiert, so spricht man von linearen Räumen.

Insbesondere lineare Räume spielen im weiteren eine zentrale Rolle, da sie den uns umgebenden Räumen unserer Erfahrung im wesentlichen entsprechen. Den Elementen eines linearen Raumes können weitere Eigenschaften mit auf den Weg gegeben werden. Solche sind der Betrag (Norm) eines Elementes und die Einführung von Winkelbeziehungen (Skalarprodukt) zwischen den Elementen.

Es wird sich zeigen, daß eine gewisse Hierarchie bei der Definition der unterschiedlichen Räume existiert. Eine Strukturierung der Räume bezüglich ihrer Spezialisierung ist in der Abbildung 2.2.1 dargestellt.

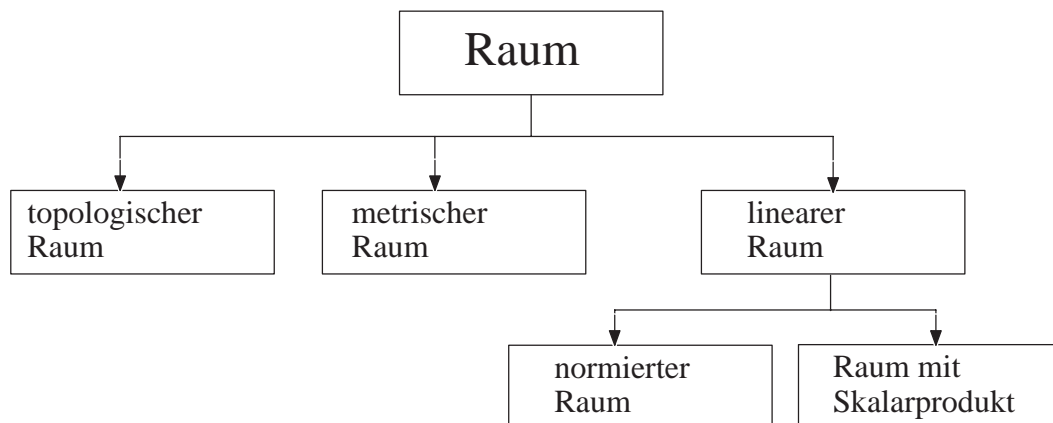


ABBILDUNG 2.2.1. Raumhierarchie

2.3. Der topologische Raum

In topologischen Räumen wird neben der Unterscheidbarkeit der Elemente des Raumes zusätzlich so etwas wie Nähe eingeführt, ohne daß zwangsläufig ein Abstand definiert sein muß. Die Umgebung ist hierbei der grundlegende Begriff. Im folgenden wird ein Zugang über ein Axiomensystem für offene Mengen verfolgt, der es ermöglicht, eine vereinfachte Definition des allgemeinen Umgebungsbegriffes zu geben. Eine umfassende Einführung in die Theorie der topologischen Räume wird in [156] und [120] gegeben.

DEFINITION 2.3.1. Es sei M eine Menge. Ist für M ein System Ω von Teilmengen festgelegt, das folgende Eigenschaften besitzt:

1. die leere Menge \emptyset und M gehören zu Ω ,
2. die Vereinigung einer beliebigen Familie von Mengen aus Ω gehört zu Ω und
3. der Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus Ω gehört zu Ω ,

so sagt man, daß Ω auf M eine **Topologie** definiert.

DEFINITION 2.3.2. Eine Menge M , auf der eine Topologie Ω definiert ist, heißt **topologischer Raum** und wird mit (M, Ω) bezeichnet. Die Elemente von M heißen Punkte des topologischen Raumes.

BEISPIEL: Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Dann lassen sich u.a. folgende Topologien festlegen:

1. $\{\}, \{0, 1, 2, 3\}$ (indiskrete Topologie),
2. $\{\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}$ (Topologie ohne die Mengen $\{3\}, \{0, 3\}, \dots$),
3. Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M (diskrete Topologie).

Die Elemente einer Teilmenge T der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, durch die eine topologische Struktur festgelegt wird, werden als **offene Mengen** des topologischen Raumes bezeichnet.

Das Gegenstück zum Begriff der offenen Menge ist der Begriff der abgeschlossenen Menge.

DEFINITION 2.3.3. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $T^c := M \setminus T$ offen ist.

Die Eigenschaften offen und abgeschlossen schließen sich nicht gegenseitig aus. Teilmengen eines topologischen Raumes können sowohl abgeschlossen als auch offen sein. Aus der Definition einer Topologie kann sofort festgestellt werden, daß die gesamte Menge M und die leere Menge zugleich offen und abgeschlossen sind. Weiterhin ist in einem Raum mit einer diskreten Topologie jede Teilmenge zugleich offen als auch abgeschlossen. Offenbar sind die diskrete Topologie (die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M) und die indiskrete Topologie ($\{\emptyset, M\}$) ausgezeichnete Topologien und werden als feinste und gröbste Topologie bezeichnet. Diese Betrachtungen führen zur Definition der Vergleichbarkeit von Topologien.

DEFINITION 2.3.4. Zwei Topologien T_1 und T_2 auf M heißen vergleichbar, wenn eine der Topologien eine Teilmenge der Anderen ist. Gilt $T_1 \subset T_2$, so heißt T_1 die gröbere und T_2 die feinere Topologie.

Mit Hilfe der offenen Mengen läßt sich nun der Begriff der *Umgebung* eines Punktes in einem topologischen Raum definieren.

DEFINITION 2.3.5. Man nennt eine Teilmenge U **Umgebung** des Punktes p , falls es eine offene Menge O gibt, so daß $p \in O \subseteq U$ gilt.

Ein Punkt $p \in M$ heißt **innerer Punkt**, falls es eine Umgebung U von p gibt, deren Punkte alle zu M gehören. Die Menge der inneren Punkte von M heißt das **Innere** von M . Als Umkehrung wird ein Punkt p **äußerer Punkt** genannt, wenn er innerer Punkt der komplementären Menge ist. Ein **Randpunkt** liegt dann vor, wenn er nicht innerer Punkt aber auch nicht äußerer Punkt ist.

Möchte man vom Abschluß einer Menge in einem topologischen Raum sprechen, so muß zunächst der Begriff des Berührungspunktes eingeführt werden. Ein Punkt p des topologischen Raumes M heißt **Berührungspunkt** der Teilmenge T von M , wenn jede Umgebung von p einen nichtleeren Durchschnitt mit T besitzt. Offensichtlich sind alle inneren und auch alle Randpunkte von T Berührungspunkte von T . Die Menge der Berührungspunkte von T heißt **abgeschlossene Hülle** und wird mit \bar{T} bezeichnet. Ist die abgeschlossene Hülle die kleinste abgeschlossene Menge, die T enthält so wird die größte offene Menge, die in T enthalten ist, als **offener Kern** $\overset{\circ}{T}$ oder $\text{int}(T)$ bezeichnet.

Werden mehrere topologische Räume betrachtet, so gelangt man auf natürliche Weise zu der Fragestellung, ob es ausgezeichnete Abbildungen zwischen solchen topologischen Räumen gibt. Eine zentrale Rolle spielen Abbildungen, die die Eigenschaften von Gebilden (Teilmenge) im topologischen Sinne erhalten.

DEFINITION 2.3.6. **Homöomorph** oder **topologisch** heißt eine Abbildung des topologischen Raumes X in den topologischen Raum Y , wenn sie umkehrbar eindeutig (bijektiv) ist und wenn sie offene Mengen ineinander abbildet. Dies bedeutet, daß jede offene Menge von X eine offene Menge von Y als Bild besitzt und jede offene Menge von Y Bild einer offenen Menge von X ist.

Eine weitere häufig betrachtete Eigenschaft von Abbildungen ist die Stetigkeit. Eine sehr allgemeine Definition kann auf der Grundlage einer Topologie gegeben werden.

DEFINITION. Es seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von X nach Y . f heißt **stetig im Punkt** $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung $U(f(x))$ von $f(x)$ eine Umgebung $U_1(x)$ von x gibt, mit der Eigenschaft: $f(U_1(x)) \subseteq U(f(x))$.

Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

DEFINITION 2.3.7. Existieren zwischen topologischen Räumen zwei stetige Abbildungen f und g mit $f, g : X \rightarrow Y$, dann heißen diese **homotop** ($f \simeq g$), wenn es eine dritte stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, so daß gilt: $h(x, 0) = f(x)$ und $h(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Die Abbildung h wird **Homotopie** genannt, wobei sie mitunter auch als stetige Deformation von f in g bezeichnet wird.

Diese sehr allgemeine Definition wird erst in späteren Abschnitten an Bedeutung gewinnen, wenn es um Interpolationen in Funktionenräumen (Abschn. 5.2) geht oder um Anwendungen wie das Morphing von Objekten (Abschn. 5.8).

Im Rahmen von Anwendungen im Ingenieurwesen und bei der Geometriemodellierung tritt die Aufgabe in den Vordergrund, *topologische Invarianten* zu bestimmen. Ziel hierbei ist die Klassifizierung von realen geometrischen Objekten nach ihren topologischen Eigenschaften. Umgangssprachlich bedeutet dies, daß Abmessung und Form keine Rolle spielen. Es müssen jedoch die wesentlichen topologischen Eigenschaften erhalten bleiben.

Zwei Realisierungen X und Y einer mathematischen Struktur sieht man als nicht wesentlich verschieden an, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge X auf die Menge Y gibt, welche die Struktur erhält. Zu den schon genannten Eigenschaften

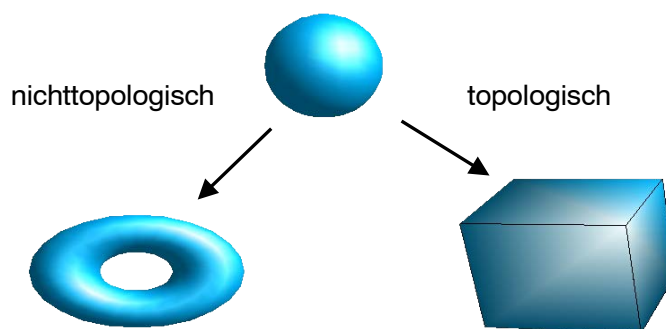


ABBILDUNG 2.3.1. Topologische und nichttopologische Abbildung

- Offenheit,
- Randpunkteigenschaft,
- Trennung von innen / außen,

gehört auch der Zusammenhang von Mengen. Zusammenhang ist ein sehr intuitiver Begriff. Es stellt sich aber heraus, daß die intuitive Vorstellung von Zusammenhang nicht dem topologischen Zusammenhang, sondern dem Weg-Zusammenhang entspricht.

DEFINITION 2.3.8. Ein topologischer Raum (M, Ω) heißt **nicht zusammenhängend**, wenn M die Vereinigung zweier nichtleerer, offener disjunkter Teilmengen ist, wenn also

$$M = M_1 \cup M_2 \text{ mit } M_1, M_2 \in \Omega, M_1 \cap M_2 = \emptyset \text{ und } M_1, M_2 \neq \emptyset$$

gilt. Der Raum (M, Ω) heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht nicht zusammenhängend ist.

Dies bedeutet, daß ein topologischer Raum M zusammenhängend ist, falls für jedes Paar disjunkter Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \cup M_2 = M$ entweder M_1 oder M_2 die leere Menge ist.

Bei der Untersuchung topologischer Räume ist es häufig vorteilhaft, statt der Menge aller offenen Untermengen eine solche Untermenge zu betrachten, daß jede offene Menge Vereinigung (endlich oder unendlich) vieler Elemente dieser Untermenge ist.

DEFINITION 2.3.9. Sei (M, Ω) ein topologischer Raum. Ein System B offener Mengen von M , also mit $B \subset \Omega$, heißt eine **Basis** der Topologie Ω , wenn

1. jede offene Menge $G \in \Omega$ Vereinigung von Mengen aus B ist,
2. zu jedem Punkt p , der zu einer offenen Menge G gehört, eine Menge $D \in B$ mit $p \in D \subset G$ existiert.

Jeder topologische Raum hat zumindest eine Basis, nämlich die Basis, die aus allen offenen Mengen besteht. Es gibt jedoch auch Basen die aus weniger Elementen bestehen.

BEISPIEL: Im euklidischen Raum \mathfrak{R}^3 sind z.B. Basen:

- Die Menge der offenen Kugeln $K(m, r)$ mit rationalen Radien und rationalen Mittelpunktskoordinaten.
- Die Menge aller offenen Kugeln.
- Die Menge aller offenen Würfel mit zu den Achsen des Koordinatensystems parallelen Kanten.

Häufig wird man vor dem Problem stehen, daß man zu einem Raum nur noch eine Teilmenge betrachten will. Hierbei möchte man wissen, ob Eigenschaften des Oberraumes Eigenschaften in der Teilmenge nach sich ziehen.

DEFINITION 2.3.10. Sei (M, Ω) ein topologischer Raum und $T \subseteq M$, so wird auf T eine Topologie, die **Relativtopologie**, wie folgt induziert: $\Omega^T := \{\omega \cap T : \omega \in \Omega\}$.

Ausgehend von dieser Definition kann man nun von relativ inneren, äußeren und Randpunkten sowie vom Zusammenhang von Teilmengen eines topologischen Raumes sprechen.

DEFINITION 2.3.11. Eine Teilmenge T eines topologischen Raumes M wird **zusammenhängend** genannt, wenn sie versehen mit der Relativtopologie einen zusammenhängenden topologischen Raum bildet.

Verwendet man an dieser Stelle die Definition 2.3.8 von nicht zusammenhängenden topologischen Räumen, so werden zwei Mengen A und B als **nicht zusammenhängend** (separiert) bezeichnet, wenn sie versehen mit der Relativtopologie einen nicht zusammenhängenden topologischen Raum bilden.

Eine wichtige Spezialisierung topologischer Räume erreicht man durch die Forderung der Trennbarkeit der Elemente des Raumes.

DEFINITION 2.3.12. Ein topologischer Raum (M, Ω) heißt **separiert** bzw. erfüllt das Trennungsaxiom T_2 , wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Zu zwei beliebigen aber verschiedenen Elementen p und q des Raumes M gibt es stets Umgebungen $U(p)$ und $U(q)$, deren Durchschnitt leer ist: $U(p) \cap U(q) = \emptyset$.

Die Separierbarkeit eines topologischen Raumes gibt Aufschluß über dessen Feinheit. Ein solcher topologischer Raum, der separierbar ist, wird auch **Hausdorffscher Raum** genannt. Es wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen, daß jeder durch eine Metrik induzierte topologische Raum ein Hausdorffscher Raum ist. Neben dem Hausdorff-Kriterium sind in der Mathematik noch weitere Trennungsaxiome, die spezielle topologische Räume

charakterisieren, üblich. Da sie für diese Arbeit von untergeordneter Bedeutung sind, wird nicht näher auf sie eingegangen.

In Anlehnung an das Hausdorffsche Trennungsaxiom kann nun festgelegt werden, was man unter getrennten Mengen eines topologischen Raumes zu verstehen hat.

Im Rahmen der Bauinformatik wird die Topologie im wesentlichen zur Charakterisierung der räumlichen Beziehungen von Ingenieurobjekten herangezogen. Hierbei ist die Topologie stets ein gemeinsames Charakteristikum von zwei oder mehreren Ingenieurobjekten. Die topologische Strukturierung raumbezogener Objekte - z.B. innerhalb von Geo-Informations- oder CAD-Systemen - bietet den Vorteil, ohne Kenntnis ihrer Koordinaten, sie in ihren gegenseitigen Beziehungen zu manipulieren. Andere Fragestellungen sind Konsistenzprüfungen in geometrischen Modellen [106], Abfrage über kürzeste Wege innerhalb raumbezogener Daten oder Untersuchungen des für die Präsentation interessanten Vierfarbenproblems.

2.4. Der metrische Raum

Eine genauere Festlegung der Verschiedenheit von Elementen eines Raumes ist durch den Begriff des Abstandes möglich. Im folgenden Kapitel werden neben den grundlegenden Definitionen und Eigenschaften metrischer Räume weitere wichtige, mit dem Abstands-begriff eng zusammenhängende Begriffe eingeführt und erläutert. Zu den wichtigsten Vertretern gehören die Kugel, die Konvergenz sowie Nachbarschaftsbeziehungen in Form von VORONOI-Zerlegungen. Am Ende wird auf vollständige Räume eingegangen. Ergänzende Darstellungen zu den Eigenschaften metrischer Räume findet man in [33].

DEFINITION 2.4.1. Ein *Raum* M heißt ein **metrischer Raum**, wenn jedem Elementepaar p, q aus M eine nichtnegative reelle Zahl $d(p, q)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d(p, q) = 0 \iff p = q$, (Identitätsaxiom)
2. $d(p, q) = d(q, p) \forall p, q \in M$, (Symmetrieaxiom)
3. $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q) \forall p, q, r \in M$ (Dreiecksungleichung)

zugeordnet werden kann. Eine binäre reellwertige Funktion, die nur symmetrisch und für alle Elementepaare des Raumes positiv ist und nicht der Dreiecksungleichung genügt, wird als Halbmetrik oder **Distanzfunktion** bezeichnet.

Die Funktion $d : M \times M \rightarrow \mathfrak{R}_0^+$ heißt **Metrik** auf M . Bei der Definition einer Metrik sind keine zusätzlichen Bedingungen an die Elemente des Raumes zu stellen.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß nicht nur die Räume unserer Erfahrungen mit Abstandsfunktionen versehen sind, vielmehr ist es möglich, auch abstraktere Mengen wie z.B. Zeichensätze mit Abstandsfunktionen zu versehen und so wohlbekanntere Verfahren anwendbar zu machen. Wenn es erforderlich ist, werden metrische Räume im folgenden auch als geordnete Paare (M, d) identifiziert.

BEISPIEL 1: Die Menge \mathfrak{R} der reellen Zahlen bildet bezüglich

$$d(p, q) := |p - q|$$

einen metrischen Raum.

BEISPIEL 2: In der Menge $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ wird durch $d((p_1, p_2), (q_1, q_2)) := |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$ eine Metrik m_1 definiert. Man nennt sie auch **Taxi-Metrik** (weil in einem gitterförmigen Straßennetz die von einem Taxi zurückgelegte Fahrstrecke zwischen zwei Punkten dieser Metrik entspricht) oder auch **Manhattan-Metrik**.

BEISPIEL 3: In \mathfrak{R}^2 wird durch $d((p_1, p_2), (q_1, q_2)) := \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ eine Metrik m_2 definiert, welche mit der anschaulichen Vorstellung von der Entfernung zweier Punkte in der Ebene übereinstimmt. Man nennt sie auch die **euklidische Metrik** in \mathfrak{R}^2 .

BEISPIEL 4: $d((p_1, p_2), (q_1, q_2)) := \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$ wird als **Maximum-Metrik** bezeichnet.

Allgemein kann man bei den reellen Vektorräumen für jedes $p \geq 1$ eine Metrik

$$d_p(\vec{q}, \vec{r}) := \left(\sum |q_i - r_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definieren.

BEISPIEL 5: Die Menge aller Buchstaben bilden einen metrischen Raum. Wird jedem Buchstaben *eine* natürliche Zahl (z.B. der ASCII-Code) zugeordnet, so kann man einen Abstand zwischen zwei Zeichen als Betrag der Differenz der zugeordneten Zahlen definieren.

AUSSAGE: Die Linearkombination mit positiven Vorfaktoren von Metriken auf einer gegebenen Menge ist wieder eine Metrik.

Eine zentrale Rolle in metrischen Räumen spielt der Begriff der Kugel und die mit ihr in engem Zusammenhang stehende Eigenschaft der Beschränktheit einer Menge. Betrachtet man einmal die formale Definition einer Kugel, so muß man feststellen, daß es Kugeln gibt, die überhaupt nicht im klassischen Sinne rund sind (siehe Abbildung 2.4.1). Das Vorhandensein von Kugeln setzt immer die Existenz einer Abstandsfunktion voraus.

DEFINITION 2.4.2. Unter einer **Kugel** mit dem Radius R und dem Mittelpunkt p^0 versteht man alle Elemente p aus M , deren Abstand zu p^0 kleiner gleich dem Radius R ist

$$(2.4.1) \quad K(p^0, R) := \{p \in M : d(p^0, p) \leq R\}.$$

Neben der Verschiedenheit einzelner Elemente kann über die Abstandsfunktion eine Charakterisierung der Ausdehnung einer Teilmenge eines metrischen Raumes vorgenommen werden.

Eine Kugel mit minimalem Radius, die eine Menge M umschließt, heißt **Umkugel** von M , eine größte Kugel, die in ihr vollständig enthalten ist, **Inkugel**. Weder Um-

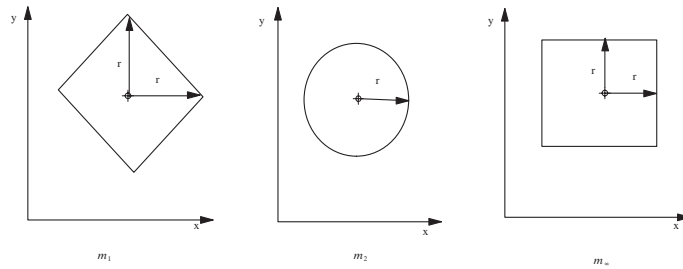


ABBILDUNG 2.4.1. Verschiedene Metriken in \mathbb{R}^2

noch Inkugel sind damit eindeutig definiert, noch immer vorhanden. So sind In- und Umkugel einer unbeschränkten Menge nicht vorhanden, während der Streifen zwischen zwei parallelen Hyperebenen unendlich viele Inkugeln hat.

Eine Menge A eines metrischen Raumes M heißt **beschränkt**, falls es eine Kugel $K(p^0, R) \subseteq M$ mit endlichem Radius R gibt, so daß A vollständig in dieser Kugel liegt: $A \subset K(p^0, R)$.

Metriken erhalten ein besonderes Gewicht bei der Formulierung einer ganzen Klasse von Interpolations- und Approximationsverfahren (Abschn. 5.6.1 zur Shepard-Interpolation oder Abschn. 5.7 zu geostatistischen Methoden). Aber auch bei der Zerlegung eines Gebietskontinuums in Teilgebiete spielen Abstandsfunktionen eine zentrale Rolle.

2.4.1. VORONOI-Zerlegung.

Die Beschreibung von Einfluß- und Einzugsbereichen sind häufig auftretende Problemstellungen. Beispiele hierfür sind Gravitations-, elektromagnetische und andere Kraftfelder.

Gegeben sei eine Punktmenge $P = \{p^1, p^2, \dots, p^N\}$ in einem metrischen Raum M . Die Beziehung der Punkte p des metrischen Raumes zu den Bezugspunkten p^k kann durch den Abstand $d(p, p^k)$ allein nicht eindeutig beschrieben werden, da mehr als ein Punkt aus M den Abstand d zu p^k besitzen kann. Im Gegensatz hierzu ist die Teilmenge in M eindeutig, deren Punkte einen geringeren Abstand zu p^k als zu allen anderen Punkten in P besitzen. Diese Eindeutigkeit ist die Grundlage zahlreicher geometrischer Methoden, zu denen auch die Voronoi-Zerlegung gehört. In der Literatur ist die Definition von Voronoi-Zerlegungen und deren zugrundeliegenden Voronoi-Regionen nicht einheitlich (siehe [19] und [99]). Der wesentliche Unterschied liegt darin, ob eine solche Region abgeschlossen oder offen ist. Im Rahmen dieser Abhandlung werden Voronoi-Regionen wie auch Kugeln immer als abgeschlossene Mengen in der metrischen Topologie aufgefaßt.

Die Menge der Punkte $p \in M$, deren Abstand zu einem Bezugspunkt p^k aus P kleiner oder gleich ihrem Abstand zu allen anderen Bezugspunkten aus P ist, heißt **Voronoi-Region** des Bezugspunktes p^k . Als Kurzbezeichnung wird V-Region VR_k verwendet:

$$(2.4.2) \quad VR(p^k) := \{p \in M : d(p, p^k) \leq d(p, p^i) \quad \forall i \neq k\}.$$

Voronoi-Regionen können sowohl beschränkt als auch unbeschränkt sein. Ihre geometrischen Eigenschaften und ihr Aussehen hängen von der Lage der Voronoi-Punkte sowie wesentlich von der zugrundeliegenden Metrik ab (Abb. 2.4.2).

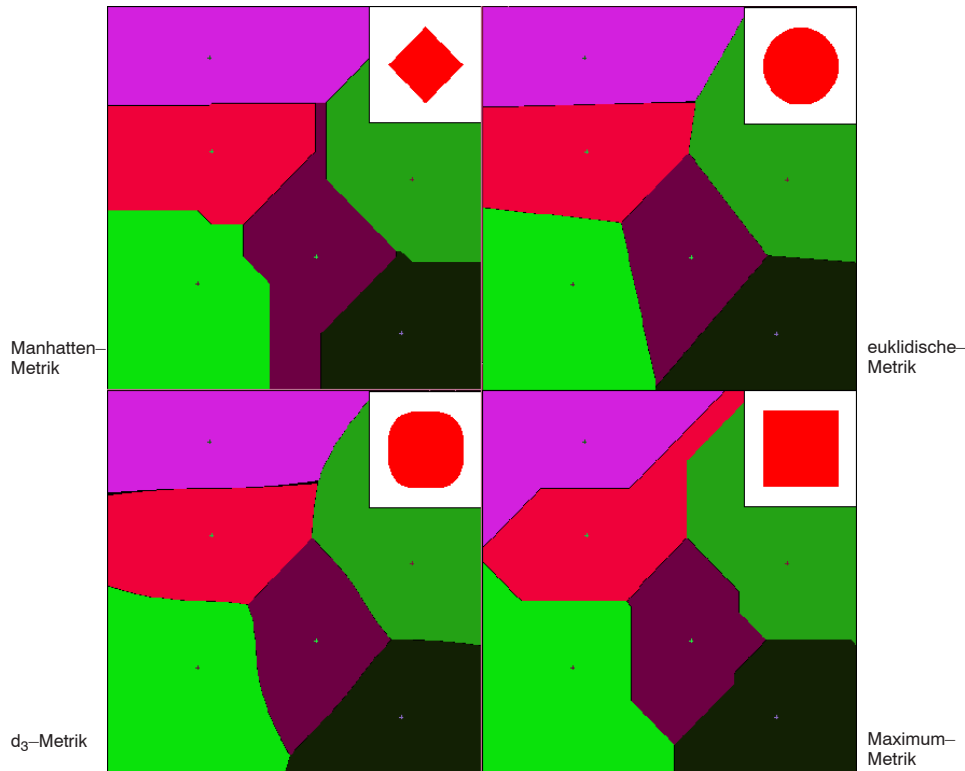


ABBILDUNG 2.4.2. Voronoi-Zerlegungen einer Punktmenge bezüglich unterschiedlicher Metriken

DEFINITION 2.4.3. Die Menge aller V-Regionen $VD := \{VR_1, VR_2, \dots, VR_N\}$ wird als **Voronoi-Zerlegung** bezeichnet.

Der Punkt p^k heißt nächster Nachbar der Punkte in VR_k . Die Menge der Punkte, die denselben Abstand zu zwei Bezugspunkten p^i und p^m haben, heißt **Voronoi-Grenze** $VG(p^i, p^m) = VR(p^i) \cap VR(p^m)$ zwischen p^i und p^m . Eine andere gebräuchliche Bezeichnung für die Menge aller Punkte mit gleichem Abstand zu zwei Bezugspunkten ist **Bisektor** $B(p^i, p^m)$. Der Begriff der Voronoi-Grenze wurde gewählt, um auch solche Punktmenge beschreiben zu können, die zu mehr als zwei Voronoi-Regionen gehören.

Der Begriff des **Voronoi-Diagramms** wird in der Literatur nicht eindeutig verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Definition von R. Klein [99] gefolgt: „Die Menge aller Punkte, die keinen eindeutigen nächsten Punkt besitzen, sondern zwei oder mehr nächste Nachbarn haben, werden als Voronoi-Diagramm bezeichnet“.

Die soeben dargestellten Definitionen stellen jedoch nur eine kurze Einführung dar, so daß dem Themenkomplex Voronoi-Zerlegungen ein eigener Abschnitt gewidmet wird

(Abschn. 4.2).

2.4.2. Folgen und Konvergenz.

Folgen sind Mengen, denen eine Ordnungsstruktur aufgeprägt ist. Mit Hilfe des Folgenbegriffes ist eine einfache Identifizierung von Elementen einer Menge möglich. Ein Folge ist eine Zuordnungsvorschrift der Elemente einer Menge zur Menge der natürlichen Zahlen (Def. 2.1.1).

DEFINITION 2.4.4. Ein Element a des metrischen Raumes (M, d) heißt **Grenzwert** oder **Limes** einer Folge $\{a_n\} \subseteq M$, wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $d(a_n, a) < \varepsilon$. Besitzt eine Folge $\{a_n\}$ den Grenzwert a , dann sagt man: Die Folge $\{a_n\}$ **konvergiert** gegen den Grenzwert a . Eine Folge heißt **divergent**, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

Besonders die Beurteilung der Konvergenz von Folgen ist kein einfaches Unterfangen. Nach den obigen Definitionen wird vorausgesetzt, daß man von einem Element $a \in M$ vermuten muß, daß es der Grenzwert der zu untersuchenden Folge ist. Es wird sich zeigen, daß in gewissen metrischen Räumen die Frage, ob eine Folge konvergent ist, auf anderem Wege beantwortet werden kann. Dazu führt man zunächst einen neuen Begriff ein.

DEFINITION 2.4.5. Eine Folge $\{a_n\} \in (M, d)$ wird genau dann **Fundamentalfolge** oder Cauchy-Folge genannt, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:

Wenn $m, n \geq N(\varepsilon)$ ist, so folgt $d(a_m, a_n) < \varepsilon$.

THEOREM. *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum (M, d) ist auch eine Fundamentalfolge in (M, d) .*

BEWEIS. Es sei $\{a_n\}$ eine konvergente Folge in (M, d) mit dem Grenzwert $a \in M$. Wählt man ein beliebiges $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Zahl $n_0(\varepsilon/2)$ mit $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ für alle $n > n_0$. Betrachtet man nun den Abstand zwischen zwei Folgengliedern a_n und a_m mit $n, m > n_0$, so gilt:

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a, a_n) \leq \varepsilon.$$

□

DEFINITION 2.4.6. Eine Menge M heißt **kompakt**, wenn jede Folge $\{a_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{a_{n_j}\}$ mit einem Grenzwert $a \in M$ enthält.

Zu den später noch an Bedeutung gewinnenden Eigenschaften gehören:

1. jede kompakte Menge ist abgeschlossen,
2. jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt und
3. die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist kompakt.

2.4.3. Vollständige Räume.

Der Begriff des vollständigen Raumes hängt eng mit dem der Folge und der Konvergenz zusammen. Spricht man von konvergenten Folgen, so spricht man davon, daß sich die Elemente der Folge einem gewissen Element nähern, also der Abstand zu diesem Element gewisse Eigenschaften erfüllen muß. Es stellt sich nun die Frage, ob ein solches Element, zu dem eine Folge konvergiert, überhaupt existiert.

DEFINITION 2.4.7. Ein *metrischer Raum* M heißt **vollständig**, wenn jede Fundamentalfolge in M einen Grenzpunkt hat.

Die Vollständigkeit eines Raumes spielt eine zentrale Bedeutung im Rahmen von Interpolations- und Approximationsproblemen sowie bei iterativen Lösungsverfahren. Man denke nur daran, daß man ein konvergentes Verfahren konstruiert hat, jedoch das gesuchte Problem im betrachteten Raum überhaupt keine Lösung besitzt. Besonders bei iterativen Lösern ist die Vollständigkeit der betrachteten Räume als auch die Gültigkeit von Konvergenzkriterien besonders bei Anwendungen des Bauingenieurwesens sicherzustellen.

2.4.4. Der metrische Raum als topologischer Raum.

Durch die Definition der ε -Umgebung unter Zuhilfenahme eines Abstandes können offene Mengen in metrischen Räumen definiert werden. Die so entstehende Topologie wird **metrische Topologie** genannt.

DEFINITION 2.4.8. Als **ε -Umgebung** eines Punktes p eines metrischen Raumes M mit $\varepsilon > 0$ werden alle Punkte q bezeichnet, die zur Menge M gehören und für die $d(p, q) < \varepsilon$ gilt: $U_\varepsilon(p) := \{q \in M : d(p, q) < \varepsilon\}$.

Eine Teilmenge O aus der Trägermenge M eines metrischen Raumes ist **offen**, wenn mit jedem p aus O eine ε -Umgebung ($\varepsilon > 0$) von p zu O gehört. Die so definierten Mengen sind Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und entsprechen den obigen Definitionen einer Topologie, genannt **metrische Topologie**.

Jeder metrische Raum kann über die Definition von Umgebungen zu einem topologischen Raum gemacht werden. Man spricht von der durch die Metrik induzierten Topologie. Dies bedeutet jedoch nicht, daß jede Topologie auf einem metrischen Raum auch von der zugrundeliegenden Metrik induziert wurde, geschweige denn von überhaupt einer Metrik induziert worden ist. Der durch eine Metrik erzeugte topologische Raum ist zusätzlich separiert (Def. 2.3.12). In sogenannten Hausdorffschen Räumen gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten $a \neq b$ stets Umgebungen $U(a)$ und $U(b)$, deren Durchschnitt leer ist: $U(a) \cap U(b) = \emptyset$. Nach dem Identitätsaxiom für Metriken ist $d(a, b) = \varepsilon > 0$. Als Umgebungen kann man nun die offenen Kugeln um a und b mit dem Radien $\varepsilon/4$ wählen, welche auf Grund ihrer Radien disjunkt sind.

Eine metrische Topologie führt aber auch zu einer Klassenbildung in der Menge aller Metriken auf einem gegebenen Raum. Zwei Metriken d und \hat{d} heißen auf einer Menge M äquivalent, wenn sie die gleiche Topologie auf M induzieren, wenn also das System der

d -offenen Kugeln und das System der \widehat{d} -offenen Kugeln eine Basis für dieselbe Topologie auf M sind.

Die verblüffendste Eigenschaft, die hieraus erwächst, ist, daß alle Metriken d_p (aus dem Beispiel 4) auf dem reellen Vektorraum äquivalent sind. Trotz der markanten Unterschiede in der Form der zugehörigen Kreise bzw. Voronoi-Zerlegungen sind die topologischen Eigenschaften - resultierend aus der metrischen Topologie (wie die Abgeschlossenheit oder innerer Punkt zu sein) - für alle d_p -Metriken gleich. Diese und speziell die Eigenschaft der Stetigkeit einer Abbildung werden bei Interpolationsverfahren (Kap. 5) eine zentrale Rolle spielen. Wie man gesehen hat, ist die Festlegung eines Abstandes zum einen ein sehr natürliches Unterscheidungsmerkmal von Elementen einer Menge und zum anderen die Grundlage für eine Vielzahl von Interpolations- und Approximationsverfahren.

2.5. Der lineare Raum

Definiert man Rechenregeln (in Anlehnung an die der reellen Zahlen) wie Addition und Multiplikation mit und auf den Elementen des Raumes, so spricht man von linearen Räumen. Lineare Räume können als zentrale Untersuchungsobjekte der linearen Algebra (siehe [107] und [151]) angesehen werden. Die lineare Algebra ist ein wesentliches Hilfsmittel für Untersuchungen im Rahmen der Polyedergeometrie. Es wird sich herausstellen, daß man es bei Interpolations- und Approximationsaufgaben häufig auch mit linearen Räumen von Funktionen zu tun hat, worauf im Kapitel 5 näher eingegangen wird. Um jedoch lineare Räume in ihrer Allgemeinheit beschreiben zu können, ist eine einführende Definition notwendig, die den Begriff des Körpers beinhaltet und als eine Abstraktion der reellen Zahlen aufgefaßt werden kann.

DEFINITION 2.5.1. Eine Menge K heißt **Körper**, wenn zu je zwei Elementen $r, s \in K$ eine "Summe" $r + s$ und ein "Produkt" $r \cdot s$ gegeben ist (dies sollen wieder Elemente aus K sein), so daß gilt:

1. $(r + b) + c = r + (b + c)$, (Assoziativgesetz der Addition)
2. es gibt ein Element 0 mit $r + 0 = r \forall r$, (Existenz eines neutralen Elements)
3. zu jedem $r \in K$ gibt es ein r' mit $r + r' = 0$, (Existenz eines inversen Elements, man schreibt für r' gewöhnlich $-r$)
4. $r + s = s + r \forall r, s$, (Kommutativgesetz der Addition)
(Wenn die Eigenschaften 1 bis 4 erfüllt sind, sagt man: R bildet bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe)
5. $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$, (Assoziativgesetz der Multiplikation)
6. es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1 \cdot r = r \forall r \in K$, (Existenz eines Eins-Elementes)
7. zu jedem $r \in K$ mit $r \neq 0$ gibt es ein r^* mit $r \cdot r^* = 1$, (Existenz eines inversen Elements, man schreibt für r^* gewöhnlich $\frac{1}{r}$)
8. $r \cdot s = s \cdot r$, (Kommutativgesetz der Multiplikation)
9. $(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$. (Distributivgesetz)

Zusammenfassend kann die obige Definition auch wie folgt geschrieben werden:

Ein Körper ist eine Menge auf der zwei Operationen definiert sind (im folgenden als Addition und Multiplikation bezeichnet). Bezüglich der Addition ist die dem Körper zugrundeliegende Menge eine Abelsche Gruppe. Betrachtet man die Menge ohne das Nullelement der Addition, so ist diese multiplikative Gruppe ebenfalls abelsch. Für die Operationen Addition und Multiplikation gilt das Distributivgesetz.

Beispiele für Körper sind die Menge der **rationalen Zahlen** und die Menge der **reellen Zahlen**. Auch die Menge der komplexen Zahlen, die eine Erweiterung der reellen Zahlen darstellen, so daß die Operation des Radizierens uneingeschränkt gilt, bilden einen Körper.

DEFINITION. Die Elemente einer Obermenge C der reellen Zahlen, für die eine Addition und eine Multiplikation definiert sind, heißen **komplexe Zahlen**, wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

1. Für die Elemente von C gelten die Grundgesetze der Addition und Multiplikation.
2. Die Summe (Das Produkt) von reellen Zahlen als Elemente von C stimmt mit der (dem) für die reellen Zahlen bereits definierten Summe (Produkt) überein.
3. Die Menge C enthält ein Element i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$.
4. Zu jedem Element $z \in C$ gibt es genau zwei reelle Zahlen a und b so daß sich z in der Form $z = a + ib$ darstellen läßt.

Eine komplexe Zahl $\bar{z} = a - ib = \operatorname{Re}(z) - i \cdot \operatorname{Im}(z)$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

DEFINITION 2.5.2. Ein Raum M heißt **linearer Raum** bzgl. eines Körpers K , wenn die Menge ein K -Modul ist. D.h. für $m_1, m_2 \in M$ ist die Addition und die Multiplikation mit $a, b \in K$ definiert. Die Ergebnisse dieser Operationen sind wieder Elemente von M .

AXIOM 2.5.3. In M existiert eine Verknüpfung der Elemente genannt **Addition**

1. $\forall f, g \in M \Rightarrow f + g \in M$ sowie $f + g = g + f$.
2. Die Verknüpfung ist assoziativ $f + (g + h) = (f + g) + h = f + g + h$.
3. Es gibt ein neutrales Element $\tilde{0}$, das Nullelement genannt wird:
 $\tilde{0} \in M$ ist definiert durch $f + \tilde{0} = \tilde{0} + f = f \forall f \in M$.
4. $\forall f \in M \exists x \in M : f + x = x + f = \tilde{0}$ (Existenz eines inversen Elements).

AXIOM 2.5.4. In M ist die **Multiplikation** mit Elementen des Körpers K erklärt.

1. $a \in K$ und $f \in M \Rightarrow a \cdot f \in M$.
2. Es gilt das Distributivgesetz.
3. Es gilt das Assoziativgesetz.
4. Es gibt ein Eins-Element mit $1 \in K$ erfüllt $1 \cdot f = f \forall f \in M$.

M ist als Gruppe abelsch, d.h. Rechts- und Links-Inverses bzw. Rechts- und Links-Neutrales sind gleich.

Erfüllt eine Teilmenge eines linearen Raumes die obigen Axiome, so wird diese Teilmenge als **linearer Unterraum** bezeichnet.

BEISPIELE: Die Menge der reellen Zahlen bildet einen linearen Raum, wenn wir unter der Addition die Zahlenaddition und unter der Multiplikation mit einem Skalar die Zahlenmultiplikation verstehen.

Auch die Menge der reellwertigen Vektoren bilden einen linearen Raum, wenn unter der Addition die Vektoraddition und unter der Multiplikation mit einem Skalar die Multiplikation des Vektors mit einem Skalar verstanden wird. Das Nullelement ist der Nullvektor.

Die Menge der Polynome

$$X(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

mit, im allgemeinen, komplexen Koeffizienten a_n, \dots, a_1, a_0 bilden einen linearen Raum über dem Körper der komplexen Zahlen. Die Summe von Polynomen und das Produkt von Zahlen und Polynomen sind in natürlicher Weise definiert. Das Nullelement dieses linearen Raumes ist das identisch verschwindende Polynom. Polynome und deren Räume werden im Rahmen von Interpolations- und Approximationsalgorithmen eine zentrale Rolle spielen.

2.5.1. Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension.

Es seien m_1, \dots, m_r Elemente des linearen Raumes M (in bezug auf den Körper K) und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, dann ist

$$m = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_r m_r$$

sinnvoll und wieder ein Element aus M .

DEFINITION 2.5.5. Das Element $m \in M$ mit $m = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot m_i$ wird als **Linearkombination** der Elemente $m_1, \dots, m_r \in M$ mit den Koeffizienten $\lambda_i \in K$ bezeichnet.

Eine Teilmenge T eines linearen Raumes M über dem Körper K heißt **linearer Unterraum** oder Ebene, wenn alle endlichen Linearkombinationen von Elementen aus T wieder zu T gehören, d.h.

$$(2.5.1) \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot f_i \in T : \forall f_i \in T, \lambda_i \in K.$$

Die k Elemente m_1, \dots, m_k aus M heißen **linear abhängig**, wenn es k Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ aus dem Körper K gibt, die nicht sämtlich dem Nullelement entsprechen (verschwinden) und für die

$$(2.5.2) \quad \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k = \tilde{0}$$

gilt. Auf entgegengesetzte Art und Weise wird der Begriff der **linearen Unabhängigkeit** definiert.

Der Test der linearen Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit läuft also immer auf das Problem der nichttrivialen Lösbarkeit der obigen Gleichung 2.5.2 hinaus.

Gibt es in einem linearen Raum M höchstens n -linear unabhängige Elemente (d.h. mehr als n Elemente sind stets linear abhängig), so heißt der lineare Raum endlich-dimensional, und die natürliche Zahl n ist seine Dimension. Lineare Räume, die nicht endlich-dimensional sind (d.h. die beliebig viele linear unabhängige Elemente enthalten), nennt man unendlich-dimensional.

Gibt es in einem linearen Raum M höchstens n -linear unabhängige Elemente m_1, \dots, m_n , so daß es für alle $p \in M$ eine Darstellung $p = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$ gibt, so werden die Elemente m_i **Basis** von M genannt. Die $\lambda_i \in K$ werden als **Koordinaten** von p bzgl. der Basis m_1, \dots, m_n bezeichnet. Wird in der Basis eine Reihenfolge der Basisvektoren festgelegt, so kann man jedem Element ein geordnetes n -Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ zuordnen, welches als Koordinate bezeichnet wird. Die Mächtigkeit eines linearen Raumes kann über die Eigenschaften von Basen erschlossen werden. Es läßt sich zeigen, daß alle Basen eines endlich erzeugbaren Raumes aus gleich vielen Elementen bestehen. Die allen Basen gemeinsame Anzahl n der Basiselemente heißt **Dimension** des linearen Raumes. Der lineare Raum, der nur das Nullelement enthält, hat die Dimension Null. Die Dimension eines linearen Raumes kann auch unendlich sein. Ein Beispiel hierfür ist der Raum der Polynome mit der unendlichen (aber abzählbaren) Basis x^0, x^1, x^2, \dots .

Werden n linear unabhängige Elemente als Basis eines Raumes spezifiziert, so erfolgt die Darstellung eines Punktes in bezug auf das Nullelement des Raumes, und man spricht von einer absoluten Koordinatendarstellung. Wird im Gegensatz hierzu ein vom Nullelement unterschiedliches Element als Bezugspunkt gewählt, so spricht man von Relativkoordinaten. Das Element des linearen Raumes, welches als Bezugspunkt fungiert, wird Koordinatenursprung genannt. Relativkoordinaten spielen bei der Beschreibung von Unterräumen und der Formulierung von Algorithmen eine zentrale Rolle. Als Koordinatensystem K eines linearen Raumes (Unterraumes) wird im weiteren eine Folge von Elementen $\{a_0, m_1, m_2, \dots\}$ bezeichnet, deren erstes Element a_0 als Ursprung bezeichnet wird und deren restliche Glieder eine Basis des Raumes bilden.

Zur Konstruktion eines Koordinatensystems wird aus dem Unterraum T der Dimension k ein beliebiges Element a gewählt. Durch geeignete Wahl von k weiteren Elementen f_1, \dots, f_k , so daß die Elemente m_i , die durch die Vorschrift $m_i := a - f_i$ gebildet werden, linear unabhängig sind, so können alle Elemente $x \in T$ in der Form:

$$x = a + \sum_{i=1}^k \lambda_i m_i, \quad \lambda_i \in K \text{ beliebig,}$$

darstellt werden. Eine $(n-1)$ -dimensionale Ebene heißt **Hyperebene**. Eine eindimensionale Ebene heißt **Gerade**.

EIGENSCHAFT: Der Durchschnitt endlich vieler Ebenen ist entweder leer oder wieder eine Ebene.

2.5.2. Der reelle lineare Raum.

Im weiteren werden lineare Räume über dem Körper der reellen Zahlen betrachtet. Die strenge Ordnung und damit die absolute Vergleichbarkeit der reellen Zahlen werden eine zentrale Rolle spielen.

DEFINITION 2.5.6. Ein **Halbraum** H in M ist definiert als Menge der Elemente $p \in M$, deren Koordinaten einer Ungleichung der Form $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot p_i \leq \gamma$ genügen, wobei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ und $\alpha_i, \gamma \in K$ gilt.

Die Menge $\partial H := \{p \in M : \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot p_i = \gamma\}$ wird als Rand des Halbraumes bezeichnet und bildet eine Hyperebene.

Sind $m_1, m_2 \in M$, dann heißt

$$(2.5.3) \quad \overline{m_1 m_2} = \{m : m = \alpha m_1 + \beta m_2; \alpha, \beta \in \mathfrak{R}; \alpha, \beta \leq 1; \alpha + \beta = 1\}$$

Verbindungsstrecke der Elemente m_1 und m_2 . Die Elemente der Verbindungsstrecke werden auch mit konvexer Linearkombination der Elemente m_1 und m_2 bezeichnet. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **konvex**, wenn aus $x, y \in A$ folgt $\overline{xy} \subseteq A$ (Abb. 2.5.1).

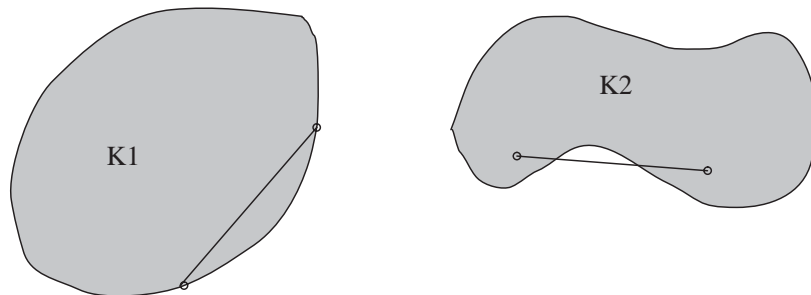


ABBILDUNG 2.5.1. Konvexe und nichtkonvexe Mengen

Eine nichtleere Teilmenge eines reellen linearen Raumes M , die gleich dem Durchschnitt endlich vieler Halbräume aus M ist, heißt ein **konvexes Raumstück**.

EIGENSCHAFTEN: Unmittelbar aus der Definition folgt, daß der Durchschnitt von endlich vielen konvexen Raumstücken leer oder wieder ein konvexes Raumstück ist.

Unter allen Elementen einer konvexen Menge sind für uns sogenannte Eckpunkte von besonderer Bedeutung.

DEFINITION 2.5.7. Ein Element einer konvexen Menge M heißt **Eckpunkt**, wenn es nicht als echte konvexe Linearkombination zweier Elemente $m_1, m_2 \in M$ dargestellt werden kann. Eine konvexe Linearkombination der Elemente m_1 und m_2 wird als echt bezeichnet, wenn sowohl $0 < \alpha < 1$ als auch $0 < \beta < 1$ gilt.

Im Kapitel 2.4 über metrische Räume ist vom Begriff der beschränkten Mengen gesprochen worden, der immer voraussetzte, daß eine Metrik zur Verfügung steht. Unter Zuhilfenahme des Begriffs der Linearkombination kann an dieser Stelle die Beschränktheit in einem reellen linearen Raum definiert werden, wobei diese Definition zunächst einmal nichts mit der in einem metrischen Raum gemein haben muß.

DEFINITION 2.5.8. Die *konvexe Menge* M heißt **unbeschränkt**, wenn zu jedem Element $m \in M$ ein Element $0 \neq h \in M$ gehört, so daß $m + \lambda \cdot h$ mit beliebigem $\lambda \geq 0$ ebenfalls zur Menge M gehört. Anderenfalls heißt M **beschränkt**.

Eine spezielle unbeschränkte konvexe Menge ist der **konvexe Kegel**. Er ist dadurch charakterisiert, daß mit jedem $m \in M$ auch $\lambda \cdot m \in M$ für alle $\lambda \geq 0$ gilt (Abb. 2.5.2).

DEFINITION 2.5.9. Eine *beschränkte konvexe Menge* heißt **konvexes Polyeder**, wenn die Anzahl der Eckpunkte endlich ist.

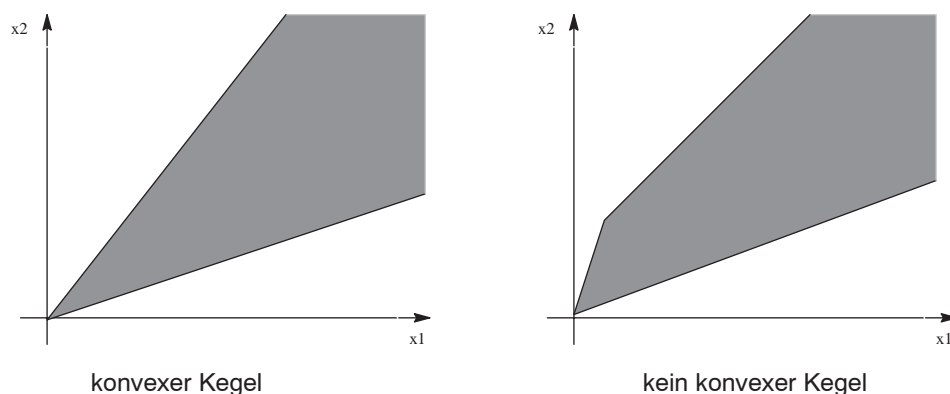


ABBILDUNG 2.5.2. Unbeschränkte konvexe Mengen

Eine praktischer Zugang zu konvexen Polyedern erfolgt über die Konstruktion der konvexen Hülle endlicher Punktmenge.

DEFINITION 2.5.10. Die **konvexe Hülle** einer Menge T von Punkten eines linearen Raumes M über \mathfrak{R} , im folgenden auch mit $\text{conv}(T)$ bezeichnet, ist die kleinste konvexe Punktmenge, die alle Punkte aus T enthält.

Zusammenfassend kann man bei k gegebenen Elementen $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ folgende Kombinationen definieren:

Die Summe $\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i$, $\lambda_i \in \mathfrak{R}$ heißt **Linearkombination** der Elemente m_i .

Spezielle Linearkombinationen sind:

- die **Kegelkombination** (positive), falls $\lambda_i \geq 0$,
- die **Affinkombination**, falls $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und
- die **Konvexkombination**, falls $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$.

Die Abbildung 2.5.3 veranschaulicht die verschiedenen Kombinationen in der Ebene. In

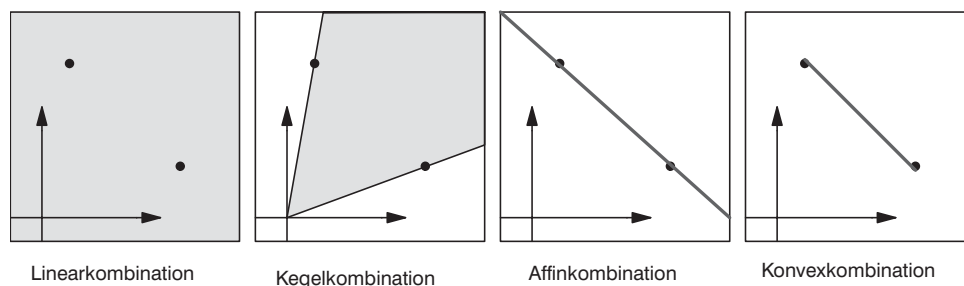


ABBILDUNG 2.5.3. Geometrische Interpretation der Kombination zweier Punkte

Analogie können für gegebene Teilmengen T eines linearen Raumes M über den reellen Zahlen entsprechende Hüllen bestimmt werden. Die Menge aller Linearkombinationen der

Punkte in T heißt **lineare Hülle** von T und wird mit $\text{lin}(T)$ abgekürzt. Entsprechend sind die **positive, affine** und **konvexe Hülle** von T ($\text{cone}(T)$, $\text{aff}(T)$ und $\text{conv}(T)$) definiert.

Wird $\text{lin}(\emptyset) := \{0\}$ vereinbart, so kann man $\text{lin}(T)$ als den kleinsten linearen Raum ansehen, der T enthält. Entsprechend wird $\text{cone}(\emptyset) := \{0\}$, $\text{aff}(\emptyset) := \emptyset$ und $\text{conv}(\emptyset) := \emptyset$ definiert.

In Analogie zur linearen Unabhängigkeit von Elementen eines Raumes kann man eine affine Unabhängigkeit definieren.

DEFINITION 2.5.11. Eine Punktmenge $\{p^0, p^1, \dots, p^k\}$ eines linearen Raumes heißt **affin unabhängig**, falls die Vektoren $p^1 - p^0, \dots, p^k - p^0$ linear unabhängig sind.

2.6. Der normierte Raum

DEFINITION 2.6.1. Ein *linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen* heißt **normiert**, wenn jedem Element $x \in M$ eine reelle Zahl $\|x\|$, die Norm von x , mit folgenden Eigenschaften:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in M$,
 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (positive Definitheit)
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (Dreiecksungleichung)
3. $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$ für alle $a \in K, x \in M$ (Homogenität)

zugeordnet wird.

FOLGERUNGEN:

1. $\Rightarrow \| -x \| = \|x\|$
2. $\Rightarrow \| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$

THEOREM. *Jeder normierte Raum kann zugleich als ein metrischer Raum aufgefaßt werden. Durch $d(x, y) := \|x - y\|$ wird auf dem normierten Raum eine Metrik induziert werden.*

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, da ein metrischer Raum nicht unbedingt linear sein oder die Homogenitätsbedingung erfüllen muß.

BEISPIEL: Normen im Raum \mathfrak{R}^n :

Man kann verschiedene Normen einführen:

$$\|x\| = \max |x_i| \text{ Maximumnorm, } \infty\text{-Norm,}$$

$$\|x\| = \sum |x_i| \text{ Summennorm, } \mathbf{1}\text{-Norm,}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum |x_i|^2} \text{ Euklidische Norm, } \mathbf{2}\text{-Norm,}$$

$$\|x\| = \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p \leq \infty \text{ } \mathbf{p}\text{-Norm.}$$

2.7. Raum mit Skalarprodukt

Nachdem bisher die Eigenschaften des Abstandes und des Betrages allgemein formuliert wurden, stellt sich die Frage nach der Möglichkeit der Verallgemeinerung von Winkelbeziehungen, denen man in der Praxis begegnet. Es wird sich zeigen, daß man mit einer allgemeinen Definition eines inneren Produktes in einem linearen Raum zu Formulierungen kommen kann, die in der Ebene den wohlbekannten Winkel ergibt.

DEFINITION 2.7.1. Ein *linearer Raum* M über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen heißt ein **Raum mit Skalarprodukt** (inneres Produkt), wenn jedem Elementenpaar $p, q \in M$ eine reelle bzw. komplexe Zahl $z = \langle p, q \rangle$, das Skalarprodukt der Elemente p und q , mit folgenden Eigenschaften

1. $\langle p, p \rangle \geq 0 \forall p \neq 0$ und $\langle p, p \rangle$ reell, (positive Definitheit)
2. $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$, (Symmetrie)
3. $\langle p, a \cdot q \rangle = \overline{a} \cdot \langle p, q \rangle$, (Homogenität)
4. $\langle p, q + r \rangle = \langle p, q \rangle + \langle p, r \rangle$ (Linearität)

zugeordnet werden kann. Aus der Linearität folgt sofort: $\langle p, p \rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0$.

DEFINITION 2.7.2. Man nennt p und q genau dann zueinander **orthogonal** ($p \perp q$), wenn $\langle p, q \rangle = 0$. Hieraus ergibt sich, daß das Nullelement aus M zu allen anderen Elementen aus M orthogonal ist.

Die Orthogonalität von Elementen legt nahe, einen allgemeinen Winkelbegriff festzulegen.

DEFINITION 2.7.3. Für Räume mit Skalarprodukt über dem Körper der reellen Zahlen kann man die Größe des **Winkels** zwischen zwei Elementen $p \neq 0$ und $q \neq 0$ als diejenige reelle Zahl $\alpha \in (0, \pi)$ verstehen, für die gilt:

$$\cos(\alpha) := \frac{\langle p, q \rangle}{\sqrt{\langle p, p \rangle \cdot \langle q, q \rangle}}$$

THEOREM. *Jeder Raum mit Skalarprodukt kann zugleich als normierter Raum aufgefaßt werden. Durch $\|p\| := \sqrt{\langle p, p \rangle}$ wird auf dem Raum eine Norm induziert.*

DEFINITION. Ein normierter Raum M heißt **unitär**, wenn M ein Raum mit Skalarprodukt ist und die Norm in der Form $\|p\| := \sqrt{\langle p, p \rangle}$ für alle $p \in M$ vom Skalarprodukt induziert wird.

Neben der im Abschnitt 2.2 aufgezeigten Gruppierung von Räumen, ausgehend von einer sehr allgemeinen Festlegung, daß ein Raum nur eine strukturierte Menge von beliebig vielen Elementen ist, über die Hinzunahme von zusätzlichen Eigenschaften, welche durch die dünnen Pfeile in der Abbildung 2.7.1 gekennzeichnet sind, existiert eine zweite Struktur, die durch die Induktion von Eigenschaften erzeugt wird. Bei der Induktion von Eigenschaften ist sehr streng auf die Richtung zu achten.

Die Gruppierung der Räume bedeutet jedoch nicht eine strikte Trennung infolge ihrer Eigenschaften, vielmehr haben viele Räume, mit denen man in Anwendungen zu tun hat,

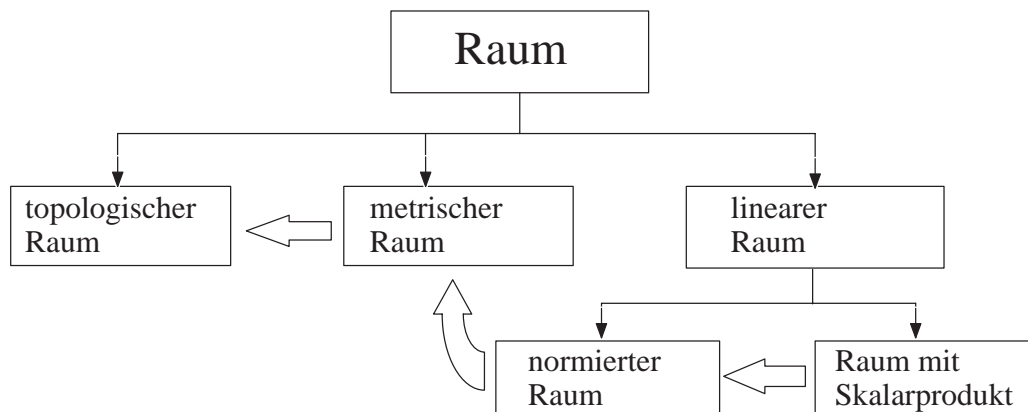


ABBILDUNG 2.7.1. Raumhierarchie mit Induktionspfeilen

Kombinationen von Eigenschaften. Ein typischer Vertreter, bei dem alle eingeführten Eigenschaften durch eine Kette von Induktionen vom Skalarprodukt herrühren, ist der euklidische Raum.

2.8. Der euklidische Vektorraum

Wie üblich ist \mathfrak{R} der Körper der reellen Zahlen. Für eine ganze Zahl $n \geq 1$ ist \mathfrak{R}^n der n -dimensionale lineare Raum über dem Körper der reellen Zahlen und wird als **euklidischer Vektorraum** bezeichnet. Die Punkte des \mathfrak{R}^n sind die geordneten n -Tupel $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ reeller Zahlen. Mit den Verknüpfungen:

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ und $r \cdot \vec{x} = (r \cdot x_1, \dots, r \cdot x_n)$
 mit $(\vec{x}, \vec{y} \in \mathfrak{R}^n, r \in \mathfrak{R})$ ist \mathfrak{R}^n ein reeller linearer Raum. Wird durch
 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum x_i y_i$

ein Skalarprodukt definiert, so kann eine Kette induzierter Eigenschaften aufgeführt werden, die durch dieses Skalarprodukt induziert wird. Hierzu zählt die euklidische Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ sowie die zugehörige euklidische Metrik $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Diese Metrik induziert eine Standardtopologie im \mathfrak{R}^n (Abschn. 2.3). Wird die durch die euklidische Metrik induzierte Standardtopologie zugrunde gelegt, so ergibt sich, daß jede Ebene im \mathfrak{R}^n eine abgeschlossene Teilmenge ist.

DEFINITION. Eine abgeschlossene Teilmenge A des euklidischen Raumes \mathfrak{R}^n wird als **regulär** bezeichnet, wenn gilt: $r(A) = c(i(A))$, wobei $c(A)$ der Abschluß und $i(A)$ das Innere der Menge A sind.

BEMERKUNG: Jeder Unterraum besitzt keine inneren Punkte bzgl. der Topologie des übergeordneten Raumes.

Dem euklidischen Vektorraum kommt eine besondere Bedeutung im Rahmen von Ingenieur Anwendungen zu, da man häufig in der Lage ist, kompliziert erscheinende lineare Räume über eine geeignet gewählte Basis auf einen reellen Vektorraum abbilden zu können. Über das euklidische Skalarprodukt ist dann auf diesem reellen Vektorraum auf natürliche Weise eine Metrik, Topologie usw. gegeben. Viele Methoden im Raum der Polynome, Splines oder stetigen Funktionen nutzen diese Dualität aus.

2.9. Maßtheorie

In der Maßtheorie geht es zunächst darum, wie Teilmengen A, B, \dots einer gegebenen Grundmenge E sinnvoll eine *Größe* oder ein *Inhalt* zugeordnet werden kann. Was sinnvoll ist, hängt meist von der betrachteten Aufgabenstellung bzw. Situation ab. In der Praxis ist die Mächtigkeit einer Menge oft ein sinnvolles Maß. Völlig ungeeignet ist jedoch diese Herangehensweise bei Mengen mit überabzählbar vielen Elementen, wie z.B. bei den reellen Zahlen. Hier ist ein Maß wünschenswert, welches für zusammenhängende Intervalle die Länge des Intervalls als Maß zuordnet. Es kann gezeigt werden, daß gerade im reellen Vektorraum die Definition eines allgemeinen Maßes für alle Elemente der Potenzmenge nicht möglich ist (siehe [155]).

Die Maßtheorie steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Integralrechnung und der Mengenlehre. Neben der Anwendung in der Mathematik, wie in der Funktionalanalysis und der Wahrscheinlichkeitstheorie, wächst ihre Bedeutung besonders durch die breite Nutzung von partiellen Differentialgleichungen und deren numerische Lösung in allen Bereichen des Ingenieurwesens.

Ist die Berechnung des Flächeninhaltes von Dreiecken, Rechtecken und anderen geradlinig begrenzten Figuren noch einfach, bereitet die von krummlinig oder noch komplizierter begrenzten Figuren Schwierigkeiten. Bevor jedoch auf solche Maße in reellen Vektorräumen eingegangen wird, wird zunächst ein axiomatischer Zugang gewählt.

DEFINITION 2.9.1. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ von Teilmengen einer Menge E wird als (Boolsche Mengen-) **Algebra** bezeichnet, falls gilt:

1. \mathcal{A} enthält E ,
2. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$,
3. $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Aus dieser Definition folgt dann, daß auch $A \cap B$ und die leere Menge \emptyset zur Algebra gehören.

DEFINITION 2.9.2. Eine Algebra \mathcal{A} wird **σ -Algebra** genannt, wenn zusätzlich auch die Vereinigung jeder unendlichen Folge ihrer Teilmengen zu ihr gehört.

Eine für die Mengen A, B, \dots einer Algebra \mathcal{A} von Teilmengen von E definierte reellwertige nichtnegative additive (Mengen-) Funktion μ , die auf der leeren Menge \emptyset verschwindet, heißt **Inhalt** auf \mathcal{A} :

1. $\mu(A) \geq 0$,
2. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, falls $A \cap B = \emptyset$,
3. $\mu(\emptyset) = 0$.

Im allgemeinen ist als Wert von μ auch ∞ zugelassen. Anderenfalls wird μ als endlicher Inhalt bezeichnet.

BEISPIEL: Für eine beliebige Menge X ist

$$\mu(A) := \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

ein Maß, das sogenannte **Zählmaß**.

DEFINITION 2.9.3. Eine Mengenfunktion bzw. ein Inhalt μ heißt σ -additiv, wenn für jede unendliche Folge paarweise disjunkter Mengen A_n

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

gilt, sofern nur $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ist. Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn \mathcal{A} eine σ -Algebra ist. Ein solcher σ -additiver Inhalt wird **Maß** μ auf \mathcal{A} über E genannt. Das Tripel (E, \mathcal{A}, μ) wird Maßraum und die Mengen in \mathcal{A} die bezüglich μ meßbaren Mengen genannt.

Es wurde festgestellt, daß ein Mengensystem, welches als Topologie bezeichnet wurde, eine erste schwache Struktur auf eine Menge aufprägt (Abschn. 2.3). Im allgemeinen ist eine Topologie keine σ -Algebra. Es stellt sich nun die Frage, inwieweit eine möglichst kleine Obermenge der Topologie gefunden werden kann, die eine σ -Algebra ist. Die verallgemeinerte Aufgabenstellung hierzu ist, für ein vorgegebenes Mengensystem eine möglichst kleine σ -Algebra zu suchen, die das Mengensystem enthält.

DEFINITION 2.9.4. Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ ein Teilmengensystem einer Menge E , so ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{A \mid \mathcal{E} \subset A \subset \mathcal{P}(E) \text{ und } A \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}\}$$

die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra.

Ist das Mengensystem eine Topologie so führt dies zu folgenden Begriffen.

DEFINITION 2.9.5. Sei (E, T) ein topologischer Raum. $\mathcal{B}(T) := \sigma(T)$ heißt die Borelsche σ -Algebra von (E, T) . Die Mengen in $\mathcal{B}(T)$ heißen Borel-Mengen.

Über die Borel-Mengen einer metrischen Topologie erhält man einen natürlichen Zugang zu den Maßen in einem metrischen Raum.

Auch in Maßräumen besteht die Möglichkeit, Unterräume zu konstruieren und mit einem Maß zu versehen.

DEFINITION 2.9.6. Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $Y \subset X$, dann ist

$$\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra auf Y , der Maßraum $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ heißt Unterraum von (X, \mathcal{A}, μ) .

Nach diesem allgemeinen Zugang zum Maßbegriff, wird sich der Frage zugewendet, wie die bekannten Flächen- und Volumenmaßzahlen im euklidischen Raum einzuordnen sind.

2.9.1. Maße im n-dimensionalen euklidischen Raum.

Um einen Zusammenhang zum bekannten Flächen- bzw. Volumenmaß herzustellen, ist zu klären, was unter einem Volumeninhalt im euklidischen Raum zu verstehen ist. Folgt man der klassischen Geometrie, so wird der Flächeninhalt als Produkt von Längenmaßzahlen aufgefaßt. Demzufolge ist es zunächst notwendig, Maße auf der reellen Zahlengerade zu betrachten. Die Maßzahlen in höherdimensionalen euklidischen Räumen kann dann über Produkträume eingeführt werden.

2.9.1.1. Maße auf offenen Intervallen.

Betrachtet man das offene Intervall (a, b) so wird die reelle Zahl $b - a$ (die Länge des Intervalls) als Maß des offenen Intervalls (a, b) bezeichnet. Dieselbe Zahl bildet das Maß des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$. Im weiteren wird das Maß des Intervalls I mit $|I|$ bezeichnet. Es ist vorteilhaft, der leeren Menge als offenes Intervall das Maß 0 zuzuordnen. Die Erweiterung des Maßbegriffes auf alle offenen Mengen der reellen Zahlengerade erfolgt über die Tatsache, daß jede offenen Menge die Vereinigung endlich oder abzählbar vieler offenen disjunkter Intervalle ist:

$$(2.9.1) \quad G = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad I_i \cap I_j = \emptyset \text{ mit } i \neq j.$$

Das Maß der Menge (2.9.1) ist dann:

$$|G| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|,$$

wenn diese Reihe konvergent ist. Anderenfalls hat die Menge G das Maß unendlich. Auf diese Weise wurde ausgehend vom Maß eines offenen Intervalls der Begriff des Maßes auf alle offenen Mengen der reellen Zahlengerade erweitert. Dieser Begriff kann aber nicht auf alle Teilmengen des Raumes \mathfrak{R} erweitert werden. Der Beweis hierfür kann in [155] nachgelesen werden.

2.9.1.2. Meßbare Mengen auf der reellen Zahlengeraden.

Der Begriff des Maßes kann jedoch nicht auf alle Teilmengen der reellen Zahlengeraden erweitert werden. Die Meßbarkeit und das Maß einer beliebigen Menge wird über Grenzwertbetrachtungen eingeführt. Die Menge A heißt **meßbar**, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ offene Mengen G und U mit

$$A \subset G, \quad G \setminus A \subset U, \quad |U| < \varepsilon$$

gilt. Das Maß der Menge G kann als eine Näherung des Maßes der Menge A aufgefaßt werden und kommt zur folgenden Definition.

Das **Lebesgue-Maß** einer meßbaren Menge A ist die Zahl $|A|$, die der unteren Grenze der Maße der offenen Obermengen der Menge A gleich ist:

$$|A| := \inf\{|G| : A \subset G, G \text{ offene Menge}\}.$$

Demnach ist jede offene Menge meßbar. Es ist nicht schwer einzusehen, daß dann auch das Komplement einer meßbaren Menge wieder meßbar ist. Insbesondere ist jede abgeschlossene Menge meßbar. Hieraus folgt nun wiederum, daß jeder Menge, die aus nur einem Punkt besteht - also abgeschlossen ist - meßbar ist. Diese Menge hat das Maß Null. Und da das Maß einer abzählbaren Vereinigung disjunkter meßbarer Mengen gleich der Summe der Einzelmaße ist, hat also jede abzählbare Menge von Punkten ebenfalls das Maß Null. Das bedeutet z.B., daß die Menge aller rationalen Zahlen das Maß Null hat.

2.9.1.3. *Lebesguesches Maß im n -dimensionalen euklidischen Raum.*

Nachdem das Lebesgue-Maß auf der reellen Zahlengerade eingeführt wurde, kann über die Definition von Produkträumen und Produktmaßen ein solches Maß auf den n -dimensionalen euklidischen Raum erweitert werden.

Im Fall des \mathbb{R}^2 kann zuerst das Maß eines offenen Rechtecks durch das Produkt seiner Seitenlängen definiert werden. Da die offenen Rechtecke eine Basis der natürlichen Topologie des \mathbb{R}^2 bilden, kann jede offene Menge als Vereinigung höchstens abzählbar vieler disjunkter offener Rechtecke aufgefaßt werden. Weiter kann nun wie im Fall der reellen Zahlengeraden vorgegangen werden. Analoge Verfahren führen zu Lebesgueschen Maßen im \mathbb{R}^n .

2.10. Elemente der Graphentheorie

In diesem Abschnitt werden einige Begriffe aus der Graphentheorie, die in der Literatur teilweise nicht einheitlich verwendet werden, eingeführt. Die Objekte, die in der Graphentheorie untersucht werden, die sogenannten Graphen, sind aus verschiedenen Erscheinungen der objektiven Realität durch weitgehende Abstraktion entstanden. Eine umfassende Darstellung sowohl der Grundlagen als auch von relevanten Anwendungen sind u.a. in [55], [153] und [91] zu finden.

Die historischen Wurzeln der Graphentheorie liegen in der Planung und Beurteilung von Netzen und Transportproblemen. Bis heute liegt ein Schwerpunkt der Graphentheorie bei der Planung und dem Betrieb von Verkehrssystemen [42] sowie im Rahmen der Netzplantechnik [13].

Treffen beispielsweise an einem Verkehrsknotenpunkt (einer Straßenkreuzung) sich kreuzende Verkehrsströme aufeinander, so kann dies zu Konfliktsituationen führen. Verkehrsströme, die sich nicht kreuzen, werden als miteinander verträglich bezeichnet. Um zu verhindern, daß sich kreuzende Verkehrsströme zu Konfliktsituationen führen, werden häufig Lichtsignalanlagen eingesetzt. Durch eine Formalisierung einer solchen Kreuzung (Abb. 2.10.1) ist es möglich, die Grünphasen der unterschiedlichen Verkehrsströme so zu schalten, daß ein maximaler Fluß an Verkehrsteilnehmern ermöglicht wird. Das zu lösende Graphenproblem ist als sogenanntes „Einfärbproblem“ bekannt.

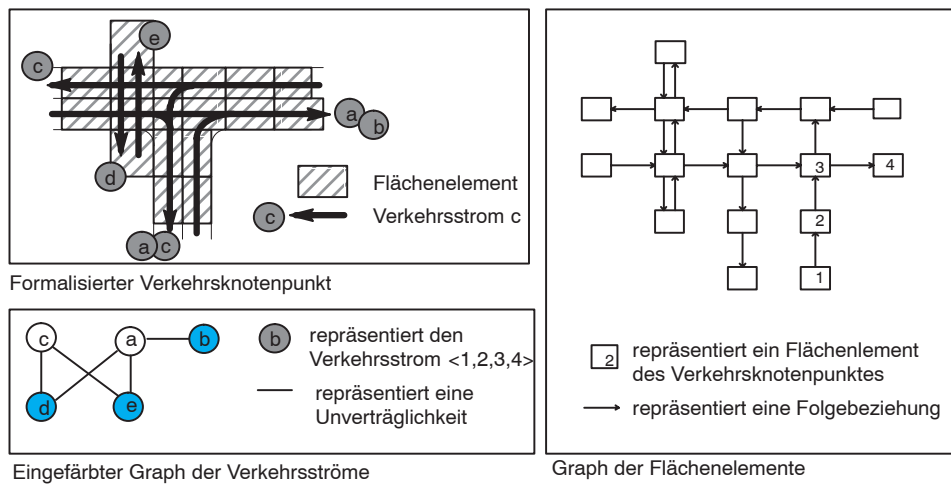


ABBILDUNG 2.10.1. Simulation einer Ampelkreuzung

Im Rahmen dieser Arbeit kommen Graphen im wesentlichen zur Beschreibung von Strukturen geometrischer und topologischer Objekte zum Einsatz. Werden Netze zur Modellierung digitaler Geländemodelle betrachtet, so lassen sich die Beziehungen zwischen Knoten, Kanten und Dreiecken untereinander vorteilhaft in einem Inzidenzgraphen (Abb. 2.10.2) abbilden. Weitere Anwendungen findet man im Umfeld von Geo-Informationssystemen [37] und Bauwerksmodellen im *Facility Management*. In allen Anwendungsfeldern werden die in Beziehung zu stellenden Objekte als Knoten abstrahiert und die Beziehungen selber durch Kanten charakterisiert. Dieses spiegelt sich in der nachfolgenden Definition wieder.

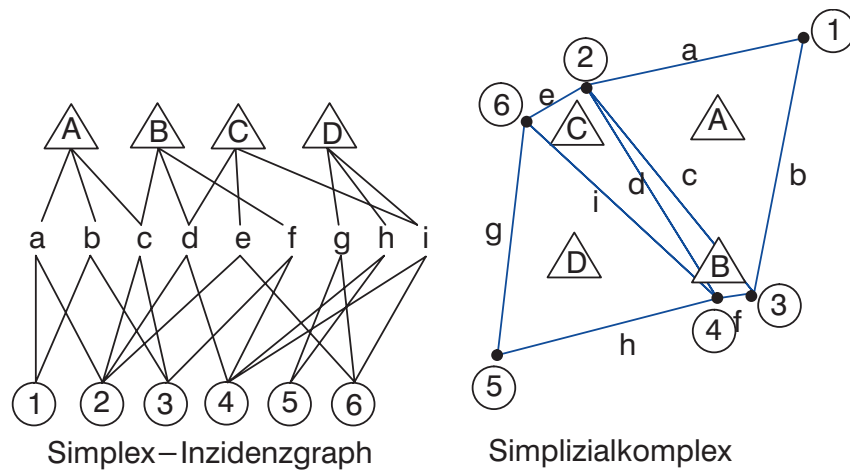


ABBILDUNG 2.10.2. Inzidenzgraph eines Simplizialkomplexes

DEFINITION 2.10.1. Ein **Graph** G besteht aus einer Menge V von Elementen erster Art, den sogenannten **Knoten** und einer Menge E von Elementen zweiter Art. Zwischen den Elementen der Menge V und E besteht eine Beziehung, die **Inzidenz** genannt wird. Dies bedeutet, daß jedem Element $r \in E$ durch eine auf E erklärte Funktion f (die sogenannte **Inzidenzfunktion**) eindeutig ein geordnetes oder ungeordnetes Paar von Knotenpunkten $p, q \in V$ zugeordnet ist. Man sagt auch, daß das Element $r \in E$ mit den beiden Knotenpunkten p und q inzident ist, oder auch: r verbindet p mit q .

Ist jedem Element $r \in E$ ein ungeordnetes Paar $f(r) = (p, q)$ zugeordnet, so heißt G ein **ungerichteter** Graph, die Elemente von E werden **Kanten** genannt. Die der Kante r zugeordneten Knotenpunkte p, q sind die Endpunkte von r . Wird im folgenden ein ungerichteter Graph betrachtet, so wird er mit $G(V, E; f)$ oder kurz mit $G(V, E)$ bezeichnet.

Ist jedem Element $r \in E$ ein geordnetes Paar $f(r) = [p, q]$ zugeordnet, so heißt G ein **gerichteter** Graph. Die Elemente von E werden im folgenden **Bögen** genannt. Ist dem Bogen r das geordnete Paar $f(r) = [p, q]$ zugeordnet, so nennt man p den Startpunkt und q den Zielpunkt des Bogens r . Im folgenden wird für einen gerichteten Graphen $G[V, E; f]$ oder kurz $G[V, E]$ geschrieben. Enthält ein gerichteter Graph G nicht gleichzeitig die Kanten $[u, v]$ und $[v, u]$ für alle $u, v \in V$, so heißt G **antisymmetrisch**.

Die obigen Definitionen lassen es nicht zu, daß zwei Knoten durch mehrere (parallele) Kanten verbunden sind. Enthält ein Graph G alle möglichen Kanten, d.h. gilt $f(E) = V \times V$, so heißt G **vollständig**.

Zwei Knoten p und q , die durch eine Kante oder einen Bogen miteinander verbunden sind, heißen **benachbart** oder **adjazent**. Zwei Kanten oder Bögen, die einen Endpunkt gemeinsam haben, werden ebenfalls **benachbart** oder **adjazent** genannt.

DEFINITION 2.10.2. Zu einer gegebenen Knotenteilmenge $S \subseteq V$ eines gerichteten Graphen $G[V, E]$ wird die Menge der Kanten, deren Anfangsknoten in S und deren Endknoten im Komplement $\bar{S} := V \setminus S$ liegen mit

$$\delta(S) := \{[u, v] \in E : u \in S, v \in \bar{S}\}$$

bezeichnet.

Für ungerichtete Graphen ist die Definition analog. In beiden Fällen wird die Anzahl der mit $u \in V$ inzidenten Kanten der Grad von u genannt. Im Rahmen dieser Arbeit ist T meist einelementig. Es wird dann die Mengenklammer weggelassen, und man schreibt kurz $\delta(v)$ für $v \in V$. In gerichteten Graphen werden die Knoten hinsichtlich der mit ihnen adjazenten Kanten unterschieden. Ist $v \in V$ nur Anfangs- bzw. Endknoten für alle adjazenten Kanten, d.h. gilt $\delta(v) = \emptyset$ bzw. $\delta(\bar{v}) = \emptyset$, so heißt v **Quelle** bzw. **Senke**. Ein Knoten, für den $\delta(v) = \delta(\bar{v}) = \emptyset$ gilt, heißt **isoliert**.

DEFINITION 2.10.3. Eine Kantenfolge $W = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\} \subseteq E$ heißt **Weg** von v_1 nach v_k . Für gerichtete Wege wird gefordert, daß für jede Kante $[v_i, v_{i+1}] \in W$ v_i Anfangsknoten ist. Mit der Mächtigkeit $|W|$ wird die Länge des Weges W bezeichnet. Ein Weg heißt **einfach**, falls keine Knoten des Weges mit mehr als zwei Kanten des Weges indiziert sind. Gilt sogar $v_1 = v_k$, so heißt der Weg W **Kreis** oder **Zyklus**.

Spezielle einfache Wege sind solche, die jeden Knoten aus V genau einmal enthalten. Sie heißen Hamilton'sche Wege.

DEFINITION 2.10.4. Ein ungerichteter Graph $G(V, E)$ heißt **zusammenhängend**, falls für alle $u, v \in V$, $u \neq v$ ein Weg zwischen u und v existiert. Im gerichteten Fall definiert man analog den starken Zusammenhang von G über die Existenz gerichteter Wege zwischen allen Knoten.

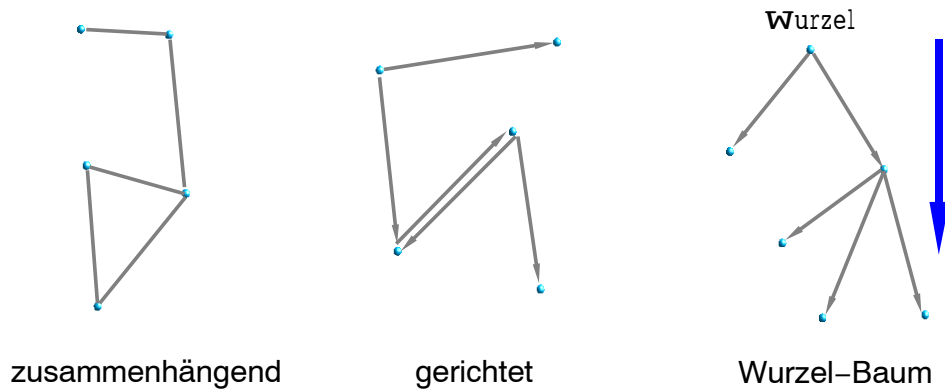


ABBILDUNG 2.10.3. Graphen

Bei der Modellierung von Zell- bzw. Gebietszerlegungen ist man daran interessiert, den Zusammenhang eines Graphen mit möglichst wenig Kanten zu gewährleisten. Dies führt auf den Begriff des Baumes.

DEFINITION 2.10.5. Ein einfacher ungerichteter Graph G heißt **Baum**, falls G zusammenhängend und zyklensfrei ist. Die Vereinigung knotendisjunkter Bäume eines Graphen nennt man Wald.

Ein Wurzel-Baum (Abb. 2.10.3) ist ein Baum, der genau einen Knoten ohne Vorgänger-Knoten besitzt. Dieser Knoten heißt Wurzel des Baumes. Alle anderen Knoten besitzen genau einen Vorgänger-Knoten ('Vater'). Ein Knoten, der keinen Nachfolger-Knoten ('Sohn') besitzt, wird Blatt genannt. In der Informatik werden Bäume stets mit der Wurzel nach oben dargestellt. Eine sehr wichtige Rolle z.B. bei Suchvorgängen spielen die Binärbäume. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß jeder Knoten höchstens zwei Söhne besitzt, welche in linker und rechter unterschieden werden.

Ein Graph $G' = (V', E')$ mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq \{uv \in E \mid u, v \in V'\}$ heißt Untergraph von G . Ein Untergraph mit $V' = V$ heißt Teilgraph. Ein zusammenhängender Teilgraph von G heißt aufspannend. Einen aufspannenden Baum nennt man auch Gerüst.

DEFINITION 2.10.6. Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Knoten $w \in V$ heißt **Wurzel** von G , falls für alle $v \neq w \in V$ ein gerichteter Weg von v nach w existiert. Ein antisymmetrischer, gerichteter Graph G mit Wurzel heißt Baum, falls der zugrundeliegende ungerichtete Graph ein Baum ist.

Um eine Vorstellung von der Struktur eines Graphen zu erhalten, werden häufig geometrische Realisierungen eines Graphen verwendet. Man kann einen Graphen $G(V, E)$ im \mathbb{R}^2 oder auf einer anderen Fläche geometrisch realisieren, indem man seine Knoten auf paarweise verschiedene Punkte abbildet und seine Kanten auf einfache Wege, die die entsprechenden Punkte miteinander verbinden und unterwegs keine solchen Punkte besuchen. Das Ergebnis einer solchen Darstellung wird im weiteren **geometrischer Graph** genannt.

Eine ganz spezielle Klasse von Graphen wird im Zusammenhang von Gebietszerlegungen der Ebene eine Rolle spielen, die sogenannten planaren Graphen.

DEFINITION 2.10.7. Ein ungerichteter Graph G heißt **planar**, wenn er sich ohne Überschneidung von Kanten in der Ebene darstellen läßt. Eine solche Darstellung eines planaren Graphen in der Ebene wird auch als eine planare Repräsentation von G bezeichnet (Abb. 2.10.4).

Es kann für einen planaren Graphen G durchaus mehrere verschiedene planare Repräsentationen geben, die sich aber alle durch gewisse Umformungen ineinander überführen lassen.

Bei der Darstellung eines planaren Graphen in der Ebene wird die Ebene in Gebiete zerlegt, die die Flächen von G genannt werden. Man kann also bei den planaren Graphen außer den Knoten, Punkten und Kanten auch noch die Flächen als Grundbestandteile betrachten. Zwischen diesen drei Arten von Elementen eines planaren Graphen besteht ein enger Zusammenhang, der im folgenden Theorem formuliert ist.

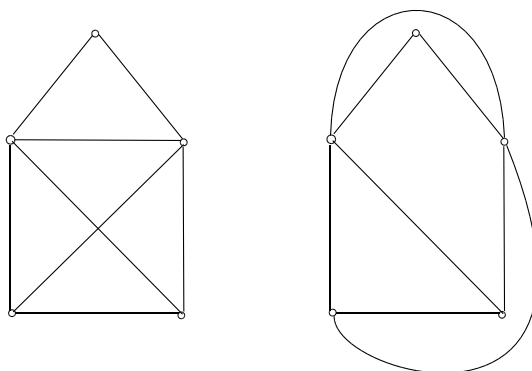


ABBILDUNG 2.10.4. Planarer Graph mit seiner planaren Repräsentation

Es sei eine planare Repräsentation eines planaren Graphen G mit n Knotenpunkten, m Kanten, f Flächen und p Komponenten gegeben. Dann gilt das folgende Theorem.

THEOREM. *Ist eine beliebige planare Repräsentation eines planaren Graphen G gegeben, so gilt*

$$n - m + f - p = 1.$$

Für zusammenhängende Graphen, also $p = 1$, trägt die obige Formel die Bezeichnung **Eulersche Polyederformel**:

$$n - m + f = 2.$$

Diese strenge Beziehung für planare Graphen wie auch die allgemeinere Beziehung $n - m + f \leq 2$ für nichtplanare Graphen, wird in GIS und CAD-Systemen häufig zur Konsistenzprüfung eingesetzt.

Planare Graphen besitzen eine weitere Besonderheit, die man durch den Begriff der „Dualität“ kennzeichnen kann. Man kann nämlich jedem planaren Graphen G einen dazu **dualen Graphen** G^* auf folgende Art zuordnen:

Es sei eine planare Repräsentation von G gegeben. Im Inneren einer jeden Fläche von G werde ein Punkt markiert. Die Menge dieser Punkte bildet die Knotenpunktmenge von G^* . Zwei Knotenpunkte w^* und v^* werden in G^* durch genau so viele Kanten miteinander verbunden, wie die entsprechenden Flächen von G gemeinsame Kanten haben. Dabei soll jede Kante von G von genau einer Kante von G^* geschnitten werden (Abb. 2.10.5).

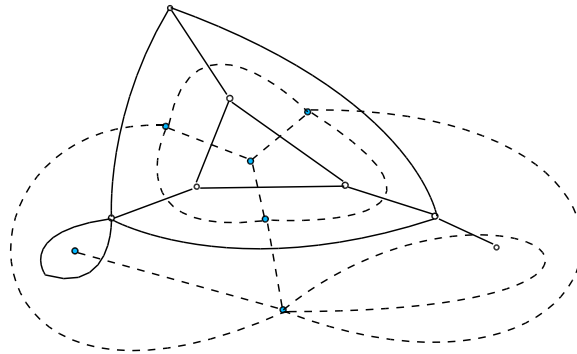


ABBILDUNG 2.10.5. Planarer Graph mit seinem dualen Graph

KAPITEL 3

Zelltheorie

Der Begriff der Zelle spielt nicht nur in der Biologie und in mit ihr verwandten Bereichen eine wichtige Rolle, vielmehr bilden natürliche Zellen den Anstoß zu einer Vielzahl von theoretischen und praktischen Überlegungen. Es wird sich zeigen, daß man den Begriff der Zelle bzw. des Polyeders als eine Erscheinung eines linearen Raumes (z.B. des euklidischen Raumes) und in ihrer Abstraktion als eine topologische Erscheinung definieren kann.

Zellen und Zellzerlegungen liefern einen methodischen Zugang bei der Modellierung geometrischer Raumdaten. Wird zunächst der klassische Bereich der vektororientierten graphischen Datenverarbeitung betrachtet, so ist die Zellzerlegung neben parametrischer Darstellung, Enumerationsverfahren, Randdarstellung und Konstruktion mit Raumprimitiven, eine sehr allgemeine Darstellungsmöglichkeit. Die Komposition komplexer Flächen aus Pflastern stellt beispielsweise eine Zellzerlegung dar. Besonderes Gewicht erhalten Zellen und Zellzerlegungen als geometrische Basis für Interpolations- und Approximationsalgorithmen. Gebietsdiskretisierungen bei numerischen Simulationen wie bei der Finite Element Methode (FEM) basieren z.B. auf Dreiecks- oder Viereckselementen. Müssen Lösungsgebiete mit nichtgeradlinigen Begrenzungen bzw. auf gekrümmten Oberflächen betrachtet werden, so werden Transformationen dieser Gebietszerlegungen auf einfache geometrische Objekte durchgeführt. Diese Vorgehensweise führt zum Begriff der topologischen Zelle, die im zweiten Teil dieses Kapitels betrachtet wird.

Die Zusammenführung von CAD-Modellierung und von Berechnungsverfahren (z.B. FEM) erfordert kompatible Modellvorstellungen und Realisierungen. Die Zelltheorie hat sich hier als ein mächtiges Werkzeug etabliert. Sie bildet sowohl die Modellgrundlage für eine Vielzahl von Körpermodellierern in CAD-Systemen als auch bei der Netzmodellierung als Basis von Berechnungsverfahren. Ähnliche Entwicklungen sind auch im Bereich der Umweltforschung und -technik zu beobachten, wobei die geographischen Informationssysteme im wesentlichen die geometrische und topologische Modellierung von Geobjekten realisieren.

3.1. Konvexe Polyeder

Lineare Räume über einem Körper bewirken eine wesentliche Strukturierung der Elemente eines Raumes (Def. 2.5.2). Infolge dieser inneren Struktur war es möglich, von der Dimension und von Unterräumen zu sprechen. Durch die Beschränkung auf lineare Räume über dem Körper der reellen Zahlen konnte der Begriff der konvexen Menge eingeführt werden (Abschn. 2.5.2). Zu den einfachsten konvexen Mengen gehören der gesamte lineare Raum, jeder Halbraum und jede Hyperebene.

Im folgenden wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum \mathfrak{R}^n betrachtet. Dies ist möglich, da jedes Element eines n -dimensionalen linearen Raumes über \mathfrak{R} durch ein n -Tupel reeller Zahlen, den Koordinaten bzgl. einer festen Basis, charakterisiert werden kann. Die Begriffe Punkt und Vektor werden häufig synonym gebraucht.

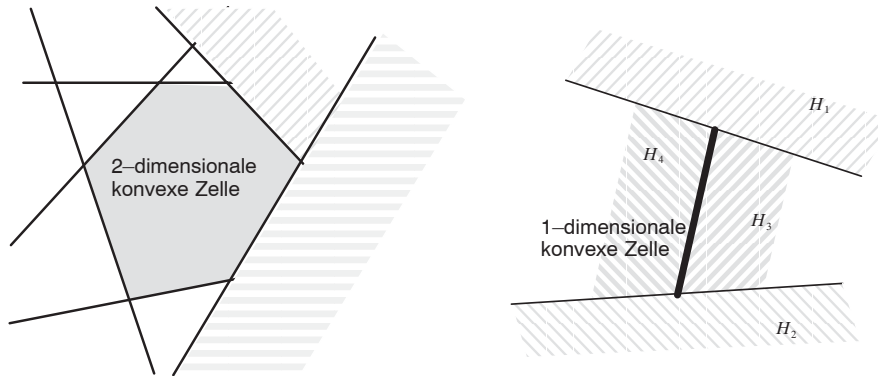


ABBILDUNG 3.1.1. Konvexe Zellen als Durchschnitt von Halbräumen

Die Definition eines konvexen Polyeders oder einer konvexen Zelle kann auf verschiedene äquivalente Arten erfolgen. In der Definition 2.5.9 wurde das konvexe Polyeder als beschränkte konvexe Menge mit einer endlichen Zahl von Eckpunkten definiert. Hierzu gleichwertig sind die Definitionen über ein *beschränktes konvexes Raumstück* (Abb. 3.1.1) oder als die konvexe Hülle von mehr als n Punkten. Für die Umsetzung von konvexen Zellen im Rahmen von Algorithmen kommt der Bestimmung der konvexen Hülle einer Punktmenge eine zentrale Rolle zu (Abschn. 3.1.2).

Eine wichtige Eigenschaft der Definition des konvexen Polyeders als Durchschnitt von Halbräumen ist die Möglichkeit, recht einfach auch m -dimensionale konvexe Polyeder in n -dimensionalen Räumen ($m \leq n$) beschreiben zu können (Abb. 3.1.1).

Sei P ein konvexes Polyeder im linearen Raum M über \mathfrak{R} und wird mit $\langle P \rangle$ der *kleinste* lineare Teilraum in M bezeichnet, der P vollständig enthält, so kann man die **Dimension des Polyeders** P als die von $\langle P \rangle$ definieren: $\dim P := \dim \langle P \rangle$. Die leere Menge \emptyset ist per Definition eine konvexe Zelle der Dimension -1 .

Die praktische Konstruktion des kleinsten Unterraumes, der das konvexe Polyeder enthält, erfolgt, indem man alle Linearkombinationen von Elementen des konvexen Polyeders bildet.

Für die Realisierung einer konvexen Zelle im Rechner sind häufig rekursive Darstellungen und Algorithmen geeignet. Man sollte sich hierzu die Frage stellen, was man unter der Seite eines Körpers bzw. eines konvexen Polyeders versteht. Hierzu zieht man am zweckmäßigsten die Definition des konvexen Halbraumes heran und bemerkt, daß ein konvexes Polyeder immer vollständig innerhalb eines konvexen Halbraumes liegt. Sei H eine einen konvexen Halbraum begrenzende Hyperebene mit $P \subseteq H^-$ und $P \cap H \neq \emptyset$, so wird H

als **Stützebene** von P bezeichnet. Hiervon ausgehend definiert man eine **Seite** von P als $P \cap H$.

THEOREM. *Ein konvexes Polyeder hat höchstens endlich viele Seiten und jede Seite ist ein konvexes Polyeder. Ein m -dimensionales konvexes Polyeder P hat Seiten jeder Dimension $j = 0, 1, \dots, m - 1$.*

Ist P ein m -dimensionales Polyeder, dann werden alle $(m - 1)$ -dimensionalen Seiten von P **Facetten**, 1-dimensionale Seiten **Kanten** und 0-dimensionale Seiten **Ecken** genannt. Jede Seite F von P ist ebenfalls ein konvexes Polyeder und man schreibt $F < P$. Es gilt die Transitivität, was bedeutet, daß aus $F < P$ und $G < F$ folgt $G < P$. Nimmt man die leere Menge \emptyset und das gesamte Polyeder P zur Menge der Seiten hinzu und bezeichnet man diese mit $F(P)$, so ist diese Menge teilweise geordnet bezüglich der „enthalten sein“-Relation (*inclusion*) und bildet einen Verband.

THEOREM. *Jede konvexe m -Zelle hat mindestens $m + 1$ Ecken.*

DEFINITION. Unter dem **dualen konvexen Polyeder** Q^* versteht man die konvexe Hülle der Schwerpunkte aller Facetten von Q (Abb. 3.1.2).

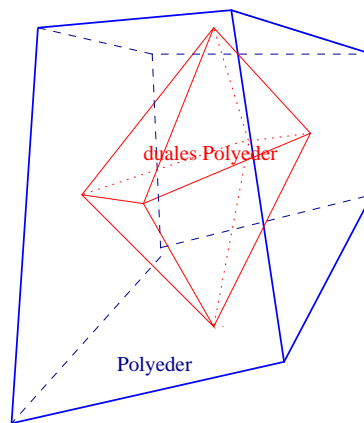


ABBILDUNG 3.1.2. Duales Polyeder

3.1.1. Simplexe.

Simplexe stellen die kleinsten konvexen Polyeder dar und sind deshalb besonders geeignet für Zerlegungen von Räumen und Gebieten. Die Einfachheit von Simplexen bewirkt, daß eine Vielzahl von Algorithmen auf diese zurückgreifen. Obwohl die Definition der konvexen Zelle und somit auch die des Simplex einzig auf den Eigenschaften eines linearen Raumes über \mathfrak{R} basieren, wird sich bei der Formulierung konkreter Algorithmen zeigen, daß häufig weitere Eigenschaften der zugrundeliegenden Räume (z.B. eines linearen metrischen Raumes) herangezogen werden können. Auf solche Aspekte soll in diesem und den folgenden Abschnitten eingegangen werden.

DEFINITION 3.1.1. Eine *konvexe m -Zelle*, die genau $m + 1$ Ecken besitzt, wird als *m -Simplex* bezeichnet.

Hierzu äquivalente Definitionen sind die eines Simplexes über die konvexe Hülle von $m + 1$ Punkten p^1, p^2, \dots, p^{m+1} , die nicht in einer $(m - 1)$ -dimensionalen Ebene liegen bzw. die affin unabhängig (Def. 2.5.11) sind. Dies bedeutet, daß die Vektoren $\overrightarrow{p^2 p^1}, \dots, \overrightarrow{p^{m+1} p^1}$ linear unabhängig sind und mit dem ausgewählten Punkt p^1 einen Teilraum des linearen Raumes aufspannen.

Es seien S_1 und S_2 zwei Simplexe. S_1 heißt **Seite** von S_2 , wenn die Ecken von S_1 auch Ecken von S_2 sind ($S_1 \leq S_2$). Gilt zusätzlich $S_1 \neq S_2$, so bezeichnet man S_1 auch als **eigentliche Seite** von S_2 und schreibt $S_1 < S_2$. Hat das Simplex S die Dimension q so nehmen die Seiten S_p , deren Dimension $p = q - 1$ ist, eine besondere Rolle ein und werden mit **Subsimplex** (Untersimplex) bezeichnet. Mit ihrer Hilfe kann man zum einen einen Simplex, ausgehend von seinen Ecken, rekursiv beschreiben, und zum anderen sind die Untersimplexe eines orientierten q -dimensionalen Simplexes in natürlicher Weise orientiert.

Jedes m -dimensionale Simplex S setzt sich aus $m + 1$ $(m - 1)$ -dimensionalen Simplexen zusammen. Die allgemeine Zusammensetzung eines Simplexes läßt sich über einen Binominalkoeffizienten bestimmen. Hierbei gilt, daß sich ein m -Simplex aus $\binom{m+1}{k+1}$ k -Simplexen zusammensetzt (Abb. 3.1.3).

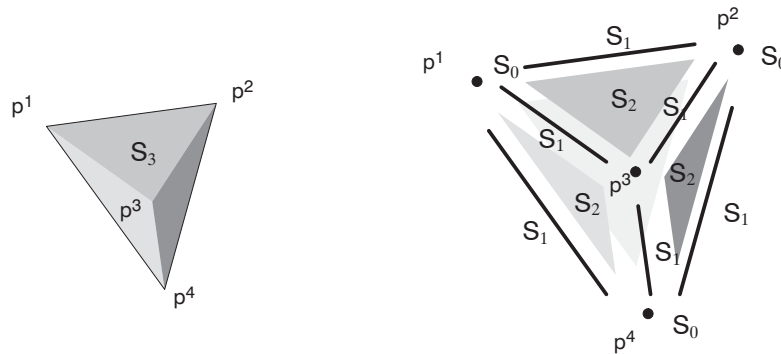


ABBILDUNG 3.1.3. Tetraeder mit seinen Subsimplexen

Eine der Konstruktion angelehnte Beschreibung eines Simplexes S ist seine Identifizierung über eine Facette $F(p^1, \dots, p^m)$ und einen zusätzlichen Punkt p^{m+1} , der nicht in der Ebene liegt, die durch F festgelegt ist. Ein so konstruiertes Simplex wird im folgenden durch $S(F, p^{m+1})$ gekennzeichnet.

Betrachtet man die Ecken eines Simplexes in den oberen Darstellungen, so stellt man fest, daß sich die $(m + 1)$ Ecken eines m -Simplexes auf $(m + 1)!$ Arten anordnen lassen. In Anlehnung an die Festlegung der Nummerierung der Ecken eines Dreieckes in der Ebene, wobei eine positive Orientierung einer Nummerierung entgegen dem Uhrzeigersinn entspricht und entgegengesetzt eine negative Orientierung, kann eine allgemeine Orientierung für beliebig-dimensionale Simplexe definiert werden. Zwei Anordnungen von Ecken heißen äquivalent, wenn sie durch eine gerade Permutation auseinander

hervorgehen. Die Orientierung des Simplexes ist somit eine Klasse äquivalenter Eckanordnungen. Ein orientiertes Simplex ist ein Simplex mit einer festen Orientierung. Das 0-dimensionale Simplex stellt einen Sonderfall dar und hat nur eine Orientierung. Für alle anderen Simplexe lassen sich zwei Orientierungen definieren. Man spricht dann von positiven und negativen Orientierungen (Abb. 3.1.4). Wird bei einem Simplex $S = \langle p^1, p^2, \dots, p^{m+1} \rangle$ die Anordnung zweier Ecken getauscht, so ändert sich die Orientierung des Simplexes, dies wird im allgemeinen durch ein negatives Vorzeichen gekennzeichnet: $\langle p^1, p^2, \dots, p^{m+1} \rangle = - \langle p^2, p^1, p^3, \dots, p^{m+1} \rangle$.

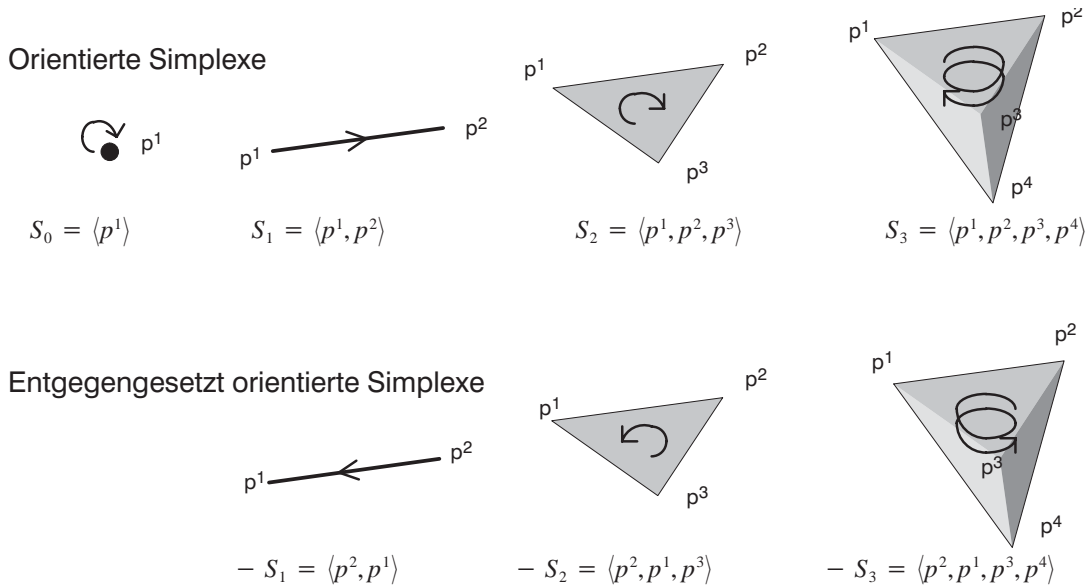


ABBILDUNG 3.1.4. Orientierung von Simplexen

Sei $S_{m-1} < S_m$ und $p \in S_m$ die Ecke, die nicht zu S_{m-1} gehört, dann induziert eine Orientierung des Simplexes S_m wie folgt eine Orientierung des Seitensimplex S_{m-1} :

Man wählt eine zur gegebenen Orientierung gehörige Anordnung p, p^1, \dots, p^m der Ecken von S_m , in der p die erste Ecke ist, also $S_m = \langle p, p^1, \dots, p^m \rangle$ und definiert die induzierte Orientierung auf S_{m-1} durch $S_{m-1} = \langle p^1, \dots, p^m \rangle$ (Abb. 3.1.5).

Häufig ist es sinnvoll, disjunkte konvexe Mengen voneinander zu trennen. Sind zwei konvexe Mengen M_1 und M_2 disjunkt, so existiert immer eine Hyperebene h mit zugehörigen Halbräumen H_1 und H_2 , so daß $M_1 \subseteq h \cup H_1$ und $M_2 \subseteq h \cup H_2$ gelten. Man sagt auch, daß die Hyperebene h die beiden konvexen Mengen trennt.

3.1.1.1. Simplexe in einem metrischen linearen Raum.

Das 1-dimensionale Simplex stellt innerhalb der Simplexfamilie einen Sonderfall dar. Es ist das erste Simplex, für das sich eine Orientierung definieren läßt. Es ist bekannt, daß sich für eine Strecke auch eine Längenmaßzahl angeben läßt. Die Berechnung dieser Länge läßt sich durch die Abstandsberechnung seiner beiden Randpunkte bestimmen (Def. 2.4.1).

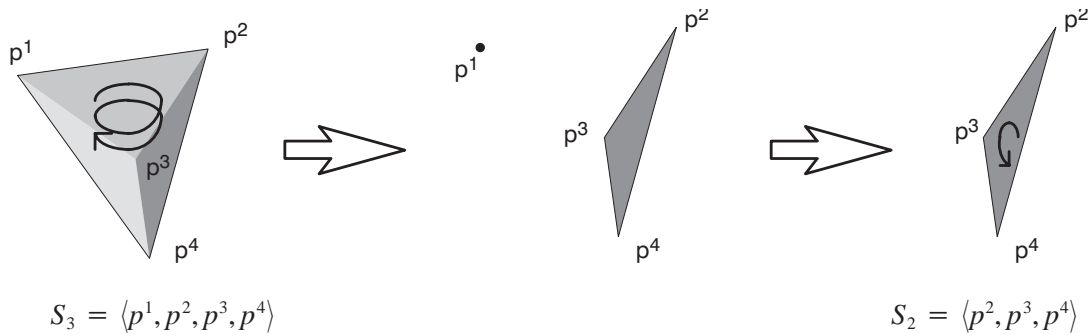


ABBILDUNG 3.1.5. Induzierte Orientierung

Im weiteren werden Simplexe und konvexe Polyeder in einem linearen Vektorraum über \mathfrak{K} mit einer Metrik d versehen betrachtet.

Im allgemeinen kann man jedem m -Simplex $S(p^1, \dots, p^{m+1})$ eines linearen metrischen Raumes der Dimension $n \geq m$ eine Volumenmaßzahl V in der Form:

$$(3.1.1) \quad V^2(S(p^1, \dots, p^{m+1})) := \frac{1}{m!^2 \cdot 2^m} \begin{vmatrix} 0 & d^2(p^2, p^1) & \dots & d^2(p^{m+1}, p^1) & 1 \\ d^2(p^1, p^2) & 0 & \dots & d^2(p^{m+1}, p^2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^2(p^1, p^{m+1}) & d^2(p^2, p^{m+1}) & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

zuordnen.

Die Lage und das geometrische Aussehen eines m -Simplexes in einem linearen Raum ist über die Lage seiner Ecken eindeutig bestimmt. Die Lage der Ecken selbst kann eindeutig über die Koordinaten der Ecke bezüglich einer gewählten Basis beschrieben werden. Im weiteren werden die Koordinaten des linearen Raumes als globale Koordinaten bezeichnet. Besteht die Notwendigkeit, einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Ecken, den ihnen zugeordneten Funktionswerten und allen Punkten des Simplexes zu formulieren, wie dies bei Interpolations- und Approximationsaufgaben der Fall ist, so ist dies in globalen Koordinaten nur schwer formalisierbar. Dimensionslose oder baryzentrische Koordinaten führen unter Einbeziehung einer Metrik zu einer wesentlich kompakteren Darstellung.

Zunächst soll am Beispiel der Geraden und des Dreieckes (Abb. 3.1.6) im euklidischen Raum eine geometrische Interpretation solcher Koordinaten gegeben werden. Wir nehmen an, es gibt eine Strecke g , beschrieben durch zwei Punkte p^1 und p^2 . Gefragt ist nach der Darstellung eines beliebigen Punktes auf g durch die beiden Punkte p^1 und p^2

$$p = \lambda \cdot p^1 + (1 - \lambda) \cdot p^2 = \lambda_1 \cdot p^1 + \lambda_2 \cdot p^2$$

mit

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Die reellen Zahlen λ_1 und λ_2 werden als baryzentrische Koordinaten der Strecke bezeichnet (Abb. 3.1.6).

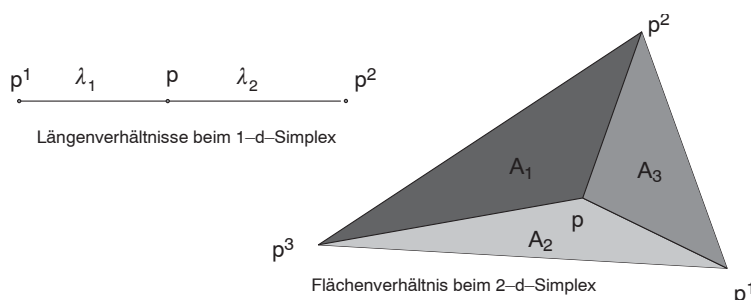


ABBILDUNG 3.1.6. Baryzentrische Koordinaten

Führt man ähnliche Überlegungen für das Dreieck durch, so erhält man die baryzentrischen Koordinaten als normierte Flächenmaßzahl der Teilflächen, die aus dem betrachteten Punkt und einem Randsimplex gebildet wird. Die Schwerpunktkoordinaten λ_i des Dreiecks lauten dann in ihrer geometrischen Interpretation

$$\lambda_i(p) := \frac{A_i}{\sum_{k=1}^3 A_k}$$

und sind wohl definiert. An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, daß, wenn nichts anderes gesagt wird, Flächeninhalte immer positiv sind. Dies bedeutet, daß auch die als Flächenverhältnisse definierten baryzentrischen Koordinaten immer größer gleich Null sind.

DEFINITION 3.1.2. Für ein n -Simplex, bestehend aus den Ecken p^1, \dots, p^{n+1} und den Facetten F^1, \dots, F^{n+1} , lassen sich die $n + 1$ **baryzentrischen Koordinaten** für den Punkt p wie folgt definieren:

$$(3.1.2) \quad \lambda_i(p) := \frac{V(S(F^i, p))}{V(S(p^1, \dots, p^{n+1}))},$$

wobei $V(S)$ die Volumen der betrachteten Simplexe S sind.

Ausgehend von der geometrischen Interpretation der baryzentrischen Koordinaten als Maßverhältnisse von Teilvolumina, normiert mit dem Gesamtvolumen, kommt man zu folgender Charakterisierung der Lage eines Punktes:

- Liegt ein Punkt innerhalb des Simplexes, so ist die Summe der baryzentrischen Koordinaten gleich Eins: $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
- Liegt ein Punkt außerhalb des Simplexes, so ist die Summe der baryzentrischen Koordinaten größer als Eins: $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 1$.

Die Lage eines beliebigen Punktes p kann mittels seiner baryzentrischen Koordinaten

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ als Linearkombination der Bezugspunkte p^1, \dots, p^{n+1} dargestellt werden:

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(p) \cdot p^i.$$

Die Invarianz der baryzentrischen Koordinaten unter affinen Transformationen ist ein wesentlicher Vorteil. Bezeichnet $p \rightarrow \hat{p} := Lp + T$ eine affine Transformation mit linearem Anteil L und Translationsanteil T , dann besitzt \hat{p} bezüglich des transformierten Dreieckes die gleichen baryzentrischen Koordinaten wie sein Urbild p bezüglich des ursprünglichen Dreieckes. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ein einzelnes Dreieck auch als gleichseitiges Dreieck dargestellt werden.

3.1.1.2. Simplexe im euklidischen Raum.

Für die Berechnung des Volumens bzw. der Flächenmaßzahl eines n -dimensionalen Simplexes im euklidischen Raum gibt es neben der Vorschrift 3.1.1, auf der Grundlage der euklidischen Metrik, Formeln zur Berechnung eines vorzeichenbehafteten Volumens. Der Ansatz hierzu basiert auf den Koordinaten der zugrundeliegenden 0-Simplexe. Er eignet sich nur zur Berechnung der Maßzahl eines n -dimensionalen Simplexes im n -dimensionalen euklidischen Raum, liefert dafür jedoch ein vorzeichenbehaftetes Volumen, welches sich vorteilhaft für die Beurteilung der Orientierung eines Simplexes nutzen läßt. Betrachtet wird ein n -dimensionales Simplex mit den Punkten p^1, p^2, \dots, p^{n+1} :

$$(3.1.3) \quad V = \frac{1}{n!} \det \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 & \dots & p_1^{n+1} \\ p_2^1 & p_2^2 & \dots & p_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Betrachtet man ausschließlich Simplexe, deren Ordnung der Dimension des zugrundeliegenden euklidischen Raumes entsprechen, so führt die Bestimmung der baryzentrischen Koordinaten auf die eindeutige Lösung des nachstehenden Gleichungssystems.

Die **baryzentrischen Koordinaten** eines Punktes p bezüglich eines n -dimensionalen Simplexes mit den Ecken p^1, p^2, \dots, p^{n+1} ergeben sich als eindeutige Lösung des nachstehenden Gleichungssystems.

$$[A] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } [A] := \begin{bmatrix} p_1^1 & \dots & p_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_n^1 & p_n^2 & \dots & p_n^{n+1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1.2. Die konvexe Hülle.

Die Konstruktion einer konvexen Zelle aus einer gegebenen Punktmenge ist äquivalent zur Bestimmung der konvexen Hülle. In der Definition 2.5.9 wurde die konvexe Hülle einer

Menge A eines linearen Raumes über \mathfrak{K} durch

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{K \supseteq A; K \text{ konvex}} K$$

definiert. Ein praktisches Verfahren zur Berechnung der konvexen Hülle ergibt sich durch diese Definition aber noch nicht.

Zur Generierung der konvexen Hülle einer Punktmenge existiert eine Vielzahl an Algorithmen. Die meisten dieser Algorithmen sind für den 2-dimensionalen Raum (z.B. Einwickelalgorithmus) entworfen. Teilweise sind sie auf die Bestimmung der konvexen Hülle von Punktmenge höherer Dimensionen erweiterbar. Ihre Realisierung ist jedoch durch die entstehende Unübersichtlichkeit bei der Übertragung ihrer Strategien in höhere Dimensionen umständlich bzw. schwer überschaubar [99].

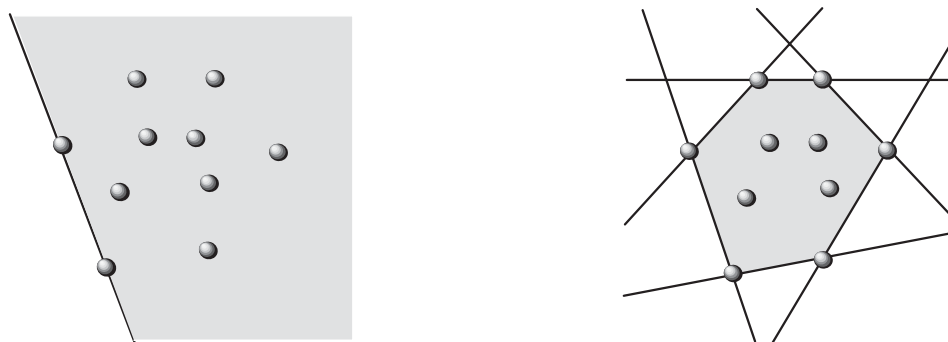


ABBILDUNG 3.1.7. Die konvexe Hülle als Durchschnitt endlich vieler Halbräume

Der *Beneath-Beyond-Algorithmus* in Verbindung mit der Modellvorstellung, daß eine konvexe Hülle als Durchschnitt von Halbräumen aufgefaßt werden kann (Abb. 3.1.7), bildet eine Ausnahme. Er verfolgt eine verhältnismäßig anschauliche und einfach umsetzbare Strategie zur Generierung der konvexen Hülle im euklidischen Raum. Sein zusätzlich allgemein gehaltener Ablauf bildet die Grundlage für die Generierung der konvexen Zelle im n -dimensionalen linearen Raum über dem Körper der reellen Zahlen.

3.1.2.1. *Beneath-Beyond-Algorithmus*. Beim Beneath-Beyond-Algorithmus wird ausgehend von einer Startzelle (häufig ein Simplex) durch sukzessives Hinzufügen von Punkten die konvexe Zelle konstruiert. Bei der Hinzunahme eines Punktes können zwei Situationen auftreten:

1. Der Punkt liegt im Inneren (beneath) der aktuellen Zelle. Diese bleibt dann unverändert.
2. Der Punkt liegt außerhalb (beyond) der aktuellen Zelle. Sie ist um diesen Punkt zu erweitern.

Die Überprüfung des auftretenden Falles erfolgt über ein sogenanntes Sichtbarkeitskriterium, welches auf die Facetten der aktuellen konvexen Hülle angewendet wird. Anschaulich betrachtet ist eine Facette sichtbar, wenn ein sich in dem Punkt befindender Betrachter

die Facette von außen vollständig sehen kann. Ist eine Facette dagegen durch andere Facetten der konvexen Zelle verdeckt, ist sie unsichtbar. Eine Facette ist entsprechend ihres Sichtbarkeitsstatus zu markieren (Abb. 3.1.8).

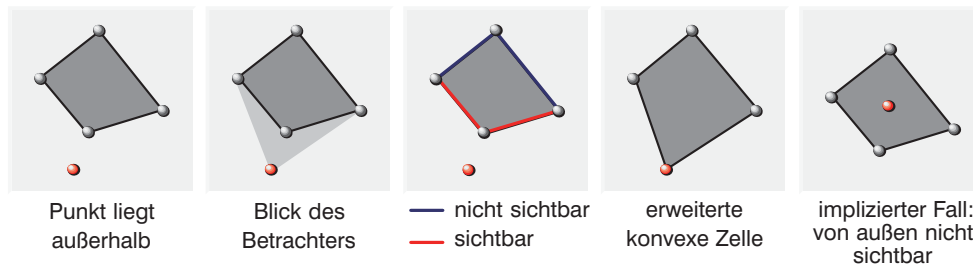


ABBILDUNG 3.1.8. Beneath-Beyond-Algorithmus in der Ebene

Nach Überprüfung der Sichtbarkeit aller Facetten der aktuellen konvexen Zelle wird die erweiterte konvexe Zelle generiert. In der erweiterten Zelle sind die als sichtbar markierten Facetten nicht mehr enthalten, die als nicht sichtbar markierten werden übernommen. Die zu entfernenden Facetten werden durch Facetten, die mit dem hinzuzufügenden Punkt zu erzeugen sind, ersetzt. Nach der Hinzunahme des i -ten Punktes der Punktmenge steht somit die konvexe Zelle der ersten i Punkte zur Verfügung.

ALGORITHM 3.1.3. *Allgemeine Strategie des Beneath-Beyond-Algorithmus*

- Start:**
- Man nehme $n+1$ Punkte aus der Punktmenge, die nicht in einer Hyper–ebene liegen und erzeuge ein n –dimensionales Simplex (die Starthülle).
 - Für alle verbleibenden Punkte der Punktmenge und
 - für jede Facette der aktuellen konvexen Zelle wende man das **Sichtbarkeitskriterium** an.
 - Man **Generiere** eine erweiterte konvexe Zelle:
 - durch das Übernehmen der nicht markierten Facetten
 - und das Ersetzen der markierten Facette durch Facetten, die durch den hinzuzunehmenden Punkt entstehen.

Die Überprüfung einer Facette auf Sichtbarkeit wird im sogenannten Sichtbarkeitskriterium formuliert. Es existieren verschiedene Möglichkeiten, das Sichtbarkeitskriterium im Rahmen eines Algorithmus umzusetzen. Ebenso sind zur Generierung der erweiterten konvexen Zelle unterschiedliche Vorgehensweisen möglich.

Hier wird die Allgemeingültigkeit des Beneath-Beyond-Algorithmus deutlich. Je nach Anforderungen an die Bestimmung einer konvexen Zelle können Sichtbarkeitskriterium und Generierung entsprechend gewählt werden.

3.1.2.2. *Sichtbarkeitskriterium.*

Bei der Formulierung eines Sichtbarkeitskriteriums gibt es verschiedene Möglichkeiten, die im wesentlichen durch die gewählten Räume charakterisiert sind. Die Nutzung einer Orientierung und von vorzeichenbehafteten Volumina sind häufig anzutreffende Vorgehensweisen (Abb. 3.1.9). Das im weiteren vorgestellte Sichtbarkeitskriterium basiert ausschließlich auf den Eigenschaften des zugrundeliegenden linearen Raumes über den reellen Zahlen. Einschränkungen an die Dimension der konvexen Zelle in bezug zum betrachteten Raum, wie dies bei der vorzeichenbehafteten Volumenberechnung der Fall ist, werden nicht notwendig sein.

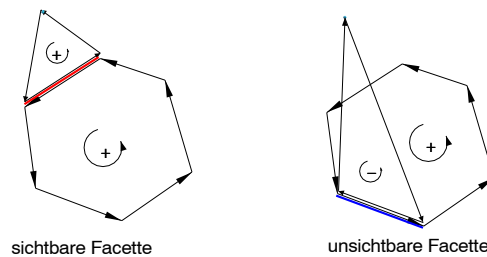


ABBILDUNG 3.1.9. Sichtbarkeitskriterium über die Orientierung

Wird eine konvexe Zelle wie in Abbildung 3.1.7 dargestellt als Durchschnitt von Halbräumen aufgefaßt, so ist jede Facette der konvexen Zelle eindeutig einem Halbraum zugeordnet und die gesamte konvexe Zelle befindet sich innerhalb dieses Halbraumes.

Soll einer bestehenden konvexen Hülle ein weiterer Punkt hinzugefügt werden, ist für jede Facette der aktuellen Hülle zu prüfen, ob der neue Punkt im Halbraum, der durch die Facette definiert ist, liegt oder nicht (Abb. 3.1.10).

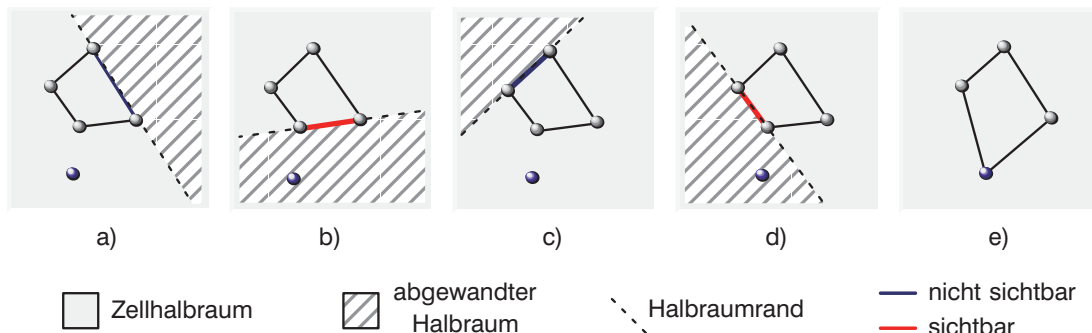


ABBILDUNG 3.1.10. Sichtbarkeitsstatus über Zellhalbraumbetrachtungen

Liegt der Punkt im Halbraum, in dem sich auch die aktuelle konvexe Hülle befindet, so wird diese Facette als unsichtbar gekennzeichnet. Liegt er dagegen in dem der konvexen Hülle abgewandten Halbraum, ist die Facette sichtbar. Liegt der betrachtete Punkt genau in der Hyperebene, die durch die Facette definiert wird, ist eine eindeutige Zuordnung zu den Halbräumen nicht möglich. Die betrachtete Facette ist somit weder sichtbar noch unsichtbar. Dieser Sonderfall kann wiederum durch die Bestimmung der konvexen Hülle, nun aber im Unterraum der Hyperebene, behandelt werden. Da dieser Unterraum wieder ein linearer Raum über \mathfrak{R} ist, können die oben beschriebenen Herangehensweisen angewendet werden. Durch diese Rekursion ist die Sonderfallbehandlung Bestandteil der Generierung der erweiterten konvexen Hülle, so daß eine weder sichtbare noch unsichtbare Facette im Sichtbarkeitskriterium lediglich als solche gekennzeichnet werden muß.

Die algorithmische Umsetzung erfolgt im wesentlichen durch das Einführen lokaler Koordinatensysteme, die die betrachteten Halbräume und Hyperebenen unter Einbeziehung der betrachteten Zelle beschreiben.

ALGORITHM 3.1.4. *Konstruktion eines Koordinatensystems für den Unterraum, der durch die konvexe Zelle bestimmt ist.*

- Start:**
- Man wähle eine beliebige Ecke, z.B. p^0 als Koordinatenursprung.
 - Man wähle eine beliebige zweite Ecke, z.B. p^1 , wodurch $\vec{p^0p^1}$ zum ersten Basisvektor wird.
 - Für alle verbleibenden Ecken der konvexen Zelle
 - Konstruiere einen weiteren Vektor $\vec{p^0p^i}$.
Ist dieser Vektor linear unabhängig zur existierenden Basis, so nehme man diesen in die Basis auf.

Werden die Facetten der aktuellen Hülle betrachtet, so entstehen im allgemeinen Hyperebenen mit zugehörigen Koordinatensystemen (Abb. 3.1.11).

Zur Identifikation des den Facetten zugeordneten Halbraumes wird ein weiterer Vektor benötigt, der in Richtung der restlichen Ecken der konvexen Hülle zeigt. Hierfür kann eine beliebige Ecke der konvexen Hülle, die nicht zur betrachteten Facette gehört, gewählt werden.

Mit einem derartigen Koordinatensystem läßt sich der Raum, in dem sich die konvexe Zelle befindet, vollständig durch die Gleichung:

$$(3.1.4) \quad x = p^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \vec{p^0p^i} + \lambda_n \vec{p^0p^n}$$

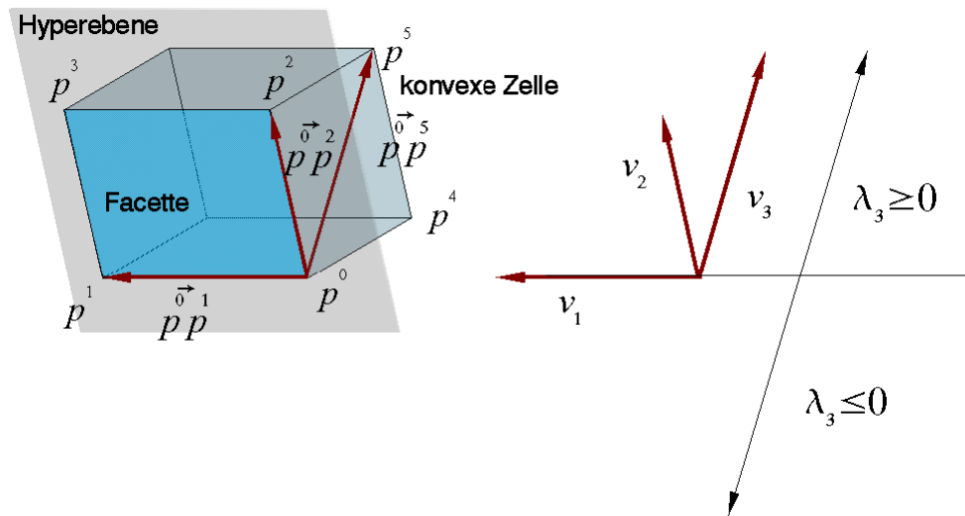


ABBILDUNG 3.1.11. Koordinatensystem zu einer Facette

beschreiben. Die Identifikation der Halbräume erfolgt über das Vorzeichen der Koordinate λ_n . Alle Punkte, deren Koordinate $\lambda_n < 0$ ist, liegen in dem der konvexen Zelle abgewandten Halbraum. Entsprechend liegen alle Punkte, deren Koordinate $\lambda_n > 0$ ist, im Halbraum der aktuellen Zelle. Ein Punkt, dessen Koordinatenwerte $\lambda_n = 0$ beträgt, befindet sich in der Hyperebene der Facette und muß mit gesonderter Aufmerksamkeit behandelt werden.

Mit Hilfe dieses Koordinatensystems kann nun entschieden werden, ob eine Facette für den hinzuzufügenden Punkt p sichtbar ist oder nicht. Dazu wird der Punkt p im soeben konstruierten Koordinatensystem dargestellt:

- Gilt $\lambda_n < 0$, so liegt p in dem der konvexen Zelle abgewandten Halbraum. Die betrachtete Facette ist somit sichtbar.
- Gilt $\lambda_n > 0$, so liegt p im Halbraum des Polyeders. Die entsprechende Facette ist nicht sichtbar.
- Gilt $\lambda_n = 0$, so liegt p in der Hyperebene der betrachteten Facette und muß mit gesonderter Aufmerksamkeit behandelt werden.

3.1.2.3. Konstruktion der konvexen Zelle.

Die Konstruktion der konvexen Hülle erfolgt ausgehend von einer gegebenen konvexen Startzelle, die aus einer Teilmenge der Punktmenge gebildet wird, durch fortlaufende Hinzunahme von Punkten, bis sämtliche Punkte der Punktmenge erfaßt sind. Das Kriterium für die Hinzunahme eines Punktes ist durch dessen Lage bezüglich der einzelnen Facetten der aktuellen konvexen Zelle gegeben.

Als n -dimensionale konvexe Startzelle dient im allgemeinen ein n -dimensionales Simplex. Im Gegensatz zu einer allgemeinen konvexen Zelle ist das Konstruieren von Untersimplex eines n -dimensionalen Simplexes allein durch die Variation von $n + 1$ Punkten

zu n -Tupeln möglich. Somit beschränkt sich die Bestimmung der Startzelle auf die Identifikation von $n + 1$ linear unabhängigen Punkten.

Die nun existierende konvexe Hülle wird um einen weiteren Punkt der Punktmenge erweitert. Bezüglich dieses Punktes werden alle Facetten der aktuellen Hülle mittels des Sichtbarkeitskriteriums markiert. Danach werden alle markierten Facetten der aktuellen konvexen Zelle entfernt. Mit den übriggebliebenen Facetten und dem neuen Punkt wird die neue konvexe Zelle zusammengesetzt. Sind keine Facetten markiert worden, liegt der betrachtete Punkt innerhalb der aktuellen konvexen Zelle.

Tritt der Sonderfall auf, wonach sich der zu betrachtende Punkt als Linearkombination der Basisvektoren einer Hyperebene darstellen läßt, so liegt dieser auf dem gemeinsamen Rand der betrachteten Halbräume (Abb. 3.1.12). Der Punkt muß demnach mit den Punkten der betrachteten Facette eine konvexe Zelle in der Hyperebene bilden. Für diese Teilmenge von Punkten wird der Algorithmus erneut aufgerufen. Die dadurch entstehende Rekursion wird abgebrochen, wenn das Vorzeichenkriterium greift oder die editierbare Basis des 0-dimensionalen Unterraumes erreicht ist. Die untersuchte Facette wird durch die neu erzeugte konvexe Zelle ersetzt.

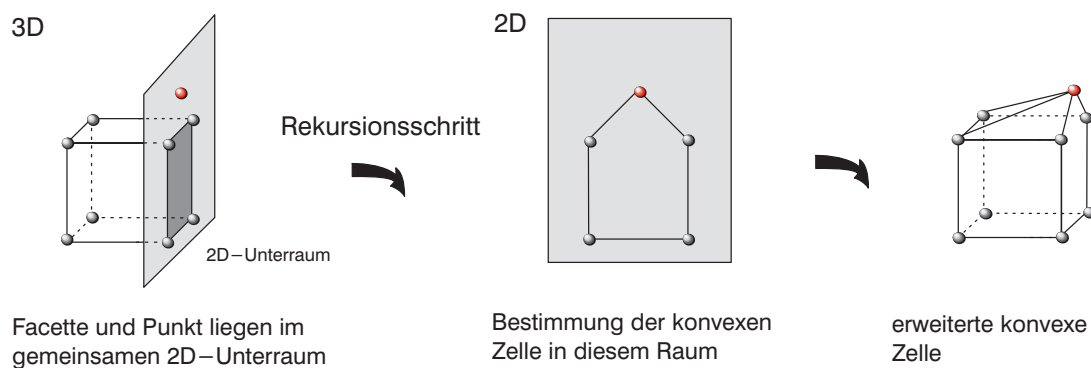


ABBILDUNG 3.1.12. Sonderfallbehandlung durch Rekursion

Die rekursive Konstruktion erfordert die Bestimmung von konvexen Zellen in beliebigen Unterräumen des n -dimensionalen Raumes. Ein m -dimensionaler Unterraum ist durch m Basisvektoren gegeben. Für die Vorzeichenbestimmung im Sichtbarkeitskriterium entsteht ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten. Die mehrdeutige Lösung dieses Gleichungssystems kann dann mit dem Gaußschen Algorithmus bestimmt werden. Sind alle markierten Facetten behandelt, kann die erweiterte konvexe Zelle generiert werden. Sie wird aus den neugenerierten konvexen Zellen der markierten Facetten und der ursprünglichen konvexen Zelle zusammengesetzt. Dabei sind konvexe Zellen, die durch das Zusammensetzen entstehen, zu entfernen.

Der vorgestellte Weg zur Generierung der erweiterten konvexen Zelle ist in allen Dimensionen möglich. Die entstehende konvexe Hülle besteht nicht mehr nur aus Simplexen (z.B. Dreiecken) sondern aus beliebigen wiederum konvexen Zellen (Abb. 3.1.13).

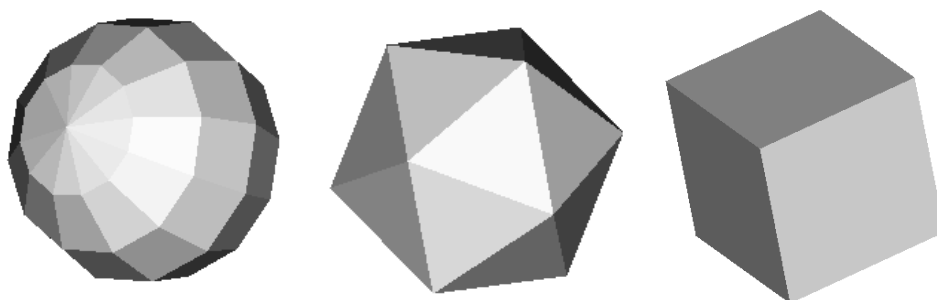


ABBILDUNG 3.1.13. Beispiele konvexer Zellen

3.1.2.4. *Zur Mächtigkeit der konvexen Hülle.*

Zunächst erscheint die Bestimmung der konvexen Hülle in Dimensionen größer drei fraglich und es fehlt die Vorstellung für ein mögliches Problem, daß eines solchen Algorithmus' bedarf. Faßt man jedoch die Dimensionen als Parameterräume auf, so lassen sich leicht Probleme beschreiben, die von mehr als drei Parametern abhängig sind.

Wie den Ausführungen der letzten Abschnitte zu entnehmen ist, sind Einschränkungen des vorgestellten Algorithmus bezüglich einer Dimension des zugrundeliegenden Raumes nicht vorhanden. Es wird sich jedoch zeigen, daß bei wachsender Dimension die Bestimmung der konvexen Hülle ausgesprochen aufwendig wird. Will man beispielsweise die konvexe Hülle einer Punktmenge mit $n = 100$ Daten, die von $N = 8$ Parametern abhängen, bestimmen, so umfaßt die Ausgabemenge der Ergebnisse schon allein bis zu 10^8 also 100 Millionen Elemente. Fügt man einen weiteren 101. Datensatz ein, so kann sich die Ausgabemenge um bis zu 4 Millionen Elemente vergrößern. Beginnt man bei einfachen Sortier-Algorithmen, so kann für diese eine problemgrößenabhängige obere Schranke für die optimale Laufzeit mit $O(N \log N)$ angegeben werden. Das Problem der konvexen Hülle ist wesentlich komplizierter, da das Laufzeitwachstum nicht allein von der Problemgröße N sondern auch von der Dimension n des betrachteten Raumes abhängt.

Bevor jedoch auf die Abschätzung von Wachstumsgrenzen eingegangen werden kann, müssen geeignete Notationen eingeführt werden.

DEFINITION 3.1.5. Seien $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, so sagt man: g ist O von f , falls gilt: $g = O(f) \Leftrightarrow \exists n_0 \geq 0$ und $C > 0$, so daß $g(n) \leq C f(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Inhaltlich bedeutet diese Definition, daß die Funktion f fast überall durch g nach oben beschränkt ist - bis auf einen konstanten Faktor. Eine analoge Notation gibt es auch für die untere Schranke.

DEFINITION 3.1.6. Seien $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, so sagt man: g ist Ω von f , falls gilt: $g = \Omega(f) \Leftrightarrow \exists n_0 \geq 0$ und $C > 0$, so daß $g(n) \geq C f(n)$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Zur Bestimmung der unteren Wachstumsgrenze für einen "Konvexe Hülle"-Algorithmus im n -dimensionalen Raum wird der Satz von Klee [97] herangezogen. Als Maß für die Größe einer konvexen Hülle wird die Anzahl der Randsimplexe gewählt. Daß diese Anzahl mit

steigender Problemgröße zunimmt, scheint logisch. Weiterhin kann man sich vorstellen, daß die Anzahl der Randsimplexe umso größer ist, je weniger Punkte innerhalb der Hülle liegen. Daß jedoch auch die Dimension des Problems ein wichtiger Einflußfaktor ist, ist von Klee gezeigt worden.

THEOREM 3.1.7. *Die Größe einer konvexen Hülle der Dimension dim aus N Punkten läßt sich für den schlechtesten Fall mit:*

$$f_e = \Omega(N^{(dim/2)})$$

nach unten abschätzen.

Für den Fall der konvexen Hülle in der Ebene ($dim = 2$) ist sofort einsichtig, daß, falls alle betrachteten N Knoten zur konvexen Hülle gehören, man genau N Randkanten hat ($\Omega(N^{(2/2)}) = \Omega(N)$). Die Anzahl der möglichen Facetten einer 3-dimensionalen konvexen Hülle ergeben sich aus der Eulerschen Polyederformel bzw. den allgemeinen Beziehungen planarer Graphen. Hiernach besteht die konvexe Hülle im 3-dimensionalen Raum aus weniger oder gleich als $3N - 6$ Kanten und $2N - 4$ Flächen. Besteht die Hülle nur aus Simplexen, so gilt jeweils die Gleichheit. Dies bedeutet, daß die Anzahl der Randflächen auch linear von der Anzahl der Punkte abhängt ($\Omega(N)$). Für höhere Dimensionen läßt sich keine polynomiale Abhängigkeit von der Punkteanzahl angeben. P. MC Mullen [126] gibt jedoch eine obere Grenze für die maximal mögliche Seitenzahl eines Polyeders der Dimension dim mit N Ecken an:

$$\gamma(dim, N) = \left[\begin{array}{c} N - (dim + 1)/2 \\ N - dim \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} N - (dim + 2)/2 \\ N - dim \end{array} \right].$$

Eine Abschätzung nach unten ergibt

$$\gamma(dim, N) \geq \frac{1}{r} \left[\begin{array}{c} r \\ r + 1 \end{array} \right]^r n^r \text{ mit } r = dim/2,$$

womit die Ordnung nachgewiesen wurde.

3.2. Topologische Zelle

Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnt, ist die Natur in vielen Bereichen Vorlage für die Modellbildung. Betrachtet man das natürliche Umfeld, so wird man feststellen, daß es, bis auf den Bereich der Kristallographie, kaum eben berandete Gebilde gibt. Vielmehr kommt es im Rahmen eines natürlichen Zellverbandes zu Deformationen der Zellen, um eine möglichst gute Anpassung zu erreichen.

Die Definition topologischer Zellen ist in der Literatur nicht eindeutig. Bei der Begriffsbildung wird im weiteren der Vorgehensweise in [145] gefolgt.

DEFINITION 3.2.1. Man nennt das topologische Bild (Def. 2.3.6) einer konvexen Zelle eine **topologische Zelle** (Abb. 3.2.1).

Der innere (rekursive) Aufbau bleibt so einfach, wie dies bei konvexen Zellen der Fall ist. Dieser Aufbau ermöglicht im Rahmen von Algorithmen und Konstruktionsprozessen weiterhin die Nutzung einfacher Konsistenzprüfungen. Die Definition besagt jedoch, daß

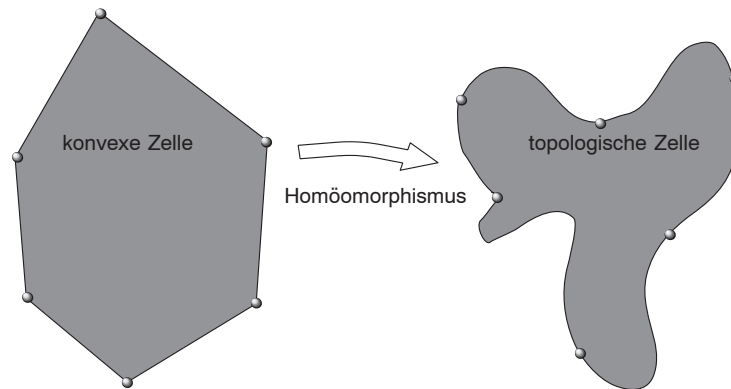


ABBILDUNG 3.2.1. Die topologische Zelle als Bild eines konvexen Polyeders

im allgemeinen die Eigenschaft der Konvexität fallen gelassen wird. Bei einer Realisierung in Datenstrukturen kann auf Algorithmen und Strukturen für konvexe Polyeder zurückgegriffen werden, die durch ein zusätzliches Attribut, den verwendeten Homöomorphismus ergänzt werden. Topologische Zellen bilden häufig die Basis in CAD-Systemen, wobei ihre Stärken besonders in der Modellierung von Oberflächen zum Ausdruck kommen. Ein zweiter großer Bereich, in dem topologische Zellen zum Einsatz kommen, sind Systeme zur Speicherung, Modellierung und Simulation geographischer, geologischer oder hydrologischer Daten.

Aus mathematischer Sicht sind weitere Verallgemeinerungen möglich, deren Umsetzung in Computeranwendungen sich wesentlich schwieriger gestalten. Die nächst stärkere Verallgemeinerung wird durch das Fallenlassen der topologischen Ähnlichkeit zu einem konvexen Polyeder erreicht (Abb. 3.2.2).

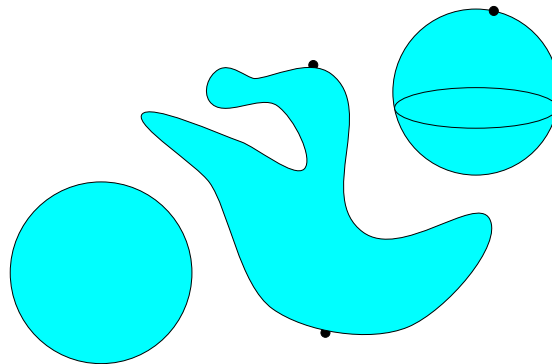


ABBILDUNG 3.2.2. Objekte, die keine topologischen Zellen sind

DEFINITION 3.2.2. Eine **n -dimensionale Zelle** (oder kurz n -Zelle) ist eine abgeschlossene Menge, deren Inneres homöomorph zur n -dimensionalen offenen Kugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ ist, mit der zusätzlichen Bedingung, daß ihr Rand ebenfalls aus einer endlichen Zahl niedrig-dimensionaler Zellen, den Facetten, besteht.

Die zweite Bedingung besagt, daß der Aufbau einer n -Zelle weiterhin rekursiv beschrieben werden kann, wobei die Grundbausteine die 0-Zellen sind. Anders ausgedrückt bedeutet diese Bedingung, daß sich die Zelle gerüstweise aufbauen läßt. Einfache Konsistenztests, wie dies mit der Eulerschen-Polyeder-Formel der Fall war, sind auf diesen Zellen und Zellkomplexen nicht mehr möglich.

Es ist nicht einzusehen, warum die Beschränkung an eine Zerlegung des Randes aufrechterhalten bleiben soll. Dies führt zu einer **verallgemeinerten Zelle**.

DEFINITION 3.2.3. Eine n -**dimensionale verallgemeinerte Zelle** ist eine abgeschlossene Menge, deren Inneres homöomorph zur n -dimensionalen offenen Kugel ist und deren Rand homöomorph zur $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre ist.

Sowohl die n -Zelle als auch die verallgemeinerte Zelle spielen im Rahmen der Beweisführung mathematischer Theorien eine zentrale Rolle [94], jedoch steht ihr Einsatz in der algorithmischen Geometrie noch in den Anfängen.

Häufig bestehen die betrachteten Modelle nicht nur aus einer Zelle, sondern aus einer ganzen Menge von Zellen, die untereinander in Beziehung stehen. Dem Wunsch einer Strukturierung solcher Mengen von Zellen wird durch Zellkomplexe Rechnung getragen.

3.3. Euklidischer Komplex

Betrachtet man im Rahmen der Bauinformatik nicht nur ein Objekt, sondern eine Ansammlung solcher, so wird im allgemeinen von einer Menge von Objekten gesprochen. Werden zusätzliche Bedingungen an eine solche Zusammenfassung gestellt, so wird von einem Komplex gesprochen. Sind diese wohldefinierten zusammengefaßten Bestandteile Zellen in der einen oder anderen Ausprägung, so wird von Zellkomplexen gesprochen. Ausgehend von den verschiedenen Verallgemeinerungsstufen bei der Definition von Zellen ist es naheliegend, diese bei der Definition eines Zellkomplexes heranzuziehen. Ausgehend von der Definition des konvexen Polyeders spricht man vom euklidischen Komplex.

DEFINITION 3.3.1. Ein **euklidischer Komplex** K ist eine nichtleere höchstens abzählbare Menge von konvexen Zellen eines euklidischen Raumes beliebiger endlicher Dimension ($K = \bigcup \{ \sigma : \sigma \text{ ist eine konvexe Zelle} \}$) mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist $\sigma \in K$ und τ eine Seite von σ ($\tau < \sigma$), so ist $\tau \in K$.
2. Sind σ und τ Zellen in K , dann ist $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset$.
3. Jeder Punkt einer Zelle aus K besitzt eine Umgebung, die mit nur endlich vielen Zellen von K gemeinsame Punkte hat.

Eine zur Bedingung 2 äquivalente Formulierung lautet: Der Durchschnitt zweier Zellen ist leer oder eine gemeinsame Facette beider Zellen. Betrachtet man das erste Beispiel in der Abbildung 3.3.1, so ist der Durchschnitt des Inneren von A und B leer jedoch nicht der Durchschnitt des Inneren der beiden Facetten $\overline{23}$ und $\overline{64}$. Die zweite Komposition (in Abb. 3.3.1) von unendlich vielen Zellen erfüllt zwar die Bedingungen 1 und 2, jedoch nicht die dritte.

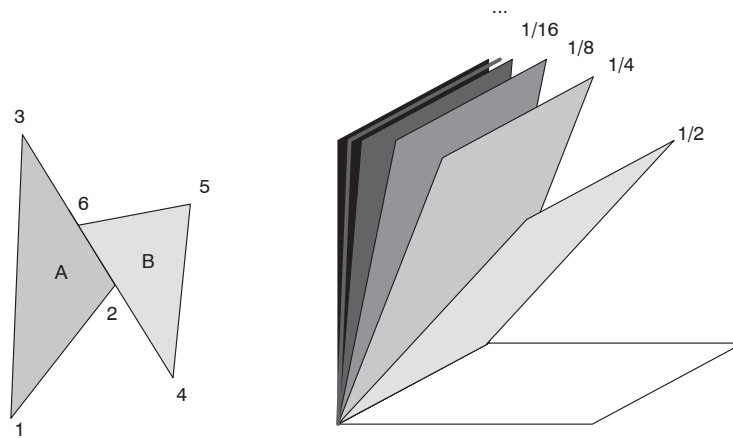


ABBILDUNG 3.3.1. Kompositionen von konvexen Zellen, die keine euklidischen Komplexe sind

Betrachtet man an Stelle beliebiger konvexer Zellen das Simplex, so ergibt sich auf natürliche Weise die Definition eines **Simplizialkomplexes**.

3.3.1. Simplizialkomplex.

Zur Beschreibung von Triangulationen sowie struktureller Probleme ist es in der Regel nicht ausreichend, einzelne Simplexe zu betrachten, sondern es müssen diese in ihrer Abhängigkeit untereinander erfasst werden. Hierzu werden die Simplexe als Menge betrachtet. Die Nachbarschaftsbeziehungen der Simplexe untereinander können vorteilhaft in einem Graph mit den Simplexen als Knoten und den nachbarschaftlichen Verbindungen als Kanten abgelegt werden (Abb. 3.3.2).

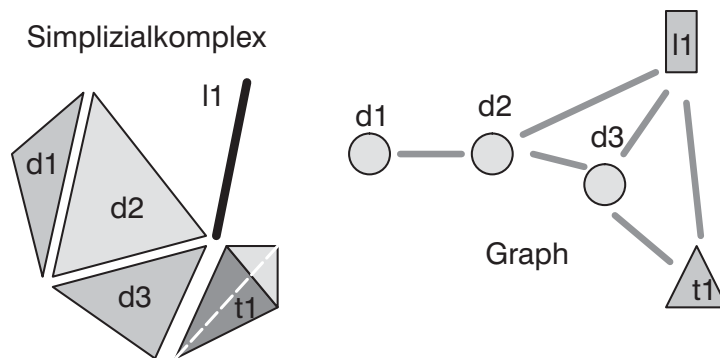


ABBILDUNG 3.3.2. Simplizialkomplex mit zugehörigem Inzidenzgraphen

Insbesondere die rechnergestützte geometrische Modellierung erfordert die Speicherung und Manipulation von Zellzerlegungen. Als Grundlage hierfür ist es naheliegend, die Theorie der Graphen (Kap. 2.10) zu Hilfe zu nehmen. Ein Graph ist eine kombinatorische Struktur, die von Knoten gebildet wird, die durch Relationen miteinander verbunden sind.

3.4. Zellkomplexe

Als Verallgemeinerung einer konvexen Zelle wurde in Abschn. 3.2 die topologische Zelle eingeführt, die homöomorph zu einer konvexen Zelle sein mußte. Nutzt man diese Verallgemeinerung, so kommt man zur Definition des topologischen Komplexes.

DEFINITION 3.4.1. Ein Gebilde heißt **topologischer Komplex**, wenn er homöomorph zu einem euklidischen Komplex ist.

Die Stärken des topologischen Komplexes bei der Modellierung geometrischer Gebilde liegen in seiner engen Verwandtschaft zum euklidischen Komplex und zum konvexen Polyeder.

Die Definition eines Zellkomplexes, wie sie in [156] eingeführt und in [106] zur Modellierung in CAD-Systemen verwendet wurde, ordnet sich an dieser Stelle als nächste Abstraktionsstufe ein.

DEFINITION. Ein **Zellkomplex** K ist ein in Zellen zerlegter topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Punkt von K gehört genau einer Zelle an.
2. Zu jeder n -Zelle kommt man zu folgender σ von K gibt es eine stetige Abbildung f derart, daß die offene Kugel D^n topologisch auf die n -Zelle σ abgebildet wird und daß der Rand der Zelle ($f(S^{p-1})$ - das Bild der Sphäre) für $p > 0$ in der Vereinigung endlich vieler Zellen von K mit kleinerer Dimension als p enthalten ist.
3. Eine Teilmenge von K ist abgeschlossen, wenn ihr Durchschnitt mit der abgeschlossenen Hülle einer jeden Zelle jeweils abgeschlossen ist.

Verwendet man an dieser Stelle nun die Definition 3.2.2 der n -Zelle, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird, so reduziert sich die Definition eines Zellkomplexes auf eine ganz analoge Form, wie in der Definition 3.3.1 des euklidischen Komplexes.

DEFINITION 3.4.2. Ein **Zellkomplex** K ist eine nichtleere höchstens abzählbare Menge von n -Zellen ($K = \bigcup \{ \sigma : \sigma \text{ ist eine } n\text{-Zelle} \}$) mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist $\sigma \in K$ und τ eine Facette von σ ($\tau < \sigma$), so ist $\tau \in K$.
2. Sind σ und τ Zellen in K , dann ist $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset$.
3. Jeder Punkt einer Zelle aus K besitzt eine Umgebung, die mit nur endlich vielen Zellen von K gemeinsame Punkte hat.

Diese Vorgehensweise legt es nun nahe, ganz von der euklidisch-geometrischen Natur der Zellen abzusehen und eine Theorie der abstrakten Komplexe zu formulieren.

DEFINITION. Es sei M eine beliebige Menge. Auf M sei eine Relation zwischen ihren Elementen gegeben, die mit $x < y$ bezeichnet wird. Jedem $x \in M$ sei eine nichtnegative ganze Zahl $\text{dim}(x)$ zugeordnet. Es seien folgende Axiome erfüllt:

1. Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$. (Transitivität)
2. Aus $x < y$ folgt $\dim(x) < \dim(y)$. (Monotonie)
3. Zu jedem Element x gibt es nur endlich viele Elemente y mit $y < x$. (Endlichkeit)

Dann heißt M ein **abstrakter Komplex**. Die **Dimension** von M ergibt sich aus $\max \{ \dim(x) : \forall x \in M \}$.

3.5. Körper- und Netzmodellierung

Die Zelltheorie und speziell der Bereich der konvexen Zellen und euklidischen Zellkomplexe bildet die Basis für Körper-, Netz- und Berechnungsmodelle im konstruktiven Ingenieurwesen. Die Geometrie und Topologie von Körpern findet ihre Beschreibung im Rahmen der Körpermodellierung. Sie ist ein wesentlicher Teil des computergestützten Designs, das durch die zunehmende Anwendung von CAD-Systemen an Bedeutung gewinnt (Abb. 3.5.1) und ein wichtiger Bestandteil der Bauinformatik ist. In Abhängigkeit

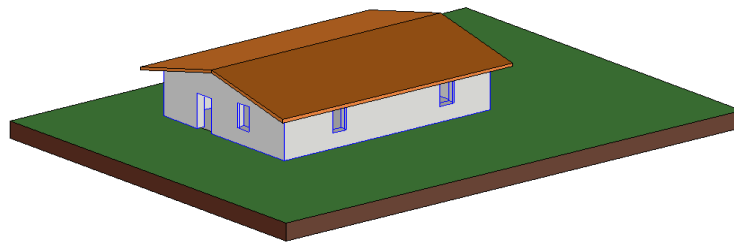


ABBILDUNG 3.5.1. CAD-Modell eines Hauses

von den zugrundeliegenden Datenstrukturen werden unterschiedliche Modellvorstellungen herangezogen. Die drei Modelldatenstrukturen (Abb. 3.5.2), die in heutigen Körpermodellierern überwiegen, sind die konstruktiven Körpermodellierer (*constructive solid geometry* - CSG), die Darstellung über die Oberfläche des Körpers (*boundary representation* - BRep) und Decompositions-Modelle, die im weiteren auch als Zellzerlegung bezeichnet werden.

Ein CSG-Modell ist ein Binärbaum mit Grundformen (Primitive) und Operationen. Die Primitive sind die Blätter des Baumes, die Knoten sind spezielle Mengenoperationen und die Wurzel das fertige Modell. Die CSG-Primitive sind allgemeine geschlossenen Punktmengen, wie z.B. Quader, Kugel, Zylinder. Die Operationen werden in reguläre Mengenoperationen und Bewegungsoperationen unterschieden. Die Regularisierung der Mengenoperation stellt sicher, daß bei allen Mengenoperationen wieder dreidimensionale Körper bzw. die leere Menge entstehen.

Die zweite wichtige Ausprägung von Körpermodellierern stellt die Boundary Representation (BRep) dar, bei der die Berandung eines Objektes explizit beschrieben wird. Typischerweise stellen Flächen die Ränder eines Volumen, Kanten die Ränder einer Fläche und Knoten die der Kante dar. Für BRep-Datenstrukturen ist die Trennung zwischen topologischen und geometrischen Informationen charakteristisch. Nur durch die korrekte

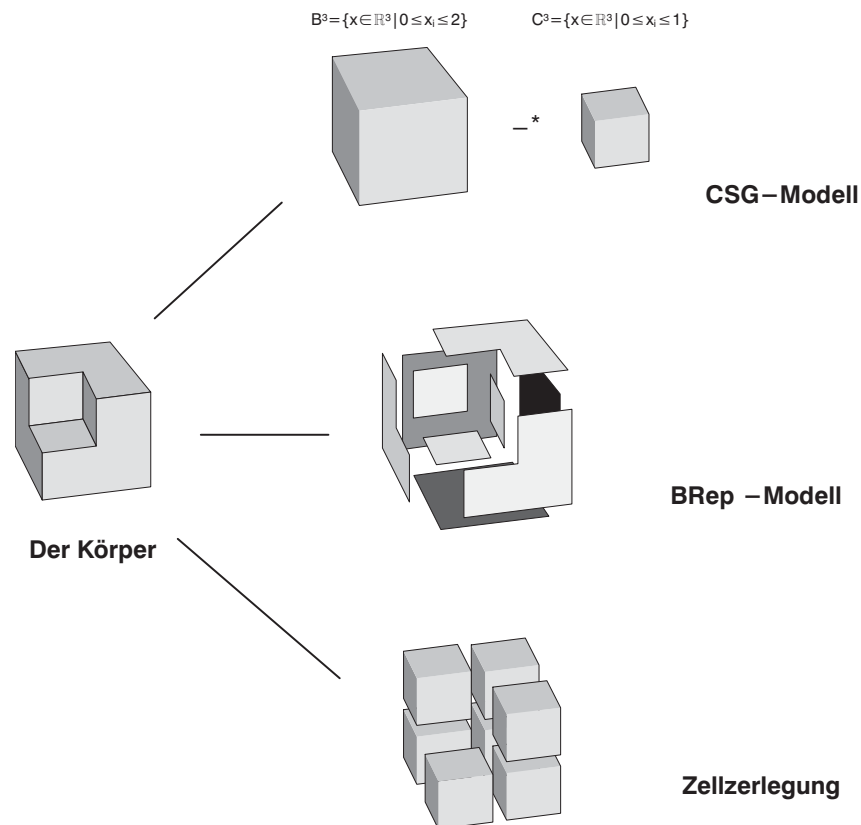


ABBILDUNG 3.5.2. Körpermodellierer

Modellierung von Nachbarschaften der Randelemente kann eine korrekte Modellierung des geometrischen Objektes realisiert werden.

Bei der Modellierung durch Dekomposition wird ein Körper in Zellen mit einfacher topologischer und oft auch geometrischer Struktur unterteilt. Diese Herangehensweise entspricht in vielen Dingen dem natürlichen Wachstum aber auch dem Prozeß des Wachsens eines Bauwerkes.

Ein zweiter großer Einsatzbereich von Zellen und Zellkomplexen bilden geographische Informationssysteme. Die Abstraktion geographischer Gegebenheiten führt zu sehr unterschiedlich dimensional geometrischen Objekten. So werden Flurstücke, Gebäude, Seen usw. als Flächen abstrahiert, wohingegen Straßen, Kanäle und Rohrleitungen als Linienelemente vereinfacht werden. Sowohl beim Übergang zu Geländemodellen als auch bei der Verallgemeinerung zu Umweltinformationssystemen besteht immer mehr die Notwendigkeit, 3-dimensionale Objekte und diese zusätzlich mit zeitlichen Informationen zu modellieren. Digitale Geländemodelle (DGM) entstehen, wenn Höheninformationen der Erdoberfläche erfasst, gespeichert und ausgewertet werden. Grundlage sowohl für die Visualisierung als auch für die weitere Nutzung digitaler Geländemodelle bilden Zellen und

Zellzerlegungen in der einen oder anderen Form. Hierzu gehören Dreiecksvermaschungen (TIN - Triangular Irregular Network) oder regelmäßige Gitter (GRID), die die Basis für Interpolations- und Approximationsalgorithmen bilden. Insbesondere sei hier die Methode der Finiten Elemente genannt, die sowohl als Interpolationsmethode als auch zur Approximation partieller Differentialgleichungen eingesetzt wird. Besonders die Notwendigkeit der engen Verbindung von Geometriemodell und numerischer Simulation führt zu einer einheitlichen Modellbildung mit Zellen.

Gebietszerlegungen

Zur Darstellung eines Gebietskontinuums mittels Computer ist es häufig notwendig, neben der Charakterisierung der Ausdehnung in Beschreibung eines Randes, auch eine Charakterisierung des Gebietsinneren vorzunehmen. Nur in seltenen Fällen ist dies durch analytische Funktionen möglich. Dies führt häufig zur Anwendung der kombinatorischen Interpolation. Die Charakterisierung erfolgt dann durch eine Zerlegung des Gebietes in Teilgebiete, für die eine analytische Beschreibung möglich ist. Ausgehend von einer diskreten Punktmenge zur Beschreibung von Eigenschaften wird über Algorithmen und Vorschriften auf das gesamte Gebietskontinuum geschlossen. Typische Vertreter solcher Vorschriften sind globale Polynominterpolationen und das Zusammensetzen von lokalen Beschreibungen.

Bereits im Zusammenhang mit der allgemeinen Mengentheorie wird von **Zerlegungen** gesprochen, wenn es paarweise disjunkte Mengen M_1, \dots, M_n gibt, deren Vereinigung die gesamte Menge M ergibt: $M_1 \cup \dots \cup M_n = M$. Wird auf die paarweise Disjunktheit verzichtet, so spricht man von einer **Überdeckung**.

Die Disjunktheit der Mengen einer Zerlegung ist eine sehr starke Forderung. Betrachtet man beispielsweise ein Intervall auf der reellen Zahlengeraden, so kommt man schnell in die Konfliktsituation, welche der Intervalle, aus denen die Zerlegung besteht, offen bzw. abgeschlossen sein sollen. Dies führt beim Übergang zum 2- und 3-dimensionalen euklidischen Raum zu einer willkürlichen Festlegung und im allgemeinen zu einer nichtreproduzierbaren Zerlegung. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit immer von der Regel ausgegangen, daß bei einer Gebietszerlegung das Grundgebiet in mehrere kleinere abgeschlossene Teilgebiete zerlegt wird, wobei das Innere dieser Teilgebiete disjunkt ist. Genau genommen ist diese Vorgehensweise keine Zerlegung, sondern eine Überdeckung, hat aber den Vorteil, daß sich diese Festlegung in die Theorie der Zellen und Zellzerlegungen sowie in ihrer Anwendung in der Theorie der Finiten Elemente und Finiten Volumen einordnet.

DEFINITION 4.0.1. Es sei \mathcal{T} ein Topologischer Raum. Eine **Zerlegung** eines abgeschlossenen Gebietes $\overline{\Omega} \subseteq \mathcal{T}$ ist eine Region $\tilde{\Omega} \subseteq \mathcal{T}$, welche die Vereinigung einer endlichen Anzahl E von abgeschlossenen beschränkten Unterbereichen $\overline{\Omega}_e \subseteq \mathcal{T}$ darstellt. Die Bereiche $\overline{\Omega}_e$ genügen den folgenden Bedingungen:

- Jedes $\overline{\Omega}_e$ ist der Abschluß einer offenen Region Ω_e : $\overline{\Omega}_e = \Omega_e \cup \partial\Omega_e$ für alle $e = 1, 2, \dots, E$.
- Die offenen Regionen Ω_e sind paarweise disjunkt: $\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$ für $e \neq f$ und
- $\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \overline{\Omega}_e$.

Mit $\partial\Omega_e$ wird der Rand von Ω_e bezeichnet.

Verallgemeinert man den Begriff des geometrischen Teilgebietes im Rahmen von Interpolations- und Approximationsaufgaben, so führt dies auf Zerlegungen von Ansatzräumen durch Unterräume, wobei wieder zwischen direkten und überlappenden Aufteilungen unterschieden wird. Auf diese Aspekte soll im Abschnitt 5.2 eingegangen werden.

Die Komposition einer globalen Gebietsbeschreibung durch lokale Komponenten macht eine Beschreibung von Nachbarschaften und Einflußgebieten notwendig. Diese allgemein gehaltene Formulierung soll im weiteren in Form von Gebietszerlegungen charakterisiert werden.

4.1. Nachbarschaften

Der Begriff der Nachbarschaft hat in der Umgangssprache zwei wesentliche Festlegungen. Zum einen versteht man unter einem Nachbarn jemanden, der mit dem Beobachter eine gemeinsame Grenze hat, zum anderen sagt man auch, zwei Gegenstände seien benachbart, wenn ihr Abstand in einem gewissen Sinne minimal ist. Man kann sich vorstellen, daß Nachbarn nicht gleich Nachbarn sein müssen. Im ersten Fall hängt die Nachbarschaft von einer Gebietszerlegung (z.B. Grundstücke) und im zweiten Fall von der Festlegung der Minimalität des Abstandes ab.

Wie in der Umgangssprache gibt es auch bei der mathematischen Definition unterschiedliche Herangehensweisen. Die eine basiert auf der Definition von Mengensystemen (entspricht dem Grundstücksbeispiel) und die zweite auf der Definition der Metrik (Abstand). Folgt man den Argumentationen bei der Einführung der verschiedenen Räume, so ist zu erwarten, daß die topologische Definition die allgemeinste ist. Bereits bei der Einführung topologischer Räume wurde darauf hingewiesen, daß mit der Topologie so etwas wie Nähe eingeführt wurde.

DEFINITION 4.1.1. Zwei Teilmengen A, B des topologischen Raumes M , deren offener Kern (Inneres) nicht leer ist, heißen **benachbart**, wenn gilt:

- $\text{int}(A) \neq \emptyset$ und $\text{int}(B) \neq \emptyset$,
- $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset$,
- $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Um eine Nachbarschaft in Bezug auf einen Abstandsbegriff definieren zu können, verwendet man die metrik-induzierte Topologie und erhält auf natürliche Weise eine metrik-definierte Nachbarschaft. An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, daß von einer Nachbarschaft von Mengen gesprochen wird und nicht von einzelnen Punkten.

Einen anderen Zugang zum Begriff der Nachbarschaft erhält man durch Betrachtungen bezüglich einer gegebenen Objektmenge S . Ordnet man jedem Objekt p aus S eine Menge $VR(p)$ derjenigen Punkte des Raumes zu, für die der von p ausgeübte Einfluß am stärksten ist, so erhält man eine Zerlegung des Raumes.

Die besondere Bedeutung dieses Ansatzes liegt in seiner Allgemeinheit. Die verwendeten Begriffe Raum, Objekt und Einfluß sind zunächst variabel. Es ist daher nicht verwunderlich, daß dieser Ansatz in der Wissenschaft unter unterschiedlichen Bezeichnungen Eingang gefunden hat.

In der Mathematik haben erst DIRICHLET [58] und dann VORONOI [177] bei ihren Arbeiten über quadratische Formen diesen Ansatz systematisch untersucht. In den nächsten Abschnitten werden Voronoi-Zerlegungen im Vordergrund der Betrachtungen stehen.

4.2. Voronoi-Diagramm

Die „Mutter aller Abstandsprobleme“ ist das sogenannte Postamtproblem. Hierbei sind n Postämter in einer Stadt (oder Punkte in der Ebene) gegeben. Die Aufgabe besteht darin, die Punkte so in einer Datenstruktur zu speichern, daß für jede beliebige Wohnadresse (oder jeden Punkt der Ebene) das nächste Postamt schnell bestimmt werden kann. Offensichtlich kann man für gegebene Wohnadressen das nächste Postamt leicht in der Zeit $O(n)$ bestimmen, indem man die Abstände von der Wohnadresse zu allen Postämtern bestimmt. Wenn man aber mehrere Anfragen dieser Art zu verarbeiten hat, lohnt es sich, einen gewissen Vorverarbeitungsaufwand zu treiben, um die Anfragen anschließend schneller beantworten zu können. Für das Postamtproblem hat sich das sogenannte Voronoi-Diagramm als geeignete Datenstruktur herausgebildet (Abb. 4.2.1). Problemstellungen, die mit Hilfe von Abständen formuliert werden, spielen nicht nur im Bereich der Geometrie eine wichtige Rolle, vielmehr stellen sie häufig die Grundlage für Optimierungs-, Interpolations- und Approximationsaufgaben dar. Voronoi-Diagramme finden in verschiedenen Gebieten wie Geographie unter dem Namen Thiessen-Polygon, in der Biologie unter Dirichlet-Diagramm sowie in der Physik und Archäologie ihren Einsatz.

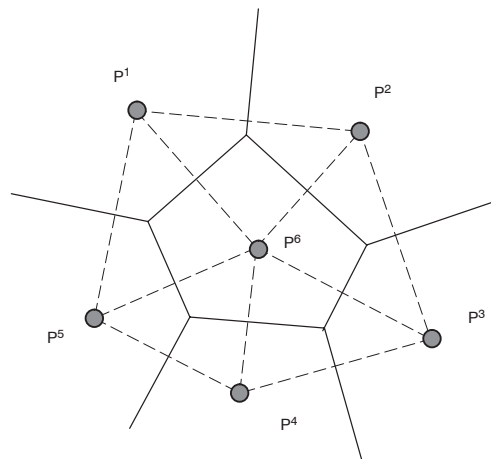


ABBILDUNG 4.2.1. Klassisches Voronoi-Diagramm

Auf die allgemeine Definition von Voronoi-Regionen, -Zerlegungen und -Diagrammen wurde im Kapitel 2.4 über metrische Räume schon eingegangen.

An dieser Stelle sei eine kurze Wiederholung der grundlegenden Definitionen erlaubt. Gegeben sei eine Punktmenge $P = \{p^1, p^2, \dots, p^N\}$ eines metrischen Raumes, die auch als **Konfiguration** bezeichnet wird. Unter einer **Voronoi-Region** eines Punktes p^k versteht man die Menge

$$VR(p^k) := \{p \in M : d(p, p^k) \leq d(p, p^i) \quad \forall i \neq k\}.$$

Die **Voronoi-Zerlegung** $VD(P)$ ist dann die Menge aller Voronoi-Regionen einer Konfiguration. Unter Einbeziehung einer solchen Zerlegung des metrischen Raumes kann nun eine Nachbarschaft definiert werden.

DEFINITION 4.2.1. Sei P eine Konfiguration und $VD(P)$ die Voronoi-Zerlegung über P . Für einen ausgezeichneten Punkt $p^k \in P$ heißt

$$VN(p^k) := \{p^i \in P : i \neq k, VR(p^i) \cap VR(p^k) \neq \emptyset\}$$

die Menge der **Voronoi-Nachbarn** von p^k . Eine Voronoi-Nachbarschaft wird alternativ als Delaunay-Nachbarschaft bezeichnet.

In diesem Abschnitt soll der Schwerpunkt auf weiteren Eigenschaften von Voronoi-Zerlegungen liegen und auf Erweiterungen eingegangen werden, die im Rahmen von Interpolationsalgorithmen von fundamentaler Bedeutung sind. Erweiterungen von Voronoi-Zerlegungen sind in verschiedene Richtungen möglich, denen eine Vielzahl von Artikeln in der Fachliteratur gewidmet sind (siehe hierzu [17] und [20]). So läßt sich z.B. der Begriff Voronoi-„Punktmenge“ durch „eine Menge von Liniensegmenten“ ersetzen. Im Rahmen dieser Arbeit soll etwas genauer auf die Verallgemeinerung des Nachbarschaftsbegriffes eingegangen werden. Um praktische Problemstellungen zu realisieren, wird man sich häufig auf den euklidischen Raum beschränken. Aus diesem Grund wird zum Abschluß noch kurz auf einige Aspekte der Konstruktion von Voronoi-Diagrammen in euklidischen Räumen eingegangen.

4.2.1. Die Voronoi-Regionen als Basis einer Topologie.

Eine Voronoi-Zerlegung bezüglich einer gegebenen Punktmenge $P = \{p^1, p^2, \dots, p^N\}$ kann unter Berücksichtigung einiger Besonderheiten als Basis (Def. 2.3.9) einer topologischen Struktur aufgefaßt werden.

THEOREM. *Das Mengensystem $VB(P) := \{\emptyset, M, \text{Int}(VR(p^1)), \dots, \text{Int}(VR(p^N))\} \subset \mathcal{P}(M)$ ist Basis einer Topologie, der Voronoi-Topologie $VT(P)$. Hierbei gelten folgende Bezeichnungen:*

$\partial VR(p^i) := \bigcup_{k \neq i} VR(p^i) \cap VR(p^k)$ wird Grenze der Voronoi-Region genannt,

$\text{Int}(VR(p^i)) := VR(p^i) \setminus \partial VR(p^i)$ wird als das Innere einer Voronoi-Region bezeichnet.

BEWEIS. Es muß geprüft werden, ob $VT(P)$ eine Topologie ist. Offenbar gehören die leere Menge \emptyset und der gesamte Raum M zur Topologie. Betrachtet man den Durchschnitt des Inneren von je zwei ungleichen Voronoi-Regionen, so ist dieser immer leer, d.h. daß bei den Durchschnittsoperationen nur Mengen der Basis entstehen. Es sind also nur noch alle Vereinigungen von Mengen der Basis zu untersuchen. Die Anzahl der entstehenden

neuen Mengen ist endlich und diese sind im topologischen Sinne nicht zusammenhängend. Womit alle Eigenschaften einer Topologie auf M erfüllt sind. \square

4.2.2. Voronoi-Diagramme höherer Ordnung.

Eine Erweiterung erfahren Voronoi-Diagramme durch die Einführung einer Ordnung o . erinnert man sich daran, daß die klassische Voronoi-Zerlegung bezüglich einer endlichen Punktmenge $P = \{p^1, p^2, \dots, p^N\}$ in einem metrischen Raum, die Aufteilung dieses Raumes derart ist, daß jede Region der Ort von Punkten ist, die näher zu *einem* Bezugspunkt p^i liegt als zu allen anderen Bezugspunkten, so spricht man im weiteren von einem Voronoi-Diagramm der Ordnung 1. Man kann sich nun die Frage stellen, wie eine Zerlegung aussieht, bei der die zu einer Menge zusammengefaßten Punkte $q \in M$ zu *mehreren* Bezugspunkten p^i in Nachbarschaft stehen. Dieser Tatsache kann man durch eine Verallgemeinerung der Voronoi-Region Rechnung tragen. Im folgenden werden zur Veranschaulichung von Eigenschaften ohne Beschränkung der Allgemeinheit Beispiele in der Ebene herangezogen.

DEFINITION 4.2.2. Ein **Voronoi-Diagramm der Ordnung** k ist eine Region, die durch ein geordnetes k -Tupel aus der Menge der Voronoi-Punkte $P = \{p^1, p^2, \dots, p^N\}$ definiert wird:

(4.2.1)

$$VR(p^{i_1}, \dots, p^{i_k}) := \{q \in M : d(q, p^{i_1}) \leq \dots \leq d(q, p^{i_k}) \leq d(q, p^m) \forall m \notin \{i_1, \dots, i_k\}\}.$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird immer das geordnete k -Tupel betrachtet. Im Gegensatz hierzu findet man in der Literatur auch häufig Definitionen, bei denen von keinem geordneten Tupel ausgegangen wird ([19]). Diese Voronoi-Diagramme höherer Ordnung bezüglich der ungeordneten Punktmenge (Abb. 4.2.2) sind dann die Vereinigung aller Voronoi-Diagramme geordneter Tupel (alle Permutation der Punkte der Punktmenge).

$$VR(\{p^{i_1}, p^{i_2}, \dots, p^{i_k}\}) := \bigcup_{\text{geordneten Paare}} VR(q^1, q^2, \dots, q^k)$$

Durch eine Umformulierung der Definition für Voronoi-Regionen höherer Ordnung kommt man zu folgendem Zusammenhang:

$$VR(p^{i_1}, \dots, p^{i_k}) := \{q \in VR(p^{i_2}, \dots, p^{i_k}) \mid d(q, p^{i_1}) \leq d(q, p^m) \forall m = i_2, \dots, i_k\}.$$

Hieraus erhält man die folgenden Zusammenhänge:

$$VR(p^i) = \bigcup_{k \neq i} VR(p^i, p^k)$$

und

$$VR(p^i, p^j) = \bigcup_{k \neq i, j} VR(p^i, p^j, p^k)$$

und so weiter. Man kann auch sagen, daß ein Voronoi-Diagramm einer höheren Ordnung eine Verfeinerung eines Voronoi-Diagramms niedriger Ordnung darstellt. Dieser Sachverhalt wird bei der Konstruktion von Voronoi-Diagrammen höherer Ordnung herangezogen.

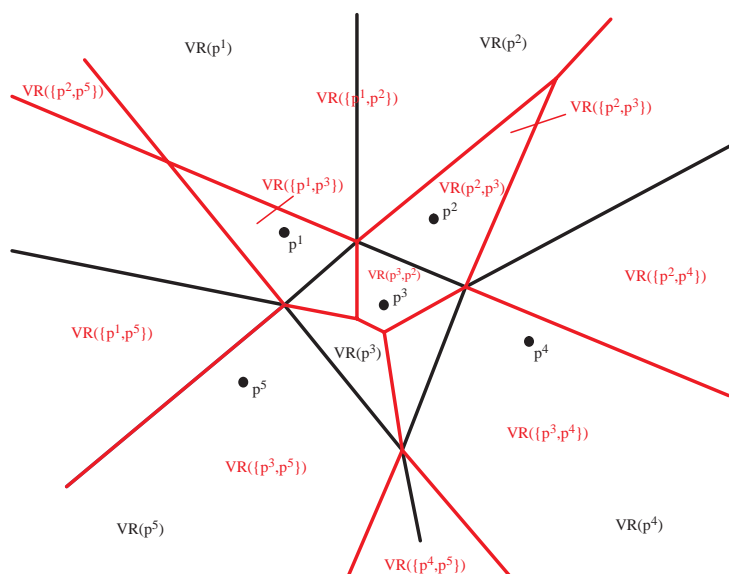


ABBILDUNG 4.2.2. Voronoi-Diagramm der Ordnung 1 und 2

Für die Konstruktion von Voronoi-Diagrammen höherer Ordnung ist die Beziehung zwischen $VD_k(S)$ und $VD_{k+1}(S)$ für $k = \{1, \dots, N-1\}$ wichtig. Ist diese Beziehung bekannt, so lassen sich die Voronoi-Diagramme schrittweise konstruieren.

Betrachtet man noch einmal die Definition einer Voronoi-Region erster Ordnung

$$VR(p^k) := \{p \in M : d(p, p^k) \leq d(p, p^i) \quad \forall i \neq k\},$$

so ist die Konstruktion von $VD_{k+1}(S)$ offensichtlich die Aufteilung einer jeden Region von $VD_k(S)$ in Teile von Regionen von $VD_{k+1}(S)$. Dies ist gleichbedeutend mit dem Schnitt einer jeden Region $V(T)$ von $VD_k(S)$ mit dem klassischen Voronoi-Diagramm $VD_1(S \setminus T)$. In diesem Fall ist es nicht erforderlich, das ganze $VD_1(S \setminus T)$ zu bestimmen. Es genügt, den Teil zu berechnen, der im Inneren von $V(T)$ liegt.

Werden, wie schon oben erwähnt, die Voronoi-Regionen höherer Ordnung bezüglich der ungeordneten Tupel von Bezugspunkten betrachtet und mit diesen eine Zerlegung des Gebietes durchgeführt, so kann man die nächsten k Nachbarn eines Punktes q finden, indem man die Voronoi-Region sucht, in der sich q befindet. Besonderes Interesse gebührt der Situation $k = N-1$. In diesem Fall entsteht das Voronoi-Diagramm des entferntesten Punktes, d.h. der Ort von Punkten, die am weitesten von einem gegebenen Punkt q entfernt sind. Ausgehend von einer 5-elementigen Menge von Voronoi-Punkten ist in der Abbildung 4.2.3 das Voronoi-Diagramm der Ordnung 4 zu sehen. Betrachtet man zum Beispiel die Voronoi-Region $VR(\{p^2, p^3, p^4, p^5\})$, dann ist zu erkennen, daß diese Region den Ort von Punkten darstellt, die vom Punkt p^1 am weitesten entfernt sind.

Ein wesentlicher Unterschied zu Voronoi-Diagrammen erster Ordnung ist die Tatsache, daß Voronoi-Diagramme höherer Ordnung Voronoi-Regionen haben können, die keine der Bezugspunkte enthalten bzw. auch leer sein können. In Abbildung 4.2.3 ist zu sehen,

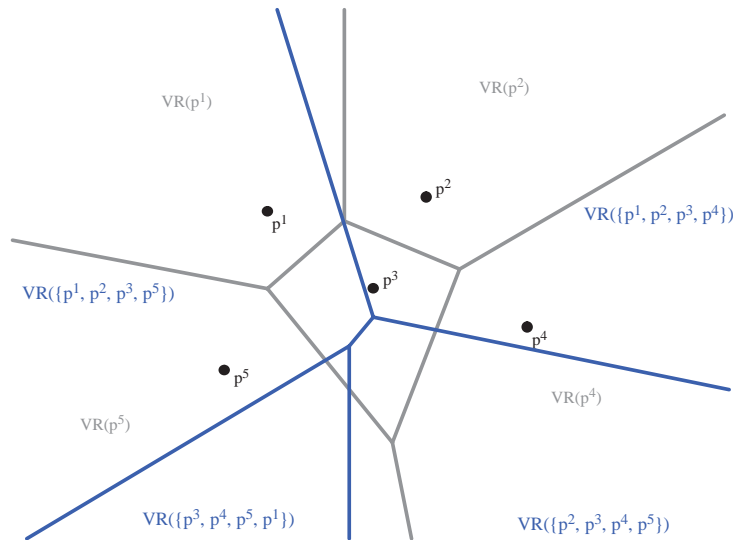


ABBILDUNG 4.2.3. Voronoi-Diagramm des entferntesten Punktes

daß die Voronoi-Region $VR(\{p^2, p^3, p^4, p^5\})$ und $VR(\{p^1, p^3, p^4, p^5\})$ keine Bezugspunkte enthalten.

Aus der Menge der Voronoi-Diagramme höherer Ordnung kommt den Diagrammen der Ordnung 2 eine besondere Bedeutung bei der Festlegung von natürlichen Nachbarschaftskordinaten (Abschn. 5.6.4), wie sie von Sibson [166] eingeführt wurden, zu. Das Voronoi-Diagramm zweiter Ordnung einer Menge von N Punkten ist eine Zerlegung (eher eine Überdeckung) in Zellen VR_{ij} , wobei jede Region im Zusammenhang mit je zwei Bezugspunkten p^i und p^j steht. Die Voronoi-Regionen zweiter Ordnung VR_{ij} mit $(i \neq j)$ sind genau dann nicht leer, wenn die Bezugspunkte p^i und p^j benachbart sind. Die Voronoi-Zelle zweiter Ordnung ist wie folgt definiert: $VR(p^i, p^j) := \{q : d(q, p^i) \leq d(q, p^j) \leq d(q, p^k) \forall k \neq i, j\}$.

4.2.3. Konstruktion von Voronoi-Zerlegungen im euklidischen Raum.

Die Konstruktion von Voronoi-Zerlegungen ist für den Fall einer beliebigen Metrik oder Abstandsfunktion ein schwieriges Problem. Im Gegensatz hierzu gestaltet sich eine Konstruktion im euklidischen Raum einfacher. Der euklidische Raum ist gekennzeichnet durch seine einfache Struktur, zum einen ist er ein linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen und zum anderen sind seine weiteren Eigenschaften, wie Betrag, Metrik und Topologie, durch das euklidische Skalarprodukt induziert. Die Voronoi-Regionen im euklidischen Raum sind konvexe Raumstücke. Sie können also beschrieben werden als Durchschnitt endlich vieler Halbräume. Die Konstruktion der Voronoi-Zerlegung wird im euklidischen

Raum \mathfrak{R}^n äquivalent zur Bestimmung eines konvexen Raumstückes im \mathfrak{R}^{n+1} . Die Idee hinter der folgenden Konstruktion liegt dabei in der Projektion auf einen Hyper-Paraboloiden, auf dem dann ein konvexes Polytop konstruiert wird.

Der Projektionsabbildung auf den Hyper-Paraboloiden U liegt dabei folgende Abbildungsvorschrift zugrunde:

$$(4.2.2) \quad (a_1, a_2, \dots, a_n) \longrightarrow \left(a_1, a_2, \dots, a_n, \sum_{i=1}^n a_i^2 \right).$$

Bei der Rückprojektion wird lediglich die letzte Koordinate x_{n+1} weggelassen.

$$(4.2.3) \quad \left(a_1, a_2, \dots, a_n, \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Als Folge dieser Projektion wird im weiteren unser betrachteter Raum \mathfrak{R}^n als Hyperebene mit $a_{n+1} = 0$ aufgefaßt. Für einen Punkt $p \in \mathfrak{R}^n$ sei l_p die vertikale Linie in \mathfrak{R}^{n+1} , die durch den Punkt p geht. Als nächstes wird eine Abbildung e definiert, die jedem gegebenen Punkt $p \in \mathfrak{R}^n$ eine Hyperebene $e(p)$ im \mathfrak{R}^{n+1} zuordnet. Die Hyperebene soll tangential am Hyper-Paraboloiden U im Punkt $(p_1, \dots, p_n, p_1^2 + \dots + p_n^2) \in \mathfrak{R}^{n+1}$ anliegen.

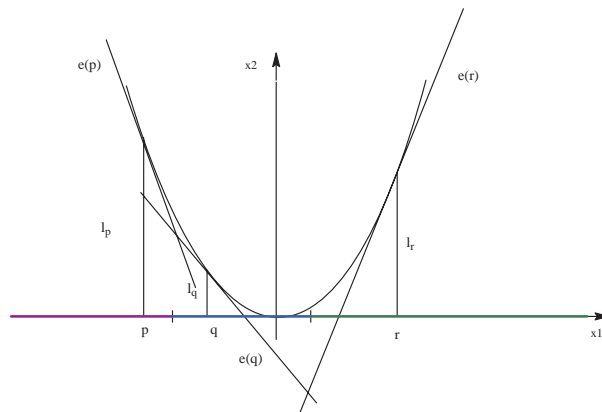


ABBILDUNG 4.2.4. Voronoi-Zerlegung im 1-dimensionalen Fall

In jedem transformierten Voronoi-Punkt wird nun die Tangentialebene konstruiert. Durch das Verschneiden dieser Tangentialebenen und Rücktransformation erhält man die Voronoi-Zerlegung des Raumes (Abb. 4.2.4). Eine typischer Einsatzbereich von Voronoi-Zerlegungen im euklidischen Raum ist die Planung von Funknetzen. Hierbei geht es darum, mit möglichst wenigen Sendeeinheiten ein möglichst großes Gebiet abzudecken.

4.2.4. Voronoi-Zerlegung bezüglich nichteuklidischer Metriken.

Neben der Erweiterung von Voronoi-Diagrammen bezüglich einer Ordnung haben sich weitere Erweiterungsrichtungen entwickelt. Voronoi-Diagramme wurden für andere Metriken und Halbmetriken definiert. Aus der Klasse der L_r -Metriken sei an dieser Stelle die

Manhattan-Metrik (der L_1 Abstand) betrachtet. Der Abstand zweier Punkte in dieser Metrik von Punkten im \mathfrak{R}^n ist definiert als

$$d_1(p, q) := \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$$

und kann als Summe von Teilstrecken parallel zu den Koordinatenachsen aufgefaßt werden.

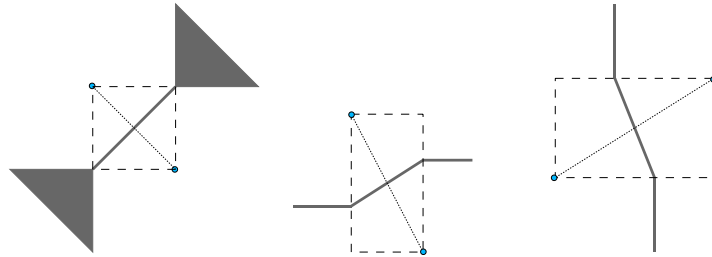


ABBILDUNG 4.2.5. Bisektion für die L_1 -Metrik

Wie man in der Abbildung 4.2.5 erkennen kann, ist für den allgemeinen Fall die Voronoi-Grenze für zwei Punkte in der L_1 -Metrik ein Polygon, bestehend aus drei Linienstücken. Haben die Punkte identische x - oder y -Koordinaten, so stimmt ihr L_1 -Bisektor mit dem euklidischen Bisektor überein. Ein gravierender Unterschied tritt aber bei der L_1 -Metrik auf. Sind beide Voronoi-Punkte diagonale Ecken eines Quadrates, so ist die Voronoi-Grenze kein Polygon mehr, sondern es entstehen Flächen, deren Punkte in der L_1 -Metrik den selben Abstand zu beiden Bezugspunkten besitzen.

4.2.5. Voronoi-Zerlegung bezüglich einer konvexen Abstandsfunktion.

Das Voronoi-Diagramm einer Menge S von n Punkten in der Ebene ist eine Zerlegung der Ebene in n Regionen, jede Voronoi-Region $VR(p^i)$ für p^i aus S enthält genau die Punkte, die näher zu p^i als zu irgend einem anderen Punkt in S sind. Wenn als Distanz von zwei Punkten die Länge der geraden Verbindung der Punkte genommen wird, dann haben wir das bekannte Voronoi-Diagramm unter der euklidischen Metrik.

Allgemeiner kann die Distanz von zwei Punkten durch eine konvexe Distanzfunktion d_C gemessen werden, wobei C eine kompakte, konvexe Menge ist (Abb. 4.2.6).

Ein Voronoi-Diagramm unter einer glatten, strikt konvexen Distanzfunktion d_C hat ähnliche Eigenschaften wie das unter der euklidischen Metrik. Falls eine konvexe Distanzfunktion nicht strikt konvex ist, dann ist ein Bisektor von zwei Punkten nicht unbedingt eine Kurve, er kann Flächen enthalten. Diese Besonderheit kann nur auftreten, falls die Verbindungslinie von zwei Punkten parallel zu einer Kante am Rand von C ist. In diesem Fall enthält der Bisektor eigentlich eine Fläche zwischen zwei zusammenstoßenden Strahlen.

Man kann dann vereinbaren, daß als Bisektor nur ein Strahl genommen wird, der in der Fläche liegt. Dadurch ist ein Bisektor unter einer konvexen Distanzfunktion immer eine Kurve, und das Voronoi-Diagramm ist eine vollständige Zerlegung der Ebene.

Zur Bestimmung der Entfernung zwischen zwei Punkten p und q wird üblicherweise die euklidische Abstandsfunktion herangezogen

$$d(p, q) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}.$$

Allgemeiner kann die Distanz von zwei Punkten durch eine konvexe Distanzfunktion d_C gemessen werden. Eine konvexe Distanzfunktion kann folgendermaßen definiert werden: Sei C eine kompakte, konvexe Menge, die den Nullpunkt im Innern enthält, dieser wird als das Zentrum bezeichnet. Um den Abstand von p nach q bezüglich C zu definieren, wird C um den Vektor p verschoben (Abb. 4.2.6). Der Strahl von p nach q schneidet den Rand der

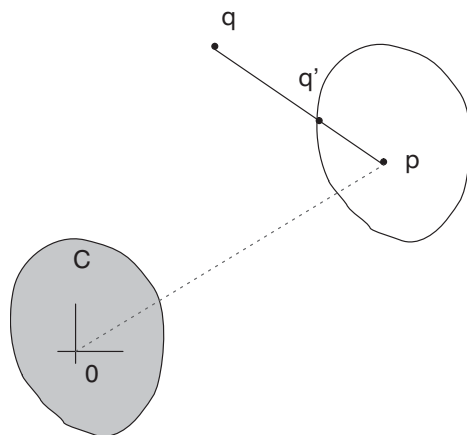


ABBILDUNG 4.2.6. Konvexe Abstandsfunktion in der Ebene

verschobenen konvexen Menge C in genau einem Punkt q' . Nun definiert man die konvexe Abstandsfunktion wie folgt:

$$d_C(p, q) := \frac{d(p, q)}{d(p, q')}.$$

Eine geometrische Interpretation besteht darin, diese Zahl als Faktor aufzufassen, um den das nach p verschobene C skaliert werden müßte, damit sein Rand den Punkt p enthält. Die Funktion d_C erfüllt $d_C(p, q) \geq 0$ und $d_C(p, q) = 0$ gilt genau dann, wenn $p = q$ ist. Die Dreiecksungleichung wird von d_C noch erfüllt:

$$d_C(p, q) \leq d_C(p, r) + d_C(r, q).$$

Die Symmetriebedingung $d_C(p, q) = d_C(q, p)$ gilt jedoch nur noch, wenn C in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch ist. In diesem Fall ist d_C sogar eine Metrik.

Eine konvexe Distanzfunktion heißt *glatt*, falls jeder Punkt auf dem Rand von C nur genau eine Stützgerade besitzt. Eine konvexe Distanzfunktion heißt *strikt konvex*, falls C keine Liniensegmente (gerade Stücke) im Rand enthält.

Natürlich kann man auch zu konvexen Distanzfunktionen Voronoi-Diagramme berechnen, worauf nicht weiter eingegangen wird.

4.2.6. Potenz-Diagramme.

Eine weitere Generalisierung erfahren die Voronoi-Diagramme durch sogenannte *Potenz-Diagramme*. Es wird im weiteren eine Konfiguration P von N Punkten in einem metrischen Raum M betrachtet. Angenommen wird, daß jeder Punkt in P ein ganz individuelles Gewicht $\omega(p^k)$ hat, welches eine gewisse Kapazität des Punktes beschreibt. Für einen beliebigen Punkt p^k ist die *Potenzfunktion* wie folgt definiert: $\text{pot}(x, p^k) := d^2(x, p^k) - \omega(p^k)$. Das *Potenz-Diagramm* ist dann genauso definiert wie ein Voronoi-Diagramm, mit dem Unterschied, daß nicht eine Metrik sondern eine Potenzfunktion zugrunde gelegt ist. Es wird sich zeigen, daß die Potenzfunktion beim Übergang von der Shepard-Interpolation zur Shepard-Approximation (Abschn. 5.6.1) sowie bei der statistischen Interpolation (Abschn. 5.7) eine zentrale Rolle spielt.

4.2.7. Weitere Verallgemeinerungen und Anwendungen.

Die Forschung im Bereich der Voronoi-Zerlegungen ist sehr breit gefächert und es kann im Rahmen dieser Arbeit nur auf einige noch interessierende Bereiche eingegangen werden. Die in den letzten Abschnitten behandelten Zerlegungen waren bestimmt durch eine Menge sogenannter Voronoi-Punkte. Die Definition der Voronoi-Zerlegung läßt sich aber auf andere geometrische Objekte ausdehnen. Besonders finden die Voronoi-Diagramme von Liniensegmenten eine wichtige Anwendung bei der Bewegungsplanung von Robotern. Diese und andere interessante Erweiterungen sind in [17] und [20] zu finden.

Bei der Vielzahl verschiedener Arten von Voronoi-Diagrammen stellt sich die Frage, nach ihren Gemeinsamkeiten und gemeinsamen strukturellen Merkmalen. Diese Überlegungen haben zur Einführung der abstrakten Voronoi-Diagramme geführt (siehe [98] und [101]).

Voronoi-Zerlegungen und deren Verallgemeinerungen bilden die Basis für eine Vielzahl von Finite Volumen Verfahren. Hierbei wird eine Voronoi-Region als Kontrollvolumen aufgefaßt. In Verbindung mit Dreiecks- und Vierecks-Netzen werden in jüngster Zeit auch Kontrollvolumen (Abb. 4.2.7) verwendet, die unter Einbeziehung der Schwerpunkte des zugrundeliegenden Netzes konstruiert werden (siehe [29]). Die so entstehenden Kontrollvolumen sind zwar keine konvexen Zellen mehr, ermöglichen aber eine optimale Kopplung zwischen Finiten Element Approximation und Finiten Element Methode.

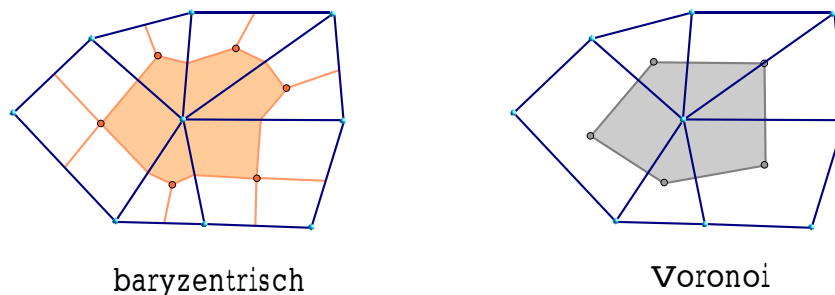


ABBILDUNG 4.2.7. Kontrollvolumen eines Finites Volumen Verfahrens

4.3. Zellzerlegung

Eine Zellzerlegung ist eine Darstellung von Gebilden wie Flächen und Körper als Zusammenschluß von Zellen. Eine derartige Zellzerlegung wird auch als geometrisches Modell bezeichnet.

Häufig finden Triangulierungen Anwendung, um eine gegebene Punktmenge zu charakterisieren. Unter den Triangulierungen einer Punktmenge sind die Delaunay-Triangulierungen ausgezeichnet durch ihre besondere Eigenschaft, eher benachbarte Punkte zu verbinden. Dies führt dazu, daß man zwei Sichtweisen betrachten muß. Zum einen kann eine Zellzerlegung unabhängig von einem Abstands begriff betrachtet werden und zum anderen unter Berücksichtigung eines solchen.

4.3.1. Delaunay-Triangulierung.

Eine allgemein gebräuchliche Methode zur Bestimmung einer Zellzerlegung bei vorgegebener Punktmenge der Ebene ist die Triangulierung. Bevor auf die Verallgemeinerung der Triangulation hin zu einer Simplicialzerlegung eingegangen wird, seien zunächst die Verhältnisse in der euklidischen Ebene genauer betrachtet. Im allgemeinen wird die Delaunay-Triangulierung als dualer Graph zur Voronoi-Zerlegung definiert. Eine Vielzahl von Fragestellungen und Problemen in n -dimensionalen Räumen können in der Ebene veranschaulicht werden. In der Abbildung 4.3.1 ist zu einer gegebenen Punktmenge die Voronoi-Zerlegung der Ebene dargestellt. Bezeichnet man den gemeinsamen Rand zweier Voronoi-Regionen $VR(p^i)$ und $VR(p^j)$ als **Voronoi-Kante** und den Schnittpunkt von mindestens zwei Voronoi-Kanten als **Voronoi-Knoten**, so kann man Voronoi-Knoten und -Kanten als einen ebenen Graphen (Def. 2.10.7) auffassen. Ein planarer Graph hatte die Eigenschaft, daß es zu ihm einen dualen Graphen gibt. Der duale Graph zum Voronoi-Diagramm wird Delaunay-Triangulation genannt.

Geht man jedoch von einer strengen Betrachtungsweise aus, so kann auch eine Zerlegung entstehen, die keine reine Dreieckszerlegung darstellt. Beispielhaft hierfür ist der

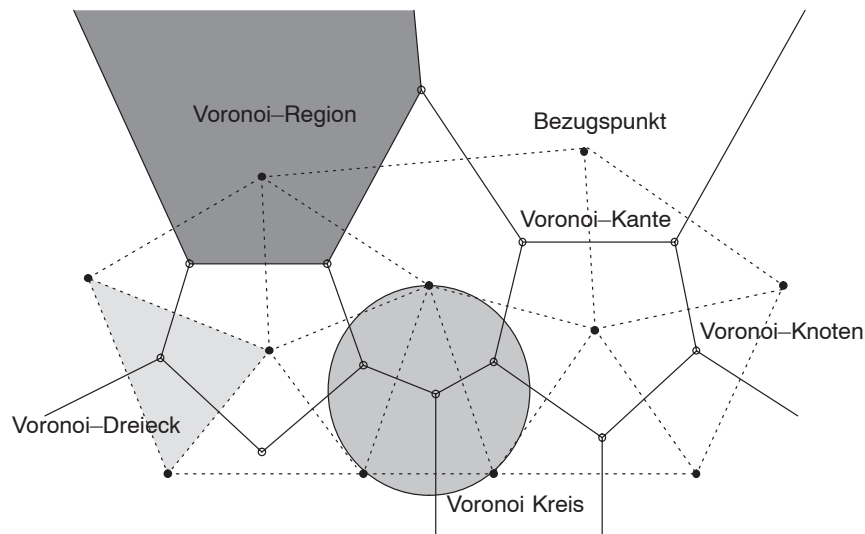


ABBILDUNG 4.3.1. Voronoi-Diagramm mit zugehöriger Delaunay-Triangulierung

duale Graph zu einer regulär verteilten Punktmenge. Zunächst soll jedoch auf die Delaunay-Triangulation eingegangen werden, da diese besonders einfach zu beschreiben ist. Beim Übergang zur Delaunay-Zellzerlegung kann auf viele Aussagen dieses Abschnittes zurückgegriffen werden.

DEFINITION 4.3.1. Die **Triangulierung** einer Punktmenge im \mathbb{R}^2 ist die Zerlegung der Ebene, so daß die gegebenen Punkte die Eckpunkte der Dreiecke sind.

Die zusätzliche Berücksichtigung der Nachbarschaften von Punkten untereinander bei der Bestimmung der Triangulierung einer Punktmenge führt zu einer Delaunay-Triangulation. Bei einer Delaunay-Triangulation werden nur die nächsten Nachbarn eines Punktes zur Bildung eines Dreieckes herangezogen. Diese **Delaunay-Dreiecke** müssen der sogenannten Umkugelbedingung genügen (Abb. 4.3.2).

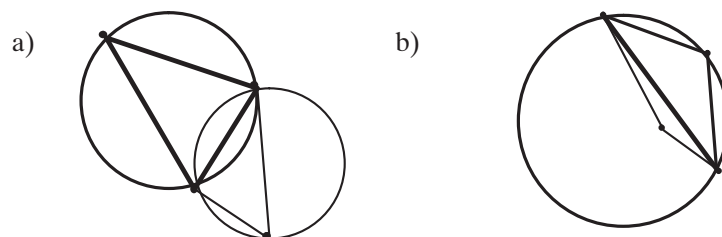


ABBILDUNG 4.3.2. Triangulierung a) erfüllt Umkreis-Kriterium, Triangulierung b) nicht, da ein anderer Punkt innerhalb des Kreises liegt

Ausgehend von der Definition 4.3.1 einer Triangulierung ergibt sich die Definition einer Simplicial-Zerlegung.

DEFINITION 4.3.2. Die Zerlegung eines n -dimensionalen linearen Raumes unter Einbeziehung einer gegebenen Punktmenge, so daß die Punkte genau die Ecken von n -dimensionalen Simplexen sind, wird **Simplizial-Zerlegung** genannt.

Auch bei Simplizial-Zerlegungen kann man, wenn weitere Eigenschaften hinzugezogen werden, ausgezeichnete Zerlegungen erzeugen. Betrachtet man nicht nur einen n -dimensionalen linearen Raum, sondern geht davon aus, daß auf diesem eine Metrik definiert ist, so kann in Analogie zur Delaunay-Triangulation von einer Delaunay-Simplizial-Zerlegung gesprochen werden.

DEFINITION 4.3.3. $n+1$ -Punkte p^0, \dots, p^n einer Simplizial-Zerlegung genügen der **Umkreisbedingung**, wenn kein anderer Punkt der Grundmenge im Inneren der durch die $n+1$ -Punkte definierten Kugel liegt (Abb. 4.3.2). Ein solches Simplex wird auch **Delaunay-Simplex** genannt.

Eine Simplizial-Zerlegung, die nur aus Delaunay-Simplexen bezüglich der gegebenen Punkte besteht, heißt **Delaunay-Simplizial-Zerlegung**.

Zu jeder Punktmenge in einem linearen metrischen Raum gibt es eine Delaunay-Simplizial-Zerlegung, wobei diese nicht unbedingt eindeutig sein muß. Die Delaunay-Simplizial-Zerlegung ist für Punktmenge in beliebiger Dimension berechenbar. Sie kann mit Hilfe verschiedener Algorithmen berechnet werden. Ein sehr einfacher und universeller Algorithmus existiert im n -dimensionalen euklidischen Raum und wird im weiteren vorgestellt.

4.3.1.1. Konstruktion von Delaunay-Triangulierungen im euklidischen Raum.

Wie schon bei der Konstruktion von Voronoi-Zerlegungen im euklidischen Raum ersichtlich wurde, besteht ein simpler Zusammenhang zwischen den beiden Hauptproblemen der geometrischen Datenverarbeitung, der Berechnung der konvexen Hülle einer Punktmenge und der Delaunay-Triangulierung.

THEOREM 4.3.4. Die DELAUNAY-Triangulierung einer Punktmenge im \mathbb{R}^n entspricht der Bestimmung der konvexen Hülle der Projektion der Punktmenge auf einen Hyper-Paraboloiden der Dimension \mathbb{R}^{n+1} .

Der Projektionsabbildung auf den Hyper-Paraboloiden liegt die Gleichung 4.2.2 und die zugehörige inverse Transformation zugrunde (Abb. 4.3.3).

Eine Tangential-Ebene an den Paraboloiden durch den Punkt A' besitzt die "Steigung"

$$\frac{da_{n+1}}{dx_i} = \sum_{i=1}^n 2a_i.$$

Damit besitzt die Tangential-Ebene, mit Π' bezeichnet, eine Beschreibung mittels der folgenden Gleichung:

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n [2a_i x_i - a_i^2].$$

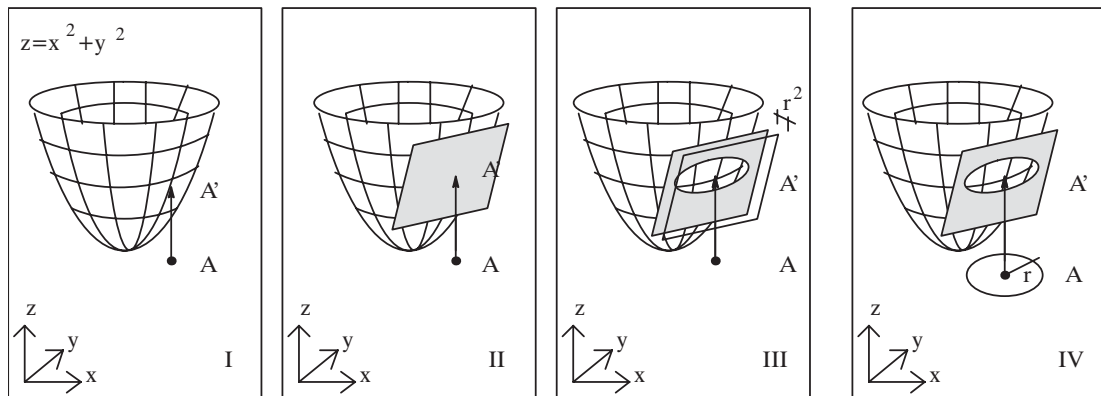


ABBILDUNG 4.3.3. Projektionsabbildung auf einen Paraboloiden

Verschiebt man diese Ebene um r^2 nach oben (in z -Richtung), so erhält man die Hyper-Ebene II, die den Hyper-Paraboloiden schneidet. Sie besitzt folgende Bestimmungsgleichung:

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n [2a_i x_i - a_i^2] + r^2.$$

Das Schnittgebilde aus Hyper-Paraboloid und Hyper-Ebene erhält man durch Gleichsetzen der beiden Bestimmungsgleichungen zu:

$$r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2.$$

Das Schnittgebilde von Hyper-Paraboloid und Hyper-Ebene ist eine Hyper-Ellipse, die bei Rückprojektion in den \mathfrak{R}^n zu einer Kugel mit dem Radius r und dem Mittelpunkt A wird. Dies ist aus der Gleichung für r^2 , die einer Kugelgleichung entspricht, deutlich zu erkennen.

Kehrt man die obigen Betrachtungen um, so erhält man den Beweis für die Dualität des Problems "konvexe Hülle" und "Delaunay-Simplizial-Zerlegung" im n -dimensionalen euklidischen Raum.

Im folgenden werden mit "untere" Randsimplexe der konvexen Hülle alle Simplexe bezeichnet, deren nach außen gerichteter Normalenvektor nach unten zeigen würde. Um bei der Rückprojektion zur Simplizial-Zerlegung nicht die "oberen" Randsimplexe mit zu bearbeiten, wird ein Hilfspunkt H eingefügt. Alle "oberen" Randsimplexe, die eigentlich "künstlich" durch die Projektion entstanden sind, besitzen H als Eckpunkt, so daß sie schnell identifiziert werden können (Abb. 4.3.4 - I).

Betrachtet wird nun die Hyper-Ebene II durch die Eckpunkte $(p^1, p^2, \dots, p^{n+1})$ des Paraboloiden, die ein Randsimplex der konvexen Hülle bilden. Diese Hyper-Ebene II schneidet den Hyper-Paraboloiden (Abb. 4.3.4 - II).

Verschiebt man Π so lange bis sie den Hyper-Paraboloiden nur noch in einem Punkt, der als Punkt A' bezeichnet wird, tangiert, so erhält man die Ebene Π' . Die ursprüngliche Ebene Π kann als Verschiebung der Ebene Π' nach oben aufgefaßt werden. Das Maß der Verschiebung wird mit r^2 bezeichnet.

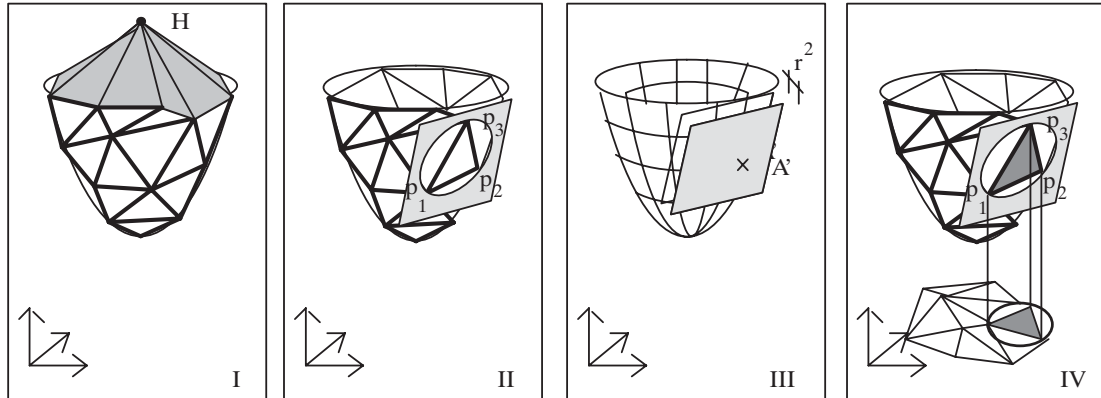


ABBILDUNG 4.3.4. Konstruktion des Voronoi-Kreises

Da die Ebene Π ein Randsimplex der konvexen Hülle enthält, müssen alle weiteren Eckpunkte der Hülle jenseits bzw. oberhalb von Π liegen. Da alle Punkte tatsächlich über Π liegen, liegen sie also um mehr als r^2 über Π' . Daraus folgt:

- Alle anderen Punkte p liegen bei einer Rückprojektion in die Dimension \mathfrak{R}^n außerhalb der (Hyper-)Kugel mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r .
- Die Umkugel um das Simplex der Punkte (p^1, p^2, \dots, p^n) ist leer und genügt somit dem Umkreiskriterium.
- Das Simplex (p^1, p^2, \dots, p^n) stellt ein Delaunay-Simplex dar.
- Jedes "untere" Simplex stellt danach ein Delaunay-Simplex dar.
- Der "untere" Teil der konvexen Hülle wird bei Rückprojektion in die n -te Dimension zur Delaunay-Simplizial-Zerlegung.

4.3.2. Minimale konvexe Zellzerlegung.

Die Delaunay-Simplizial-Zerlegung ist gekennzeichnet dadurch, daß ihre Kanten benachbarte Punkte verbinden, so daß Simplexe entstehen. Liegen mehr als $n+1$ Punkte auf einer n -dimensionalen Kugel, existieren mehrere Möglichkeiten zur Generierung der Delaunay-Simplexe was dazu führt, daß eine solche Delaunay-Simplizial-Zerlegung nicht mehr eindeutig ist (Abb. 4.3.5).

Gewünscht ist häufig jedoch eine eindeutige Zellzerlegung, bei der analog zur Delaunay-Simplizial-Zerlegung nur benachbarte Punkte zu einer konvexen Zelle verbunden werden, die mögliche Uneindeutigkeit der Delaunay-Simplizial-Zerlegung aber nicht auftritt. Diese Zerlegung wird im weiteren als **minimale konvexe Zellzerlegung** bzw. **Delaunay-Zerlegung** bezeichnet.

Für eine minimale konvexe Zellzerlegung wird die Beschränkung fallengelassen, daß zur Bildung einer konvexen Zelle maximal $(n+1)$ Punkte der **Umkugelbedingung** genügen

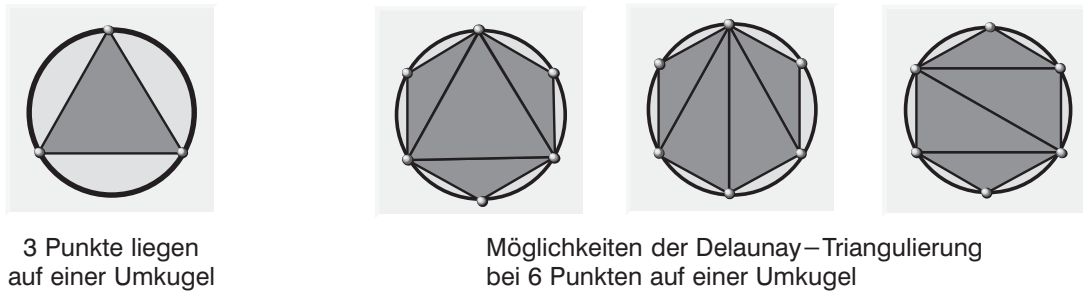


ABBILDUNG 4.3.5. Umkugelbedingung und Mehrdeutigkeit der Delaunay-Triangulierung

müssen. Die Zerlegung kann somit aus konvexen Zellen bestehen, die mehr als $(n + 1)$ Eckpunkte besitzen.

Die minimale konvexe Zellzerlegung kann analog der Delaunay-Triangulation über die Berechnung der konvexen Hülle bestimmt werden.

Die gegebene Punktmenge des \mathfrak{R}^n wird auf das Paraboloid der Dimension $(n + 1)$ projiziert. Unter Verwendung eines Hilfspunktes H kann dann mit dem Beneath-Beyond-Algorithmus aus Abschnitt 3.1.2 die konvexe Zelle der projizierten Punkte berechnet werden. Durch Rückprojektion der sichtbaren Facetten der berechneten konvexen Zelle in die n -dimensionale Ebene entsteht eine aus konvexen Zellen bestehende Zellzerlegung. Die Eckpunkte einer konvexen Zelle dieser Zerlegung genügen der Umkugelbedingung, wobei man der Argumentation bei der Konstruktion der Delaunay-Triangulation über eine Projektion folgen kann.

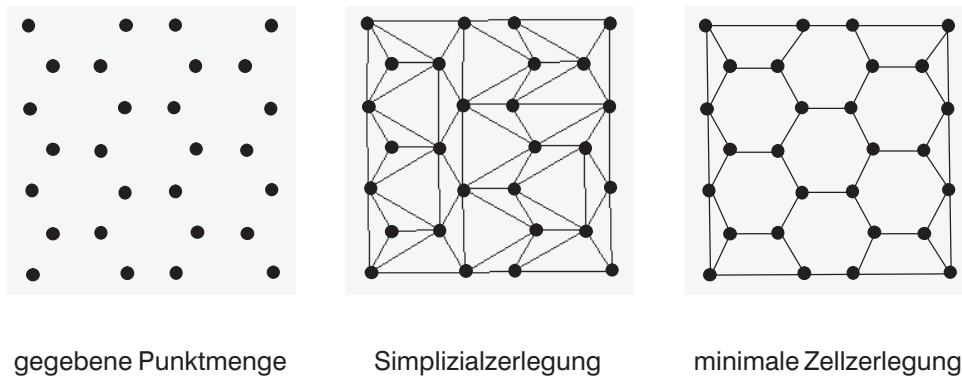


ABBILDUNG 4.3.6. Minimale konvexe Zellzerlegung einer Menge bzgl. einer gegebenen Punktmenge

Minimale konvexe Zellzerlegungen (Abb. 4.3.6 und 4.3.7) sind gekennzeichnet durch ihre Eindeutigkeit. Sie bestehen im allgemeinen aus konvexen Zellen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Ecken. Ausgehend von einer solchen eindeutigen Zellzerlegung können weitere Algorithmen angewendet werden. Werden Simplexe (Dreiecke) als Basis der Zerlegung benötigt kann eine baryzentrische Zerlegung der konvexen Zellen durchgeführt

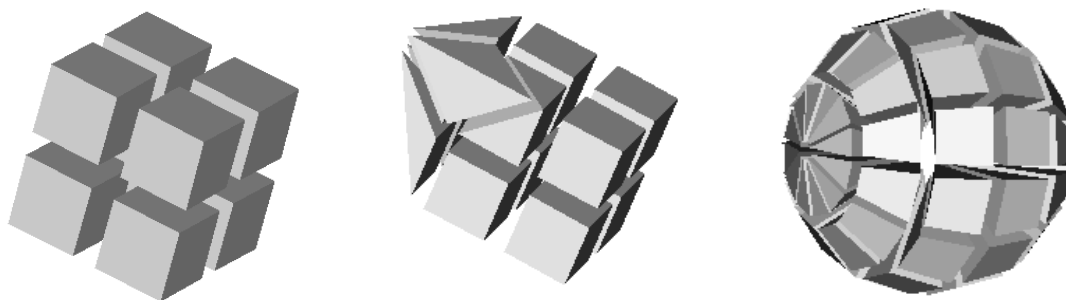


ABBILDUNG 4.3.7. Minimale konvexe Zellzerlegungen im \mathbb{R}^3

werden.

4.3.3. Baryzentrische Zellzerlegung.

Die baryzentrische Zellzerlegung einer n -dimensionalen konvexen Zelle ist eine aus Simplexen bestehende konvexe Zellzerlegung und sogar ein konvexer Zellkomplex. Die Eckpunkte des konvexen Zellkomplexes sind die Schwerpunkte der n -dimensionalen konvexen Zelle und aller Unterzellen der konvexen Zelle (Abb. 4.3.8).

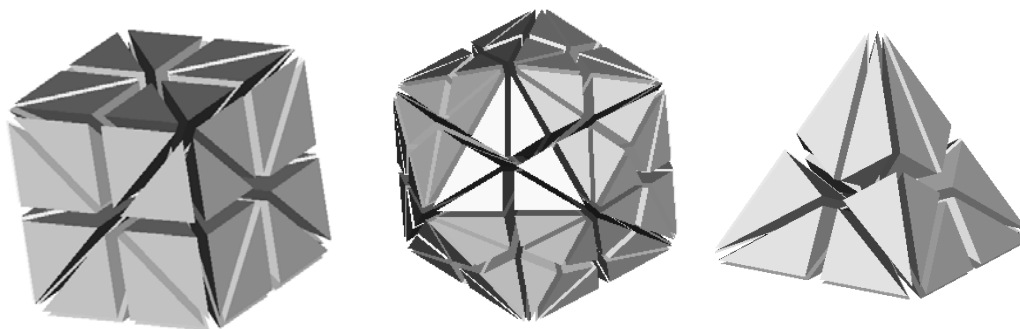


ABBILDUNG 4.3.8. Dreidimensionale baryzentrische Zellzerlegung

Im folgenden wird die Generierung der baryzentrischen Zellzerlegung einer konvexen Zelle betrachtet. Für die baryzentrische Zellzerlegung ist die konvexe Zelle eindeutig in Simplexe zu unterteilen. Eine eindeutige Zerlegung liefert die Berücksichtigung des Schwerpunktes einer konvexen Zelle. Der Schwerpunkt einer konvexen Zelle wird über ihre k Eckpunkte p^i bestimmt. Der Koordinatenschwerpunkt p^S einer Zelle ergibt sich aus:

$$p_i^S = \frac{\sum_{j=1}^k p_i^j}{k}.$$

Die Bestimmung der baryzentrischen Zerlegung einer n -dimensionalen konvexen Zelle kann rekursiv formuliert werden.

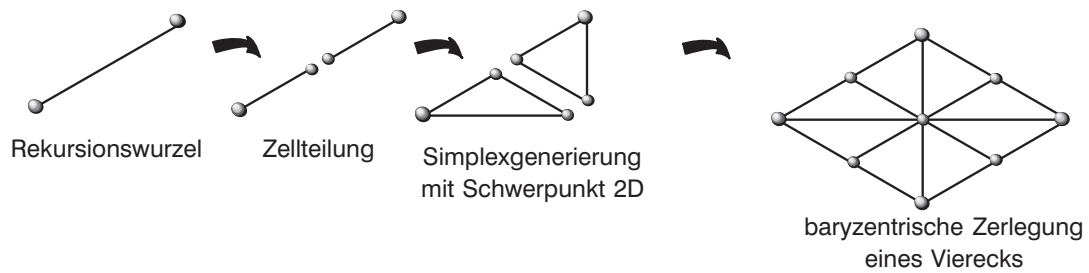


ABBILDUNG 4.3.9. Rekursive Konstruktion der baryzentrischen Zerlegung

Die Simplexe der baryzentrischen Zerlegung einer n -dimensionalen konvexen Zelle werden über den Schwerpunkt der Zelle und die Schwerpunkte der Facetten generiert (Abb. 4.3.9). Da diese nicht bekannt sind, muß zunächst die baryzentrischen Zellzerlegungen der Facetten und dann wieder deren Facetten bestimmt werden. Um die eingeschlagene Rekursion beenden zu können, ist eine Wurzel festzulegen. Als Wurzel der Rekursion werden die 1-dimensionalen konvexen Zellen gewählt, da die 0-dimensionale konvexe Zelle, der Punkt, die baryzentrische Zerlegung von sich selbst ist. Die baryzentrische Zerlegung einer 1-dimensionalen konvexen Zelle ist die Teilung der Zelle in ihrem Schwerpunkt.

Ausgehend von der Wurzel werden die Rekursionsschritte zurückverfolgt. Dabei werden in jedem Rekursionsschritt die entsprechenden baryzentrischen Simplexe aus dem Schwerpunkt der aktuellen konvexen Zelle und den zuvor berechneten baryzentrischen Simplexen ihrer Facetten gebildet.

Die baryzentrische Zellzerlegung basiert ausschließlich auf den Eigenschaften eines linearen Raumes über den reellen Zahlen und führt zu einer eindeutigen Zerlegung jeder beliebigen Zelle in Simplexe (Abb. 4.3.8).

Interpolation

Bei der klassischen Interpolation steht die Aufgabe im Zentrum, eine "komplizierte" Funktion $y = f(x)$ durch eine "einfache" Funktion $\tilde{f}(x)$ anzunähern. Dabei wird gefordert, daß die Werte der Interpolationsfunktion \tilde{f} und die der gegebene Funktion f an vorgegebenen Punkten übereinstimmen. Diese Eigenschaft wird Interpolationseigenschaft: $\tilde{f}(p^i) = f(p^i)$ genannt. Beim praktischen Einsatz von Interpolationsalgorithmen steht meist jedoch nicht die Wiedergabe einer bekannten Funktion im Vordergrund, sondern vielmehr die Beschreibung von Profilen, Oberflächen oder Verteilungen von uns umgebenden realen Objekten bzw. deren virtuellen Realisierungen im Rechner. In praktischen Anwendungen steht man vor dem Problem, daß das betrachtete Untersuchungsgebiet zwar eine stetige Veränderung (Variation) der Objekt-Eigenschaften besitzt, also die physikalischen Attribute sich nicht sprunghaft-diskret sondern mit glatten Werte-Übergängen ändern, aber diese Eigenschaften aus Zeit- und Kostengründen sowie prinzipiellen meßtechnischen Problemen nur an einigen wenigen Orten erfaßt werden können. Insbesondere das Auftreten großer Mengen von Punktdaten im Rahmen von Computeranwendungen, z.B. Daten aus Digitalisierungen und numerischen Simulationen machen es notwendig, effiziente und allgemein anwendbare Interpolationsmethoden verfügbar zu haben.

Im Sinne der Statistik liegt dann nur eine (stets endliche) Stichprobe des Untersuchungsgebietes vor, das als Grundgesamtheit an sehr vielen, bei räumlichen Fragestellungen meist sogar unendlich vielen Orten definiert ist. Man muß also versuchen, mit Hilfe eines numerischen oder statistischen Modells die stetige Veränderung der Werte im Raum nachzubilden.

Während bei der Annäherung gegebener Funktionen bzw. Daten durch Interpolationsfunktionen gefordert wird, daß die Interpolationfunktion gewisse vorgegebene Stützstellen bzw. die Ausgabedaten exakt annehmen, steht bei Approximationsverfahren die Minimierung der Abweichung der Approximationsfunktion von der gegebenen Funktion im Vordergrund. Auf die Identität der Funktionswerte an bestimmten Punkten wird dafür verzichtet.

Häufig macht es jedoch auch Sinn, Interpolation und Approximation als Einheit zu betrachten. So kann eine Interpolation als eine spezielle Approximation aufgefaßt werden, bei der die Abweichung soweit minimiert wird, daß sie gleich Null ist.

Werden Schätzungen von funktionalen Zusammenhängen auch außerhalb eines Beobachtungsgebietes benötigt, so spricht man von Extrapolationsverfahren. Die Güte solcher Extrapolationen wird im allgemeinen durch die Bestimmung von Konfidenzbereichen erfaßt.

Dieses Kapitel soll auf derartige Methoden und Modelle zur räumlichen Interpolation beschränkt bleiben. Unabhängig von speziellen fachlichen Fragestellungen, die mit fachspezifischen Modellen bearbeitet werden müssen (z.B. morphodynamische Modelle, Niederschlag-Abfluß-Modelle, ökonomische Modelle) besitzt die räumliche Interpolation eine allgemeine Bedeutung in allen Bereichen des Bauingenieurwesens.

Begonnen wird mit einer kurzen Einführung in die klassischen Interpolationsmethoden einfacher Funktionen und Flächen. Hierbei werden prinzipielle Herangehensweisen erläutert und auf ihre Verallgemeinerbarkeit untersucht. Hierfür wird ohne Einschränkung der Allgemeinheit immer ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Elementen eines Raumes und den reellen Zahlen angenommen. Aufbauend auf der klassischen Interpolation einfacher Funktionen werden dann allgemeine Anforderungen an Interpolationsräume formuliert. Im Zentrum dieses Kapitels stehen Interpolationsverfahren der *kombinatorischen Interpolation*. Bei dieser geht es darum, eine Menge von isolierten Stützstellen so in Beziehung zu bringen, wie es die zu beschreibende Form notwendig macht. Stammen die Stützstellen z.B. von einer Oberfläche, so ist eine der Flächentopologie entsprechende Interpolationsvorschrift zu erstellen. Typische Vertreter solcher Interpolationsverfahren sind Interpolationen auf Zellzerlegungen, Finite Element Interpolationen und nicht zuletzt netzfreie Interpolationsmethoden. Zum Abschluß dieses Kapitels wird ein Ausblick auf Interpolationsverfahren unter Einbeziehung einer räumlichen Statistik gegeben.

5.1. Funktionsinterpolation

Zu jeder gegebenen Funktion $f(p)$ oder diskreten Punktmenge $\{f(p^i)\}$, die auch Stützstellen genannt werden, gibt es eine unendliche Menge \mathcal{G} von Interpolationsfunktionen, z.B. die Menge aller reellwertigen Funktionen, die an bestimmten Stellen mit den Datenpunkten übereinstimmen. Die Menge \mathcal{G} besitzt im allgemeinen sowohl eine unendliche Teilmenge von "guten" als auch eine unendliche Teilmenge von "schlechten" Interpolationsfunktionen. Es ergibt sich daher die Frage, nach welchen Kriterien man in \mathcal{G} nach "möglichst guten" Interpolationsfunktionen suchen soll.

Im Rahmen dieses Abschnittes werden Aspekte beleuchtet, die bei der Auswahl von Interpolationsfunktionen von Bedeutung sind. Die Bewertung der Eigenschaften verschiedener Darstellungsfunktionen und die eigentliche Auswahl kann jedoch nur im speziellen Anwendungsfall vorgenommen werden.

Die Interpolation von Kurven und Flächen aus der speziellen Sicht des *Computer Aided Geometric Design* wird sehr ausführlich in [67] dargestellt, und wird im Rahmen dieses Abschnittes nur angerissen. Einführungen unter dem Blickwinkel des geometrischen Modellierens und der geometrischen Datenverarbeitung sind in [5] und [84] zu finden.

5.1.1. Einführendes Beispiel.

Eine häufig auftretende Fragestellung im Rahmen des Umweltmonitoring ist die Beurteilung von Nitratkonzentrationen in Fließgewässern, die unter anderem von der landwirtschaftliche Nutzung der Einzugsbereiche abhängt. Hierzu wird entlang eines Fließgewässers an mehreren Stellen die Konzentration gemessen. Auf der Grundlage dieser wenigen

Stützstellen mit bekannten Meßwerten (Abb. 5.1.1) soll die in der Realität vorhandene, aus finanziellen Gründen aber nicht überall (bzw. sehr dicht) meßbare, stetige Veränderung des Nitratgehaltes entlang des Fließgewässers beschrieben werden.

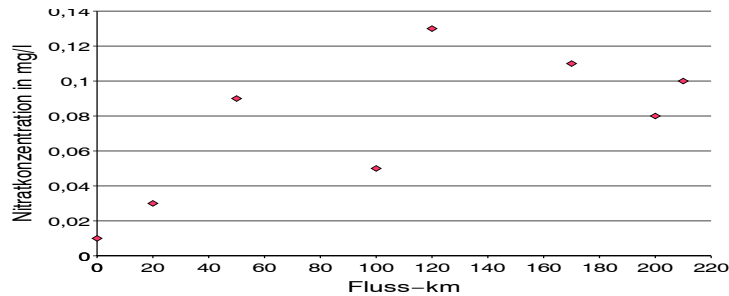


ABBILDUNG 5.1.1. Nitratkonzentration entlang eines Flußlaufes

Die einfachste Interpolation zu dieser gegebenen Menge von Stützstellen besteht darin, daß man einen stückweise konstanten Verlauf der Konzentrations-Werte annimmt (Abb. 5.1.2). Hierbei erfolgt der Wechsel des Konzentrations-Wertes jeweils in der Mitte des Intervalls, das durch zwei benachbarte Stützstellen gebildet wird. Dieser stückweise-stetige Verlauf der Konzentrations-Kurve entspricht sicherlich nicht der Realität.

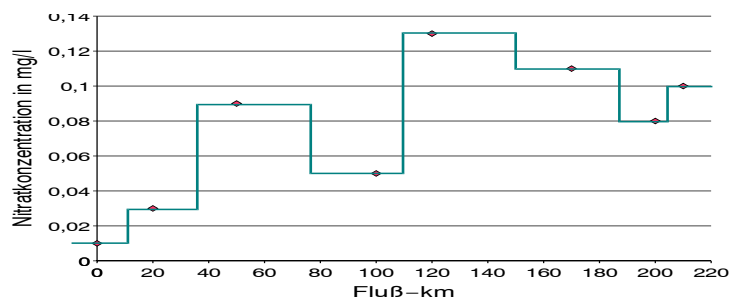


ABBILDUNG 5.1.2. Stückweise konstante Interpolation

Realistischer ist schon die Annahme, daß sich die Nitratkonzentration zwischen den Meßstellen gleichmäßig ändert (Abb. 5.1.3). Man würde dann zwischen den Stützstellen jeweils gerade Linien berechnen. Lediglich vor der ersten und nach der letzten Stützstelle muß man eine andere sinnvolle Lösung finden (z.B. konstante Nitratkonzentration).

Wird eine lineare Änderung der Meßwerte zwischen den Stützstellen verwendet, führt dies in der Umgebung der Stützstellen, infolge der Knickstellen im Funktionsverlauf, zu relativ starken Änderungen der Werte. Dies entspricht in der Regel nicht den tatsächlichen Verhältnissen, wonach Werteänderungen in der Stützstellen-Umgebung nur allmählich erfolgen. Dies führt zu einem kurvenförmigen (d.h. mit gekrümmter Linie) Verlauf der Nitratkonzentrationswerte. Die in der Praxis wichtigste Methode zur Modellierung solch glatter Kurven ist die Spline-Interpolation (Abb. 5.1.4). Der Begriff *spline* bezeichnet im Englischen ein biegsames Kurvenlineal. Hierbei werden zwischen den Stützstellen

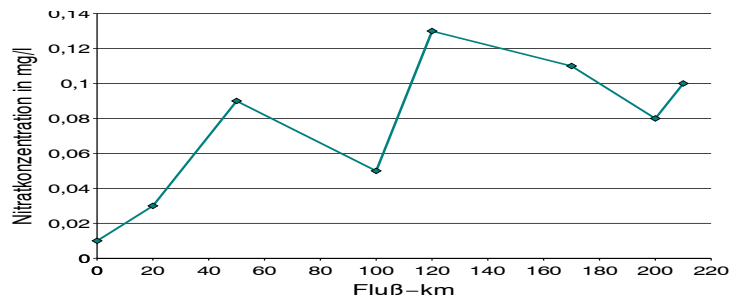


ABBILDUNG 5.1.3. Lineare Interpolation

meist sehr einfache Funktionen (Basis-Splines, z.B. lineare, quadratische oder kubische Polynome) benutzt und an den Nahtstellen durch Glättungsbedingungen (Stetigkeit der Ableitungen höherer Ordnung) so aneinandergesetzt, daß die Gesamtkrümmung minimal wird. Besonders einfach sind die Spline-Modelle für äquidistante Stützstellen. Auf die Darstellung mathematischer Details wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

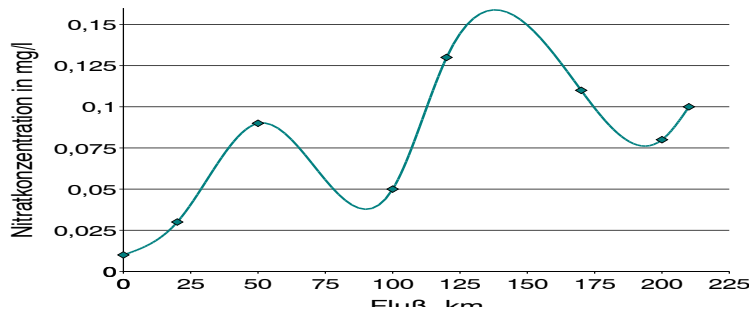


ABBILDUNG 5.1.4. Polynom-Interpolation

Wenn allerdings in Betracht gezogen werden muß, daß bei der Erfassung der Konzentrationen auch Meß- und Übertragungsfehler auftreten können, so ist eine exakte Interpolation mit Hilfe numerischer Methoden häufig nicht sinnvoll. Es wird vielmehr der Versuch unternommen, mit Hilfe statistischer Methoden eine Problemlösung zu finden, bei der eine Unterscheidung zwischen der systematischen Veränderung der Meßwerte (deterministische Komponente) und der zufälligen Fehler-Variation (stochastische Komponente) getroffen werden kann. Dafür wird in Kauf genommen, daß an den Stützstellen die Meßwerte nur näherungsweise wiedergegeben werden. Derartige Modelle nennt man Approximations-Modelle (Abb. 5.1.5).

Die hier dargestellte strenge Trennung zwischen der Approximation und Interpolation wird in der Praxis häufig nicht vollzogen, vielmehr wird im Rahmen von geographischen Systemen der Sammelbegriff der räumlichen Interpolation verwendet.

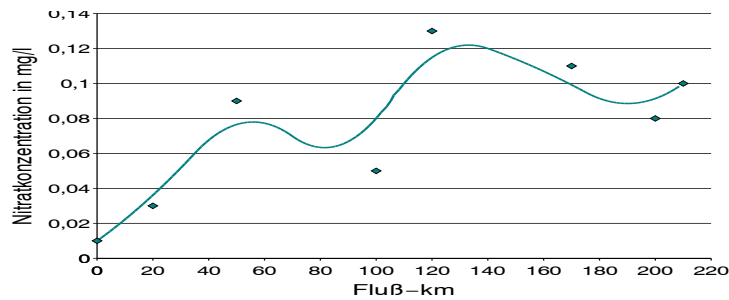


ABBILDUNG 5.1.5. Bezier-Approximation

5.1.2. Funktionen-Räume.

Für konkrete Interpolationsaufgaben gibt es vielfältige Lösungsmethoden, die im wesentlichen durch das betrachtete Anwendungsfeld gekennzeichnet sind. Zum Verständnis der Vorgehensweise bei Interpolationen auch in höheren Dimensionen bzw. in abstrakten Zusammenhängen ist es hilfreich, sich zunächst die Verhältnisse für ein Intervall $[a, b]$ genauer anzusehen. Bezeichnet man die Menge aller reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ mit $C[a, b]$, so kann auf natürliche Weise eine Addition und Multiplikation auf $C[a, b]$ definiert werden:

$$(\alpha f + \beta g)(t) := \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \forall t \in [a, b], \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}, \quad f, g \in C[a, b].$$

Mittels dieser Definition wird $C[a, b]$ zu einem linearen Raum über den reellen Zahlen (Def. 2.5.2). Dasselbe gilt für die Menge $C^k[a, b]$ aller k -mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen über $[a, b]$. Zusätzlich gilt für jedes k , daß C^{k+1} ein Unterraum von C^k ist. Nun können alle Eigenschaften linearer Räume ausgenutzt werden, um einfache Darstellungen für Interpolationen zu erhalten.

Ein sehr wichtiger Unterraum des $C[a, b]$ ist der **Raum aller Polynome** \mathcal{P}^n mit dem Grad n :

$$p^n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad \forall t \in [a, b].$$

Die Dimension von \mathcal{P}^n für festes n ist $n + 1$, oder anders ausgedrückt, jedes $p^n \in \mathcal{P}^n$ ist durch seine $n + 1$ Koeffizienten (Koordinaten) a_0, a_1, \dots, a_n eindeutig bestimmt. Die Koordinaten können als Vektor im $(n+1)$ -dimensionalen Raum \mathfrak{R}^{n+1} aufgefaßt werden. Es ist auch möglich, eine Basis für \mathcal{P}^n anzugeben: die Monome $1, t, t^2, \dots, t^n$ sind linear unabhängige Funktionen und bilden deshalb eine Basis. Aus mathematischer Sicht spielen Polynome im Rahmen der Interpolations- und Approximationstheorie eine große Rolle. Dies ist im Satz von Weierstraß begründet, nach dem es zu jeder geforderten Genauigkeit (im Sinne der Maximalabweichung) ein Polynom gibt, das dieser Anforderung genügt, vorausgesetzt, die zu approximierende Funktion ist auf $[a, b]$ definiert. Obwohl diese Aussage mathematisch korrekt ist, darf man jedoch nicht annehmen, damit alle praktischen Probleme lösen zu können. In vielen Fällen, etwa bei stark oszillierendem Verhalten oder "uneinheitlichem" Funktionsverlauf (mit sehr glatten Abschnitten und Stellen mit extrem starker Krümmung,

z.B. "Spitzen" oder "Ecken") kann ein dem Weierstraßschen Satz entsprechendes Approximationspolynom - auch bei einer bescheidenen Genauigkeitsforderung - unter Umständen einen extrem hohen Polynomgrad besitzen.

Aus den genannten Gründen erweist es sich oft als ungünstig, die Interpolationsaufgabe mit einem Polynom eines hohen Grades auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ zu lösen.

Eine andere interessante Klasse von Unterräumen des $C[a, b]$ ist durch die stückweise linearen Funktionen gegeben. Sei eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in der Form $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ gegeben, dann wird eine Funktion, die auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ linear ist, **stückweise lineare Funktion** genannt. Die stückweise linearen Funktionen über einer festen Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ bilden einen linearen Funktionenraum. Eine Basis für diesen Funktionen-Raum wird durch die sogenannten Dachfunktionen gegeben. Eine Dachfunktion $H_i(t)$ ist eine stückweise lineare Funktion, welche den Bedingungen $H_i(t_i) = 1$ und $H_i(t_j) = 0$ falls $i \neq j$ genügt. Eine beliebige stückweise lineare Funktion $f(t)$ kann immer als

$$f(t) = \sum_{j=0}^n f(t_j)H_j(t)$$

dargestellt werden (Abb. 5.1.6).

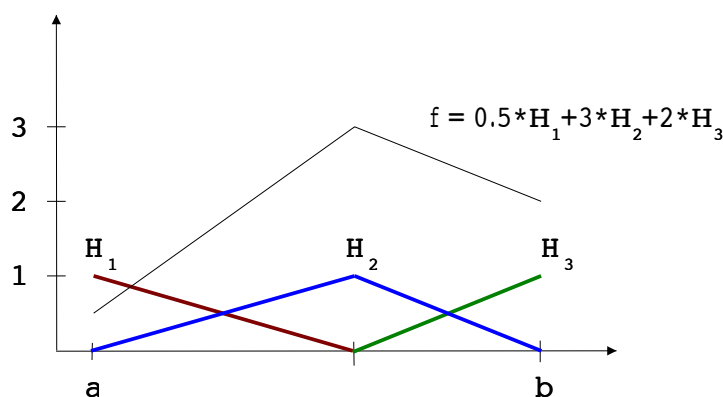


ABBILDUNG 5.1.6. Dachfunktionen und eine stückweise lineare Funktion

Der lineare Raum der Polynome und der lineare Raum der stückweise linearen Funktionen sind zwei wichtige Vertreter von Funktionen-Räumen, die für Interpolationen verwendet werden. Sie sind auf der anderen Seite aber auch typische Vertreter für Klassen von Interpolationsmethoden, die durch ihre Lokalitätseigenschaft gebildet werden.

Von einer **globalen Methode** wird gesprochen, wenn der Interpolant von allen Datenpunkten abhängt. Bei solchen Methoden erfordern Änderungen, Hinzunahme oder Wegnahme eines ausgezeichneten Punktes, ein erneutes Lösen des gesamten Problems. Exemplarisch für diese Herangehensweise ist die Verwendung einer einheitlich definierten Funktion (z.B. ein Polynom) für das ganze Gebiet.

Bei **lokalen Methoden** kommt es bei Änderung an Datenpunkten nur zu lokalen Auswirkungen, d.h. nur in bestimmten Bereichen müssen die Interpolanten neu bestimmt werden. Eine solche Interpolation kann durch eine stückweise Definition (z.B. eine stückweise aus mehreren Polynomen zusammengesetzte Funktion, wie etwa ein interpolierender Polygonzug, der aus linearen Funktionen zusammengesetzt ist) im betrachteten Gebiet realisiert werden.

5.1.3. Interpolation mit Monomen.

Bei dieser Interpolation liegen Monome als Basisfunktionen zugrunde. Für $(n + 1)$ paarweise verschiedene Parameterwerte p^i und zugehörige Funktionswerte $f(p^i)$ wird ein Polynom der Form

$$(5.1.1) \quad \tilde{f}(p) = \sum_{j=0}^n A_j \cdot p^j$$

gesucht mit

$$(5.1.2) \quad \tilde{f}(p^i) = f(p^i).$$

Zu einer Lösung des Interpolationsproblems gelangt man durch das Einsetzen von Gleichung 5.1.2 in Gleichung 5.1.1, was zu folgendem linearen Gleichungssystem führt:

$$f(p^i) = \sum_{j=0}^n A_j \cdot f(p^j).$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, falls die Stützstellen paarweise ungleich sind. Wird eine neue Stützstelle hinzugefügt, muß das gesamte Gleichungssystem neu gelöst werden.

5.1.4. Interpolation mit Lagrange-Polynomen.

Als neue Basisfunktionen werden sogenannte Lagrange-Polynome verwendet. Die neuen Basisfunktionen L_i sollen folgende Eigenschaften haben:

- Ordnung n ,
- abhängig von x ,
- für $x = p^i$ soll das i -te Polynom den Wert 1 annehmen.

Die Lagrange-Polynome können wie folgt aufgebaut werden

$$L_k(x) = \prod_{j=0; j \neq k}^n \frac{(x - p^j)}{(p^k - p^j)}.$$

Die Lösung des Interpolationsproblems lautet dann

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x) f(p^j),$$

wobei $f(p^i)$ die gegebenen Stützstellen des Interpolationsproblems sind.

Auch diese Lösung des Interpolationsproblems hat den Nachteil, daß bei jeder neu hinzugefügten Stützstelle alle Basisfunktionen neu berechnet werden müssen. Dieser Nachteil kann über die Newton-Interpolation ausgeräumt werden.

5.1.5. Interpolation mit Newton-Polynomen.

Als Newton-Polynome $n(x)$ werden

$$n_i(x) := (x - p_0)(x - p^1) \dots (x - p^{i-1})$$

mit

$$n_0(x) := 1$$

eingeführt (Abb. 5.1.7).

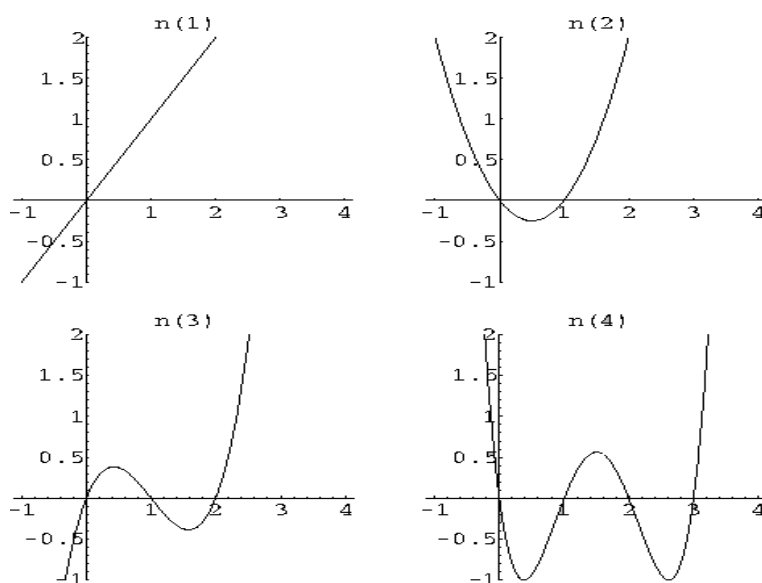


ABBILDUNG 5.1.7. Newton-Polynome

Mit den Newton-Polynomen lautet die Lösung des Interpolationsproblems dann

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^n n_j(x)c_j,$$

wobei die Koeffizienten c_j durch rekursives Einsetzen berechnet werden können:

$$\begin{aligned} c_0 &= f(p^0) \\ c_1 &= \frac{f(p^1) - c_0}{p^1 - p^0} \\ &\dots \\ c_i &= \pi_i(p^i) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\pi_0(x) &= f(x) \\ \pi_i(x) &= \frac{\pi_{i-1}(x) - \pi_{i-1}(p^i)}{x - p^i}.\end{aligned}$$

5.1.6. Weitere Interpolationen für Kurven.

Mit den vorgestellten klassischen Interpolationsverfahren sind noch längst nicht alle möglichen Interpolationen von Funktionen und Kurven ausgeschöpft. Bezieht man neben den eigentlichen Werten an den Stützstellen beispielsweise gewünschte oder bekannte Ableitungen der zu interpolierenden Funktion ein, kommt man zur großen Klasse der hermiteschen Interpolations-Verfahren. Eine weiter zu nennende Interpolation ist die rationale Interpolation. Die Basis dieses Interpolationsraumes bilden nicht Polynome, sondern rationale Funktionen (Brüche von Polynomen). Die Anwendung dieser rationalen Interpolation neigt nicht zur Welligkeit der Polynom-Interpolation.

Im folgenden Abschnitt werden, ausgehend von den Interpolationsverfahren für einfache Funktionen, allgemeine Eigenschaften von Interpolationsräumen formuliert.

5.2. Interpolationsräume

Eine der fundamentalen Entscheidungen bei der Wahl einer Klasse von Modellfunktionen (Interpolationsfunktion)

$$G_N := \{g(x; c_1, c_2, \dots, c_N) : c_1, \dots, c_N \in \mathfrak{R}, g : B \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}\}$$

betrifft ihre Linearität. Dabei muß sorgfältig auseinandergehalten werden zwischen:

1. der Linearität/Nichtlinearität bezüglich der unabhängigen Variablen x und
2. der Linearität/Nichtlinearität bezüglich der Parameter c_1, c_2, \dots, c_N .

Linearität bezüglich der unabhängigen Variablen.

Die meisten Vorgänge und Zusammenhänge der realen Welt sind nichtlinear. Dennoch besitzen Modelle, die linear in x sind, in vielen praktisch relevanten Fällen eine zufriedenstellende, manchmal sogar sehr hohe Aussagekraft. Viele mathematischen Untersuchungs- und Lösungsmethoden (analytische und numerische) sind besser und manchmal sogar ausschließlich für lineare Problemstellungen geeignet. Dieser Umstand führt zur Anwendung linearer Modelle sogar in jenen Fällen, wo es ernsthafte Gründe für die Annahme gibt, daß sich die reale Abhängigkeit wesentlich von einer linearen unterscheidet.

Die Fehler, die durch das Ersetzen einer nichtlinearen Abhängigkeit durch eine lineare gemacht werden, können quantitativer oder qualitativer Art sein. Im ersten Fall beschreibt die Lösung der mathematischen Aufgabe die Eigenschaften des realen Vorganges im großen und ganzen richtig, obwohl es konkrete numerische Ergebnisse gibt, die vor den wahren Werten stark abweichen. Im zweiten Fall werden einige in Wirklichkeit beobachtbare Effekte durch das lineare Modell überhaupt nicht wiedergegeben. Solche Effekte nennt man "wesentlich nichtlinear". Für ihre Wiedergabe sind lineare Modelle ungeeignet.

Typische Beispiele für wesentlich nichtlineare Effekte sind Sättigungserscheinungen, Verzweigungen, Chaos etc. In solchen Fällen müssen nichtlineare Modelle verwendet werden.

Linearität bezüglich der Parameter.

Ob man von einer linearen oder nichtlinearen Interpolationsmethode spricht, hängt nicht von der Art der Abhängigkeit der Funktion g von ihrer unabhängigen Variablen x , sondern von der Art der Abhängigkeit der Interpolationsfunktion g von ihren Parametern $\vec{c} := (c_1, c_2, \dots, c_N) \in \mathfrak{R}^N$ ab.

Eine Interpolationsfunktion g nennt man linear, wenn sie additiv und homogen bezüglich ihrer Parameter ist, also folgende Eigenschaften besitzt:

1. $g(x; b + c) = g(x; b) + g(x; c)$, (Additivität)
2. $g(x; \alpha \cdot c) = \alpha \cdot g(x; c)$. (Homogenität)

So führt z.B. die Verwendung von Polynomen

$$p_d(x; c_0, c_1, \dots, c_d) = c_0 + c_1x + \dots + c_dx^d$$

als Modellfunktionen in diesem Sinn auf ein lineares Interpolationsproblem.

Lineare Interpolationsfunktionen können stets als Linearkombinationen von festen, gegebenen (linear unabhängigen) Basisfunktionen

$$g_i : B \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

dargestellt werden:

$$g = \sum_{i=1}^N c_i g_i.$$

Beispiele sind Polynome bzw. trigonometrische Polynome.

Allgemeine Eigenschaften von Interpolationsräumen.

Eine Vielzahl von Interpolationsräumen sind so konstruiert, daß ihnen eine einfache Struktur zugrunde liegt. Es ist deshalb auch nicht verwunderlich, daß sehr viele Interpolationsräume lineare Räume über dem Körper der reellen Zahlen sind (Abschn. 2.5). Ihnen allen gemein ist die folgende Eigenschaft an die Basisfunktionen:

- $\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \Rightarrow f(x_i) = f_i$, (Interpolationseigenschaft).

Weitere Anforderungen an die Basisfunktionen führen zu günstigen Eigenschaften des Interpolationsraumes:

- $\phi_i(x) \in C^0$, (Stetigkeit)
- $\phi_i(x) \geq 0$, (Positivitätseigenschaft)
- $\sum \phi_i(x) = 1$. (Zerlegung der Einheit).

Eine weitere nützliche Eigenschaft ist, wenn der Interpolationsraum eine Interpolation der Koordinaten des zugrundeliegenden Raumes zuläßt, falls dieser selbst ein linearer Vektorraum ist. Für die Ebene bedeutet diese Forderung das gilt:

$$\sum x_i \cdot \phi_i(x, y) = x \text{ und } \sum y_i \cdot \phi_i(x, y) = y.$$

In den folgenden Abschnitten werden Interpolationsverfahren für funktionale Zusammenhänge mehrerer Variablen vorgestellt. Hierbei werden die wesentlichen Eigenschaften in der Ebene erläutert. Sie gelten, wenn nicht anders festgelegt, auch für höherdimensionale Räume.

5.3. Bereichsweise konstante Interpolation

Wie schon im eindimensionalen Fall der Interpolation von Funktionen zu erkennen war, gibt es eine Vielzahl von Interpolationsverfahren. Alle beruhen dabei auf der Annahme, daß es zwischen Daten räumliche Zusammenhänge gibt. Umgangssprachlich bedeutet dies, daß nahe beieinanderliegende Werte einen größeren Zusammenhang besitzen als weit entfernte. Die im weiteren vorgestellten Interpolationsverfahren werden so formuliert, daß sie weitestgehend allgemeingültig sind, sowohl was die Dimension des betrachteten Raumes als auch dessen Eigenschaften betrifft. Um einen visuellen Eindruck zu erhalten, wird eine Testkonfiguration in der Ebene herangezogen (Abb. 5.3.1).

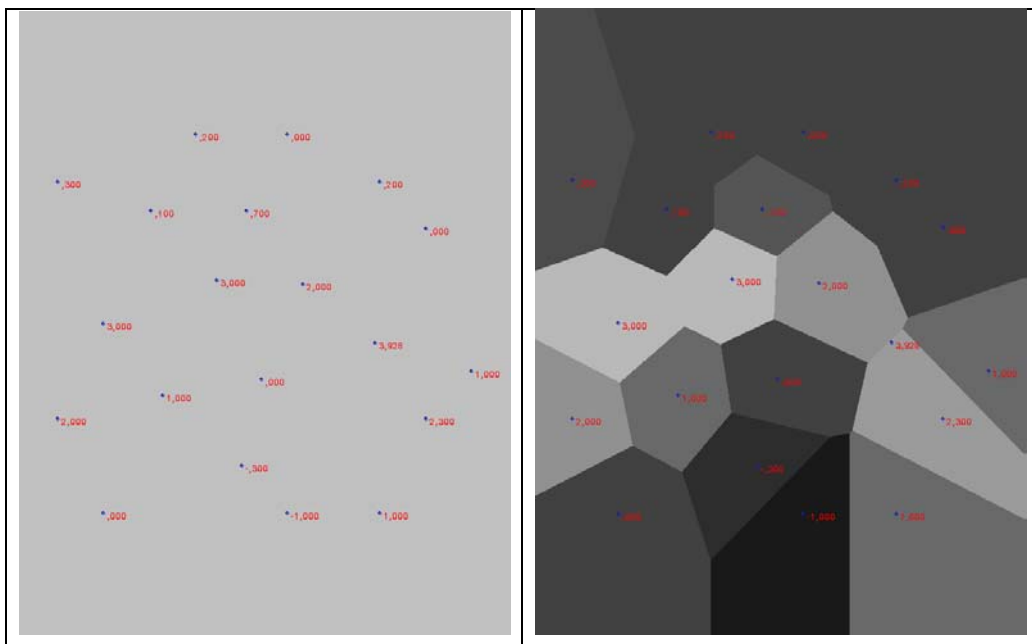


ABBILDUNG 5.3.1. Bereichsweise konstante Interpolation

In der zuerst vorgestellten Methode wird der Beobachtungswerten an einem nicht beobachteten Ort der Wert des nächstgelegene Datenpunktes zugeordnet. Diese bereichsweise konstante Interpolation wird im ebenen Fall auch als Polygon-Methode bezeichnet.

Dabei impliziert das Attribut nächstgelegen schon, daß diese Methode einzig eine Abstandsfunktion bzw. einen metrischen Raum als Grundlage des Algorithmus benötigt. Das Untersuchungsgebiet wird bei dieser Interpolationsmethode in Bereiche zerlegt, bestehend aus allen Punkten, die dem jeweiligen Datenpunkt am nächsten liegen. Basis dieser Interpolation sind demzufolge die in Abschn.2.4.1 definierten Voronoi-Zerlegungen des Parameterraumes. Innerhalb dieser Voronoi-Regionen ist der Funktionswert der Interpolation konstant. In der Ebene entsteht eine sogenannte dreidimensionale Treppenfunktion. Die an den Übergängen zwischen den Regionen entstehenden Sprünge in der Interpolationsfunktion sind oft unerwünscht, da sie im allgemeinen nicht dem natürlichen Verhalten entsprechen.

Verwendet man als Grundlage der Interpolation die zur Voronoi-Zerlegungen duale Struktur, nämlich die Delaunay-Zerlegung, so erhält man eine Ausprägung der Finiten Element Interpolation.

5.4. Finite Element Interpolation

Verwendet man die Delaunay-Triangulation als Basis für eine Interpolationsvorschrift, so kann im einfachsten Fall die Werteoberfläche durch das Aufspannen von Ebenen über den Dreiecken und den vorgegebenen Werten der Triangulation geschätzt werden. Durch die drei Knoten und den zugehörigen Stützwerten eines jeden Dreiecks wird eine Ebene gelegt. Diese Ebenen bilden zusammen die zu schätzende Werteoberfläche (Abb. 5.4.1). Im Gegensatz zur Polygon-Methode wird durch die Triangulation eine stetige funktionale Oberfläche erzeugt. Dies kommt in vielen Fällen den realen Vorgängen sehr nahe. Die hier dargestellte Interpolation auf Dreiecken in der Ebene ist ein Spezialfall der Finiten Element Interpolation.

Die Finite Element Methode ist eine systematische und sehr allgemein anwendbare Interpolationsmethode. Der Interpolationsprozeß ist weitestgehend unabhängig von der Geometrie des betrachteten Gebietes. In Erweiterung der Finiten Element Interpolation ist es auch möglich, unbekannte Lösungen von Randwertaufgaben durch eine Finite Element Approximation anzunähern.

Die Finite Element Interpolation kann als ein dreistufiger Prozeß aufgefaßt werden. In einem ersten Schritt wird der Vertrauensbereich, der durch die gegebenen Punkte p^i definiert ist, bestimmt und eine Zerlegung des Inneren dieses Gebietes in kleine Bereiche vorgenommen. In einem zweiten Schritt werden, falls notwendig, Ableitungsdaten der zu interpolierenden Funktion abgeschätzt. Im dritten Schritt erfolgt dann die eigentliche Finite Element Interpolation.

5.4.1. Finite Element Zerlegung.

Ein grundlegendes Merkmal der Methode der Finiten Elemente ist es, daß das zu untersuchende Gebiet in geeignete Teilgebiete zerlegt wird, die man Finite Elemente nennt. Die Dimension und Gestalt der Finiten Elemente hängt von der Dimension des Parameter-raumes und der zu interpolierenden Funktion ab. In einem ersten Schritt muß zu einer

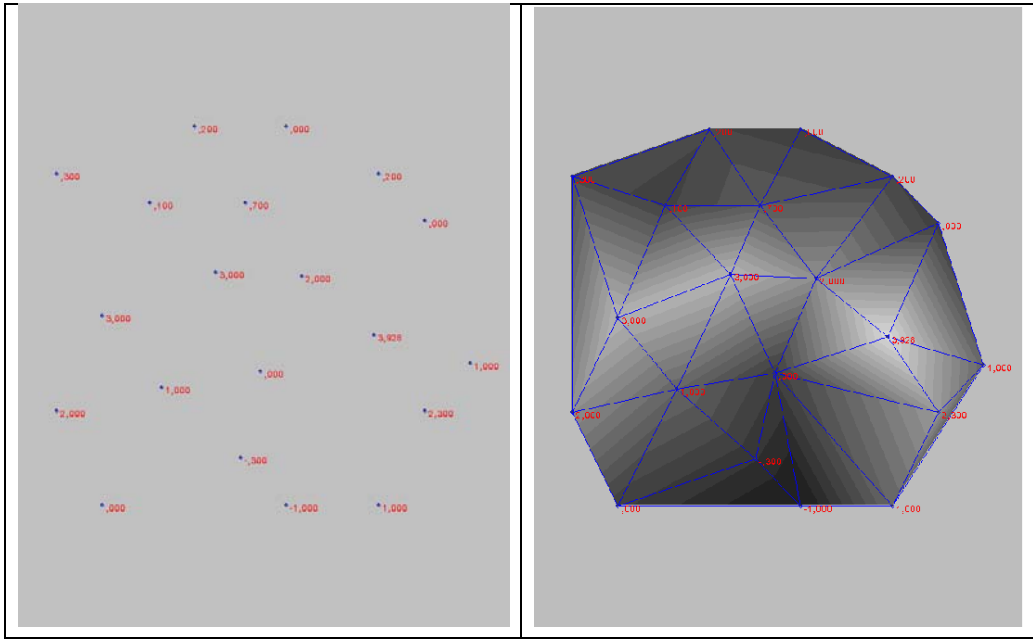


ABBILDUNG 5.4.1. Interpolation auf Dreiecken

gegebenen Punktmenge $\{p^i\}$ der Vertrauensbereich festgelegt werden. Der einfachste Algorithmus hierfür ist die Bestimmung der konvexen Hülle der gegebenen Punkte. Wird im weiteren als zugrundeliegendes Gebiet die konvexe Hülle und deren Triangulation betrachtet, so wird von einer uneingeschränkten Triangulation gesprochen. Ist eine Begrenzung der gegebenen Punktmenge auf Grund zusätzlicher Informationen schon vorhanden, so ist es häufig wünschenswert diese Begrenzung bei der Gebietszerlegung zu berücksichtigen. Solche Gebiete müssen nicht konvex sein und können Löcher enthalten. Triangulierungen, die diese Gebietseigenschaften erhalten, werden eingeschränkte Triangulationen genannt. Die Methode der Finiten Elemente ist aber nicht auf Dreieckszerlegungen beschränkt.

Werden allgemeine Finite Element Interpolationen betrachtet, so wird grundsätzlich von einem zulässigem Gebiet Ω ausgegangen. Das bedeutet, daß das Gebiet regulär berandet sein muß.

DEFINITION 5.4.1. Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ hat einen **regulären Rand** (genügt der LIPSCHITZ-Bedingung), falls M Koordinatensysteme S_1, \dots, S_M , Funktionen g_1, \dots, g_M und Zahlen $a, b > 0$ existieren mit:

1. g_i sind in $\overline{Q_{N-1}} := \{y := (y_1, \dots, y_{N-1}) : |y_i| \leq a, i = 1, \dots, N-1\}$ LIPSCHITZ-stetig,
2. $\forall x \in \partial\Omega \exists i$ mit $(1 \leq i \leq M)$ und in S_i hat x die Darstellung $(y, g_i(y))$ mit $y \in Q_{N-1}$ und
3. in jedem Koordinatensystem S_i gilt :
 - $(y, y_N) \in \Omega$ für $y \in \overline{Q_{N-1}} : g_i(y) \leq y_N \leq g_i(y) + b$ und
 - $(y, y_N) \in \overline{\Omega}$ für $y \in \overline{Q_{N-1}} : g_i(y) - b \leq y_N \leq g_i(y)$.

Für die Ebene heißt dies, daß man jeden Randpunkt (x, y) des Gebietes so in den Ursprung $(0, 0)$ bewegen kann (durch Verschiebung und Drehung), daß der verschobene Rand in der Umgebung des Ursprungs durch einen funktionalen Zusammenhang beschrieben werden kann. In der Umgebung von $(0, 0)$ kann der Rand durch $y = f(x)$ mit $|x| < R$ beschrieben werden und für das verschobene Gebiet gilt: $|x| < R, f(x) < y < 2LR$. Hierbei genügt die Funktion $f(x)$ der LIPSCHITZ-Bedingung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Eine **Finite Element Zerlegung** eines abgeschlossenen Gebietes $\bar{\Omega} \subseteq \mathfrak{R}^N$ ist eine Zerlegung $\tilde{\Omega} \subseteq \mathfrak{R}^N$ im topologischen Sinne (Def. 4.0.1), wobei die verwendeten abgeschlossenen beschränkten Unterbereichen $\bar{\Omega}_e$ von $\tilde{\Omega}$ **Finite Elemente** genannt werden. Die Bereiche $\bar{\Omega}_e$ genügen den folgenden Bedingungen:

- jedes $\bar{\Omega}_e$ ist der Abschluß einer offenen Region Ω_e : $\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \partial\Omega_e$ für $e = 1, 2, \dots, E$
- die offenen Regionen Ω_e sind paarweise disjunkt: $\Omega_e \cap \Omega_f = \emptyset$ für $e \neq f$ und
- $\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e$.

Mit $\partial\Omega_e$ wird der Rand von Ω_e bezeichnet. Die Region $\tilde{\Omega}$ wird als **Zusammenhangsmodell** von $\bar{\Omega}$ bezeichnet.

Es sei darauf hingewiesen, daß an dieser Stelle nur eine kompakte Teilmenge im Rahmen einer Zerlegung als Finites Element bezeichnet wird. Im weiteren wird sich zeigen, daß bei der Nutzung von Interpolationen und Approximationen auf solchen Zerlegungen der Begriff des Finiten Elementes erweitert und in diesem erweiterten Sinne dann auch gebraucht wird. Im Rahmen von praktischen Anwendungen werden häufig konvexe Zellen bzw. konvexe Polyeder als Finite Elemente verwendet. Die Beschreibung der Finiten Element Zerlegung erfolgt dann durch einen euklidischen Komplex (Def. 3.3.1).

5.4.2. Lokale und globale Finite Element Interpolation.

Im folgenden soll eine Erweiterung der Definition eines **Finiten Elementes** als Basis für Interpolationen und Approximationen durchgeführt werden. Dabei besteht die prinzipielle Idee darin, eine Funktion, die im allgemeinen aus einem Raum mit unendlicher Dimension stammt, durch eine Funktion aus einem endlich-dimensionalen Unterraum anzunähern. Konstruktionen solcher Räume können auf verschiedene Art und Weise vor sich gehen. Bei der Finiten Element Methode erfolgt die Konstruktion solcher endlich-dimensionalen Unterräume über die Festlegung von endlich-dimensionalen Funktionenräumen auf den Elementen der Zerlegung. Dabei ist zu beachten, daß die Basisfunktionen einfach sind und das diese so zusammenpassen, daß insgesamt eine stetige Funktion im gesamten Gebiet entsteht.

DEFINITION 5.4.2. Unter einem **Finiten Element** versteht man das Tupel (K, Ψ, Σ) . Dabei ist

- K eine *kompakten Menge* eines normierten Raumes (vorzugsweise des \mathfrak{R}^n) (eine kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt). Sie beschreibt ein bestimmtes Gebiet des normierten Raumes und kann eine beliebige Gestalt haben.

- Ψ ein *linearer Raum von Interpolationsfunktionen*, die auf der kompakten Menge K definiert sind. Und $\Psi \subset C^s(K)$.
 $\Psi(K)$ habe eine kanonischen Basis $\{\psi_1 \dots \psi_s\}$.
- Σ eine *Freiheitsgradmenge*, $\Sigma = \{\varphi_i : i = 1 \dots S\}$,
 eine endliche Menge von linearen Funktionalen $\varphi_1, \dots, \varphi_M$ aus $(C^s(K))^*$, die Ψ -
 unisolvent sind.

Mit Hilfe dieser Definition kann man ein Finites Element zur Interpolation vollständig und allgemein beschreiben. Als nächstes werden spezielle kompakte Mengen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n betrachtet, die einfach erzeugt werden können.

Häufig wird $\Psi(K)$ auch als **Raum der Ansatzfunktionen** bezeichnet. Die Funktionen dieses s -dimensionalen *Raumes von Interpolationsfunktionen* müssen den folgenden Eigenschaften genügen:

1. $\psi_i(x) \equiv 0$ für alle $x \notin K$,
2. $\psi_i \in C^s(K)$.

Unter der Freiheitsgradmenge wird bei praktischen Anwendungen häufig die Menge der Werte der Funktionen an den Knoten bzw. die Ableitungen der Funktionen an den Knoten verstanden.

Die (lokale) **P-Interpolierende** einer Funktion $v \in C^s(K)$ bezüglich eines endlichen Elements (K, Ψ, Σ) ist die wie folgt definierte Funktion:

$$\Pi_K v := \sum_{i=1}^s \varphi_i(v) \cdot \psi_i$$

und besitzt folgende **Eigenschaften**:

1. $\Pi_K v \in \Psi(K)$,
2. $\varphi_i(\Pi_K v) = \varphi_i(v)$,
3. $\Pi_K \psi = \psi$ für alle $\psi \in \Psi(K)$.

Bemerkung:

Zwei Finite Elemente (K, P) und (L, Q) sind genau dann gleich, wenn gilt:

$$K = L,$$

$$P = Q \text{ und}$$

$$\Pi_K v = \Pi_L v \text{ für alle } v.$$

Typische Vertreter kompakter Trägerelemente der Finiten Elemente sind Finite Simplexe und Rechteckelemente.

5.4.3. Finite Element Familien.

Die Interpolationsfunktionen der Finiten Elemente werden durch ihre Form und ihre Approximationsordnung charakterisiert. Im allgemeinen hängt die Wahl eines Finiten Elementes von der Geometrie des globalen Gebietes, der gewünschten Qualität der Interpolation und in Weiterführung zur Finiten Element Approximation auch von der einfachen Integration über das Gebiet ab. Bei der Wahl der geometrischen Formen für Finite Elemente wird auf

möglichst einfache Gebilde zurückgegriffen. Typische Elementformen sind die gerade Linie als eindimensionales Element, das Dreieck, Rechteck und Quadrat in der Ebene und das Tetraeder, das regelmäßige und unregelmäßige Hexaeder im Raum. Die geometrischen Formen der Finiten Elemente bilden eine Klassifizierung auf die im weiteren noch eingegangen wird.

Im allgemeinen sind die Interpolationsfunktionen Polynome unterschiedlichen Grades. Häufig kommen aber auch Produkte von Polynomen mit trigonometrischen Funktionen oder Exponentialfunktionen zum Einsatz. Werden Polynome verwendet, kann die lineare Variation einer Variablen innerhalb eines Elementes durch die Werte an den Eckknoten ausgedrückt werden. Höhere Ordnungen der Interpolation erreicht man zum einen durch das Hinzufügen weiterer Punkte auf den Kanten und im Inneren der Elemente, was zur Klasse der **Lagrangeschen Elemente** führt. Wird die Stetigkeit der Ableitung der Interpolationsfunktion an den Knoten gewünscht, ist es zweckmäßig, diese Stetigkeit mit Hilfe hermitescher Polynome zu sichern. Die zugehörige Elementfamilie wird **Hermite Elementfamilie** genannt. Im weiteren wird der geometrischen Klassifikation gefolgt und es werden nur deren Lagrangesche Elemente betrachtet.

5.4.3.1. Finite Simplex-Elemente.

Wie in den Kapiteln zur Theorie konvexer Zellen bemerkt wurde, bilden die Simplexe die einfachsten konvexen Polyeder. Es ist zu erwarten, daß eine Interpolation auf ihrer Grundlage recht einfach zu beschreiben ist. Es wird sich herausstellen, daß bei besonders günstiger Wahl eines Koordinatensystems - den sogenannten baryzentrischen Koordinaten - eine geometrieunabhängige Formulierung besonders einfach ist.

Auf Grund der Einfachheit von Simplexen, als in einem gewissen Sinne kleinste konvexe Polyeder, bilden sie eine geeignete Grundlage für eine Vielzahl von Interpolationsalgorithmen. Die einfachsten Ansatzfunktionen, die in Zusammenhang mit Simplexen zur Anwendung kommen, sind Polynome verschiedenen Grades. Unter ausschließlicher Verwendung von Informationen (Größen) an den Ecken kann schon eine lineare Variation einer Variablen innerhalb eines Simplexes ausgedrückt werden. Für höherwertige Variationen müssen zusätzliche Stützstelle innerhalb bzw. auf dem Rand des Simplexes hinzugefügt werden.

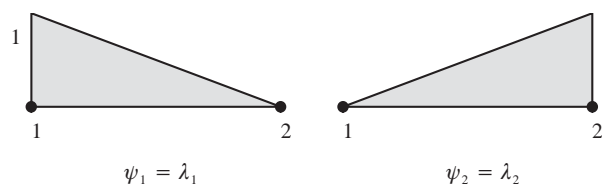


ABBILDUNG 5.4.2. Lineare Ansatzfunktionen für ein 1D-Simplex

Die Beschreibung Finiten Simplex-Elemente erfolgt im allgemeinen auf der Basis der baryzentrischen Koordinaten (Def. 3.1.6) λ_i . Der Raum der Interpolationsfunktionen wird im allgemeinen über die Definition einer Basis spezifiziert. Im Zusammenhang mit der

Finiten Element-Methode werden die Basisfunktionen häufig auch als Ansatzfunktionen bezeichnet.

Im 1-dimensionalen Fall können die baryzentrischen Koordinaten als Längenverhältnisse interpretiert werden. Die Formulierung linearer (Abb. 5.4.2), quadratischer (Abb. 5.4.3) und höherer Ansatzfunktionen ist mit baryzentrischen Koordinaten formal unabhängig von der Länge und Lage der Strecke.

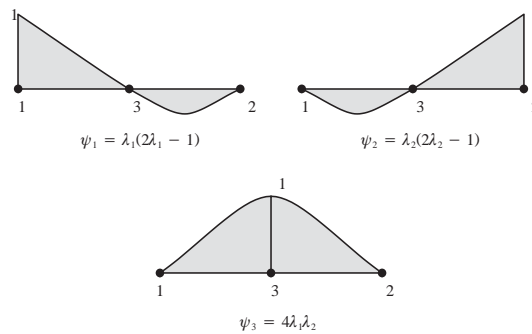


ABBILDUNG 5.4.3. Quadratische Ansatzfunktionen für ein 1D-Simplex

In der Ebene bilden Dreiecke die geometrische Basis der Finiten Simplex-Elemente. Auch hier erfolgt die Unterscheidung in verschiedenen Typen nach dem Grad der Polynome, die zur Interpolation herangezogen werden.

Dreieck-Elemente vom Typ 1 werden auch COURANT-Dreiecke genannt und ermöglichen im Dreieck eine lineare Interpolation. Die Ansatzfunktionen entsprechen beim Typ den baryzentrischen Koordinaten:

$$\psi_1 := \lambda_1, \quad \psi_2 := \lambda_2, \quad \psi_3 := \lambda_3.$$

Dreieck-Elemente vom Typ 2 ermöglichen eine quadratische Interpolation im Dreieck. Sind p^i mit $i = 1, 2, 3$ die Eckknoten des Dreiecks, so werden weitere Punkte auf den Seiten des Dreiecks:

$$p^{ij} := \frac{1}{2} (p^i + p^j)$$

in die Interpolation mit einbezogen. Die Ansatzfunktionen haben dann folgende Form:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \lambda_i (2\lambda_i - 1), \quad i = 1, 2, 3, \\ \psi_{ij} &= 4\lambda_i \lambda_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j. \end{aligned}$$

Dreieck-Elemente vom Typ 3 sind gekennzeichnet durch die Verwendung von Polynomen dritten Grades. Die 10 Freiheitsgrade befinden sich an den Ecken, auf je einem Drittel

der Seiten und im Schwerpunkt des Dreiecks:

$$\begin{aligned} p^i & \quad i = 1, 2, 3, \\ p^{ij} & := \frac{2}{3}p^i + \frac{1}{3}p^j, \quad i \neq j, \\ p^{123} & := \frac{1}{3}(p^1 + p^2 + p^3). \end{aligned}$$

Die 10 Ansatzfunktionen haben dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \psi_i & := \frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2), \quad i = 1, 2, 3, \\ \psi_{ij} & := \frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1) \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j \\ \psi_{123} & := 27 \cdot \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Die Konstruktion von Finiten Simplex-Elementen in höheren Dimensionen erfolgt auf analoge Weise (Abb. 5.4.4).

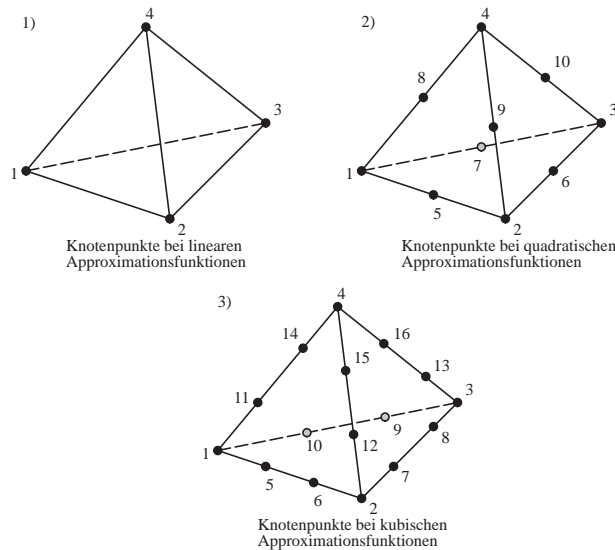


ABBILDUNG 5.4.4. Unterschiedliche Ansätze für Tetraeder

Der Grad der Polynome ist theoretisch nicht beschränkt, praktisch werden jedoch nur Ansätze bis zur Ordnung 3 eingesetzt. Mit Hilfe dieser Ansatzfunktionen können die Zustandsgrößen im Element über die Zustandsgrößen an den ausgezeichneten Knoten angenähert werden. Die Beziehung zwischen den Werten der Zustandsgrößen an den ausgezeichneten Punkten und den Zustandsgrößen an beliebigen Punkten im Element lautet:

$$u = \sum \psi_i \cdot u^i.$$

Der Index i steht hier als Synonym für den Index der Ansatzfunktionen bzw. der Freiheitsgrade.

5.4.3.2. Finite Viereck-Elemente.

Ist das betrachtete Gebiet rechteckig, dann ist es günstig, statt der Dreieck-Elemente Rechteck-Elemente zu verwenden. Man betrachtet ein Gebiet mit einem rechteckigen Netz. Im Gegensatz zu Simplex-Elementen werden bei der Formulierung der Ansatzfunktionen für Rechteckelemente kartesische normierte Koordinaten verwendet. Werden allgemeine Vierecke betrachtet, so lassen sich diese mit Hilfe der Transformation

$$p(\xi, \eta) = p^1 + \xi(p^2 - p^1) + \eta(p^4 - p^1) + \xi\eta(p^3 + p^1 - p^4 - p^2)$$

auf das Einheitsquadrat abbilden.

Die Ansatzfunktionen der *Rechteck-Elemente vom Typ 1* sind gekennzeichnet durch ihre Linearität in den Variablen x und y . Die Freiheitsgrade sind die Werte an den Eckpunkten. Die Ansatzfunktionen sind

$$\begin{aligned}\Psi_1(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ \Psi_2(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \\ \Psi_3(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ \Psi_4(\xi, \eta) &:= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta).\end{aligned}$$

Rechteckelemente werden im allgemeinen nur bis zur Ordnung 3 eingesetzt. Eine Übertragung auf den Würfel mit bilinearen Interpolationen ist einfach zu realisieren.

5.5. Interpolation auf Zellzerlegungen

Im Abschnitt 5.4 Finite Element Interpolationen sind schon zwei Arten von Zellen näher betrachtet worden, nämlich die Simplexe (Dreiecke) und rechteckige Elemente. In Erweiterung der Methode der Finiten Elemente soll in diesem Abschnitt untersucht werden, inwieweit auch andere Zellen und Zellzerlegungen als Grundlage einer Interpolation dienen können.

5.5.1. Grenzmethode.

Die einfachste Methode, um auf Zellzerlegungen zu einer Aussage zu gelangen, ist die Annahme der gebietsweisen Konstanz der zu interpolierenden Größe. Zum einen findet diese Methode ihre Begründung in Treppenfunktionen zur Beschreibung einfacher Funktionen und zum anderen ist diese Methode eine der ersten bei der Erstellung von Boden- und geologischen Karten gewesen, wo äußere Landschaftsmerkmale zu einer Zerlegung der zu beschreibenden Fläche führten. Ein typischer Vertreter dieser Methode ist der Edge-Seeking-Algorithmus, welcher z.B. für die Satellitenbildanalyse genutzt wird. Die Anwendung einer solchen Interpolation auf bathymetrische bzw. topographische Daten führt zu einem gestuften Landschaftsmodell (Abb. 5.5.1).

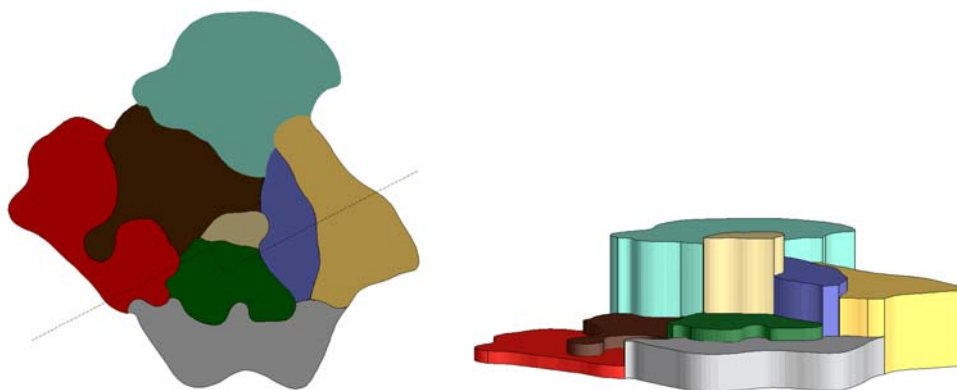


ABBILDUNG 5.5.1. Gestuftes Landschaftsmodell

Liegen keine expliziten Merkmale vor, die zu einer Zerlegung des Raumes führen, so kann unter Einbeziehung einer Abstandsfunktion eine Gebiets-Zerlegung (Voronoi-Zerlegung) generiert werden, auf der dann eine gebietsweise konstante Interpolation vorgenommen werden kann. Bei der so erzeugten Interpolation liegt der größte Nachteil in der Unstetigkeit der Interpolation, was für viele Anwendungen nicht akzeptabel ist (Abb. 5.3.1).

5.5.2. Interpolation auf konvexen Zellen.

Interpolationen auf der speziellen Zelle Simplex basieren auf den baryzentrischen Koordinaten des Simplex. Diese baryzentrischen Koordinaten haben eine sehr anschauliche Interpretation als normierte Flächenanteile. Ihr Verlauf im Inneren des Simplex ist linear. Eine andere Interpolation auf der speziellen Zelle Rechteck wurde im Rahmen der Finiten Element Interpolation vorgestellt. Die verwendeten Einheitskoordinaten sind jedoch andere gewesen als die baryzentrischen Koordinaten. Wünschenswert ist jedoch eine einheitliche Interpolationsvorschrift, die zusätzlich rekursiv aufbaubar ist. Im Rahmen dieses Abschnittes werden zunächst die klassischen Interpolationsvorschriften auf Zellen vorgestellt, bevor der Versuch unternommen wird, eine konsistente Interpolation auf konvexen Zellen zu entwickeln.

5.5.2.1. *Baryzentrische Interpolation.*

Interpolationen auf konvexen Zellen sind auf den ersten Blick nicht so offensichtlich wie dies der Fall bei Simplexen ist. Zwar gibt es im Rahmen von Finite Element Methoden Interpolationen und Approximationen auf anderen Flächen (z.B. Rechtecken), jedoch ist keine allgemeingültige Theorie zur Erweiterung auf beliebige konvexe Polyeder vorhanden.

Wird die spezielle Zelle Simplex betrachtet, so basieren die Interpolationen auf den baryzentrischen Koordinaten. Diese baryzentrischen Koordinaten haben eine sehr einprägsame Interpretation als normierte Flächenanteile. Ihr Verlauf ist im Inneren des Simplex linear. Eine Übertragung auf konvexe Polyeder ist möglich ergibt jedoch keine lineare

Funktion. Besonders negativ ist der Umstand, daß die Interpolationen auf den Kanten abhängig von der Anzahl der die konvexe Zelle bildenden Ecken sind.

Besser ist jedoch eine Interpolation die einen stetigen Übergang zwischen benachbarten Zellen ermöglicht und rekursiv aufbaubar ist. Ein sehr einfacher Ansatz ist die Nutzung der eindeutigen baryzentrischen Zerlegung (Abb. 5.5.2).

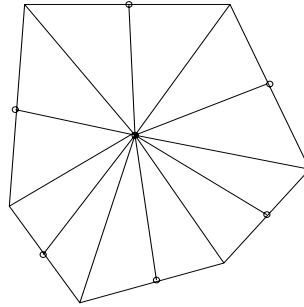


ABBILDUNG 5.5.2. Baryzentrische Zerlegung

Hiernach können die baryzentrischen Koordinaten in jedem Simplex angewendet werden und somit ist eine C^0 -stetige eindeutige Interpolation realisierbar. Nimmt man im Gegensatz hierzu eine beliebige andere simpliziale Zerlegung der konvexen Zelle zu Hilfe, so ist diese im allgemeinen nicht eindeutig, und es kann bei verschiedenen Zerlegungen zu unterschiedlichen Interpolationen kommen (Abb. 5.5.3).

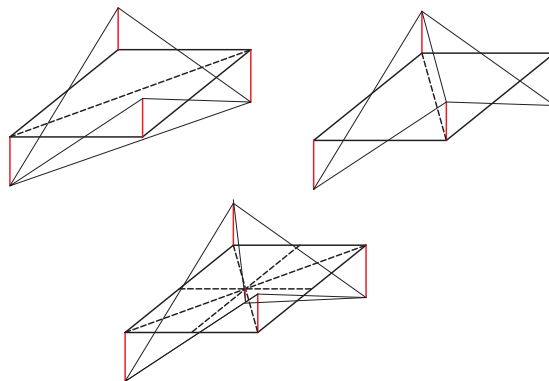


ABBILDUNG 5.5.3. Interpolation auf einer Viereckzelle mit denselben Knotenwerten aber unter unterschiedlichen Simplexzerlegungen

5.5.2.2. *Transfinite Interpolation.*

Bei der Komposition lokaler Finiter Element Interpolaten zur globalen Interpolation werden relativ strenge Stetigkeitsanforderungen an die Übergänge von einem Element zum anderen (mindestens C^0 -Stetigkeit) gestellt. Im vorherigen Abschnitt ist eine Methode vorgestellt worden, bei der eine lokale Interpolation in einem polygonal berandeten Gebiet realisiert worden ist. Bei diesem Verfahren werden jedoch nur die Funktionswerte an den Eckpunkten genau getroffen. Das Aussehen der Interpolationsfunktion auf den Kanten ist jedoch hochgradig vom gewählten (betrachteten) Element abhängig. So kann es vorkommen, daß ein Fünfeck eine gemeinsame Kante mit einem Dreieck besitzt. Nutzt man die rationale finite Interpolation, so hätten die lokalen Interpolanten unterschiedliche Ordnung.

Bei der transfiniten Interpolation wird gefordert, daß nicht nur singuläre Punkte durch die Interpolanten genau getroffen werden, vielmehr soll eine gegebene Funktion auf der gesamten Randkurve bzw -fläche genau wiedergegeben werden. Die Verbindung der Randkurven erfolgt bei der transfiniten Interpolation durch geeignete Bundefunktionen.

5.5.2.3. *Gordon-Coons-Flächen.*

Die Gordon-Coons-Methode kann auf dreieckige, viereckige Parameterbereiche angewendet werden.

Die klassische Interpolation erfolgt auf Viereckelementen. Hierbei soll ein Flächenstück durch die Angabe von Randkurven festgelegt werden. Durch ein Gitter von Randkurven kann dann eine komplexere Fläche erzeugt werden.

Zuerst wird hergeleitet, wie aus vier vorgegebenen Randkurven eine Gordon-Coons-Fläche erzeugt wird.

Für die Herleitung werden ohne Einschränkung der Allgemeinheit einige Vereinfachungen verwendet. Es wird davon ausgegangen, daß ein Flächenstück gesucht wird, das über einem quadratischen Parametergebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ definiert ist. Dabei bezeichnet x die erste und y die zweite Parameterrichtung (Abb. 5.5.4).

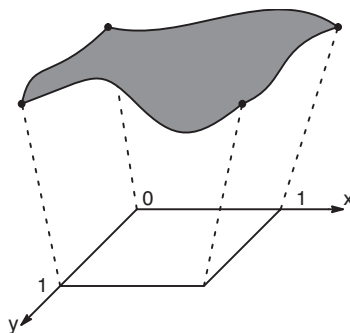


ABBILDUNG 5.5.4. Funktionale Fläche über dem Einheitsviereck

Die vier Randkurven definieren bereits einen Teil der Gesamtfläche. Dieser Teil wird durch eine partiell definierte Funktion F aus dem Parameterraum dargestellt. Für die

Funktion F sind durch die Randkurven die folgenden Werte bekannt:

$$\begin{aligned} F(0, y) &: y \in [0, 1], \\ F(1, y) &: y \in [0, 1], \\ F(x, 0) &: x \in [0, 1], \\ F(x, 1) &: x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Um nun zwischen den Kurven eine Fläche zu interpolieren, werden die Randkurven längs der Parameterrichtungen interpoliert. Die dazu verwendeten Interpolationsfunktionen heißen *blending functions* (Bindefunktionen).

Betrachtet man zunächst die Interpolation zwischen zwei Punkten p^0 und p^1 , so ist diese gegeben durch:

$$P(x) = f_0(x)p^0 + f_1(x)p^1,$$

wobei f_0 und f_1 die Bindefunktionen sind. Damit die Funktion P wirklich zwischen den Punkten interpoliert, muß gelten:

$$\begin{aligned} P(0) &= p^0 \\ P(1) &= p^1. \end{aligned}$$

Dies gilt für allgemeine P_0 und P_1 genau dann, wenn

$$\begin{aligned} f_0(0) &= 1 \quad \text{und} \quad f_1(0) = 0 \\ f_0(1) &= 0 \quad \text{und} \quad f_1(1) = 1. \end{aligned}$$

Beispiele für Bindefunktionen (Abb. 5.5.5) sind:

- lineare Bindefunktionen,
- kubische Bindefunktionen und
- andere Bindefunktionen, zum Beispiel geeignet skalierte und verschobene Sinuskurven.

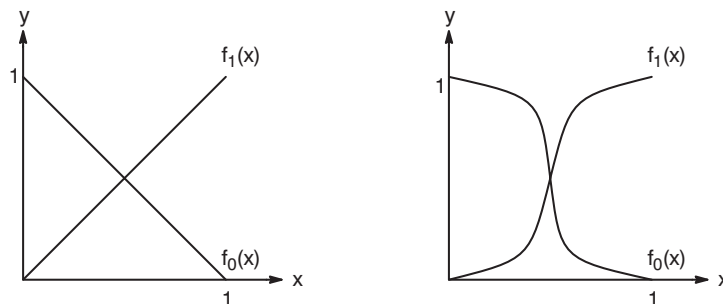


ABBILDUNG 5.5.5. Lineare und kubische Bindefunktionen

Es ist sinnvoll, die Bindefunktionen so zu wählen, daß die Summe 1 ist, da die Interpolation dann bei einfachen Punkten immer eine Gerade ist. Auch bei den kubischen Bindefunktionen ist die Interpolation zwischen zwei Punkten eine Gerade. Die Bindefunktion beeinflusst

hier nur die Länge des Ableitungsvektors. Das wird später beim Aneinandersetzen von Flächenstücken wichtig.

Ziel war es jedoch, nicht nur die Interpolation zwischen zwei Punkten zu realisieren, sondern es sollten Randfunktionen interpoliert werden. Das kann für zwei gegenüberliegende Randkurven leicht erreicht werden:

Gegeben seien zum Beispiel die Randkurven für feste x -Werte, d. h. $F(0, y)$ und $F(1, y)$. Nun wird für jedes y das Punktepaar $F(0, y)$ und $F(1, y)$ wie oben erläutert interpoliert.

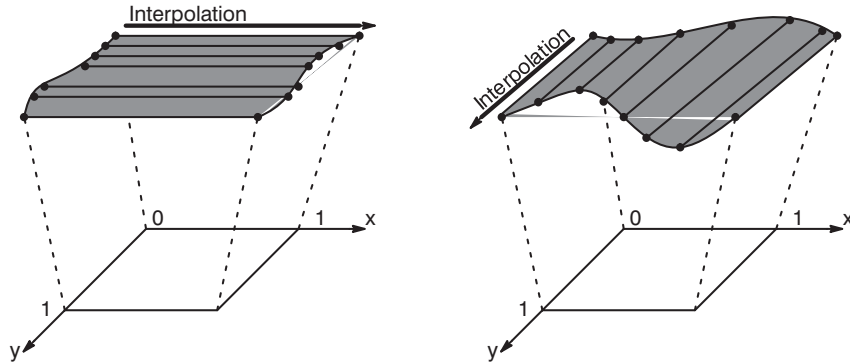


ABBILDUNG 5.5.6. Interpolation von Randfunktionen

Diese Vorgehensweise führt jedoch zu dem Problem, daß bei Interpolation in den verschiedenen Parameterrichtungen verschiedene Flächen als Ergebnis erscheinen (Abb. 5.5.6), d. h. die Ergebnisflächen bei der Interpolation der Randkurvenpaare $(F(x, 0)$ und $F(x, 1))$ bzw. $(F(0, y)$ und $F(1, y))$ sind verschieden

Dies liegt daran, daß die Interpolation bisher nur ein gegenüberliegendes Paar von Randfunktionen interpoliert und das andere außer acht läßt. Damit auch das zweite Randkurvenpaar mit einfließt, muß der entstehende Fehler zu Null gesetzt werden.

Sei nun erst einmal die Interpolation in x -Richtung gegeben, im folgenden mit P_x bezeichnet und da P_x auf F angewandt wird, wird die entstehende Fläche mit $P_x F$ bezeichnet.

Da bisher in x -Richtung interpoliert wird, werden die Randkurven in y -Richtung außer acht gelassen. Dadurch entsteht in y -Richtung ein Fehler, der sich am Rand als die Differenz zwischen den Randkurven mit der Interpolationsfläche $P_x F$ darstellen läßt (Abb. 5.5.7). Also kann am Rand der Fehler durch Addition des Korrekturgliedes $F - P_x F$ entfernt werden.

Nun muß noch berücksichtigt werden, daß die Korrektur nicht nur für die Randkurven erfolgen soll, sondern auch für alle Interpolationen in x -Richtung, das heißt für alle x -Werte in $(0, 1)$. Dort ist jedoch die Funktion bisher nicht definiert. Deshalb wird nun das Korrekturglied noch in y -Richtung interpoliert, wobei wir die Interpolation in y -Richtung mit P_y bezeichnen. Dadurch erhalten wir ein neues Gesamtkorrekturglied:

$$P_y(F - P_x F) = P_y F - P_y P_x F.$$

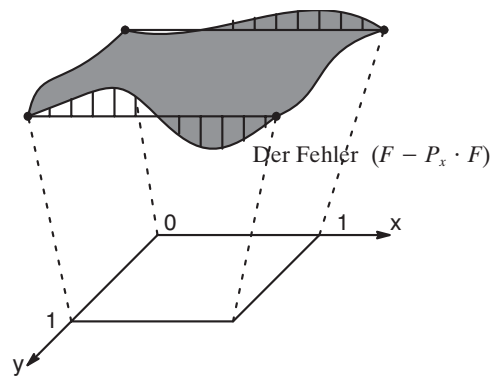


ABBILDUNG 5.5.7. Korrekturglied der Gordon-Coons-Fläche

Somit ergibt sich für die Gesamtfläche, die wir zur besseren Unterscheidung zur partiell definierten Funktion F mit Q bezeichnen, durch Addition des Gesamtkorrekturgliedes zu $P_x F$:

$$Q = P_x F + P_y F - P_y P_x F.$$

Diese Formel läßt sich auch in Vektorschreibweise ausdrücken. Dabei werden die Interpolationsoperatoren P_x und P_y als Vektoren von Binfunktionen geschrieben:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \begin{pmatrix} F(x, 0) & F(x, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(y) \\ f_1(y) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0, y) \\ F(1, y) \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F(0, 0) & F(0, 1) \\ F(1, 0) & F(1, 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0(y) \\ f_1(y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit kann also zu vier gegebenen Randkurven eine Fläche interpoliert werden.

5.5.3. Interpolationen auf Voronoi-Zerlegungen.

Natürliche Nachbarschaftskordinaten wurden durch Sibson [166] als Mittel zur Dateninterpolation und -glättung vorgestellt. Die Interpolation auf Voronoi-Zerlegungen stellt eine Verallgemeinerung der obigen Interpolation dar. Offenbar stellen die so definierten Ansatzfunktionen (Basisfunktionen) Interpolationsfunktionen dar.

Die Sibson-Interpolation ist gekennzeichnet durch die Generierung einer teilweisen quadratischen Interpolation aus den Informationen benachbarter Punkte [167].

Die Voronoi-Zerlegung liefert die Information, welche Punkte benachbart sind und damit zur Funktionswertinterpolation beitragen können (Abb. 5.5.8). Die Gewichtung der Einflüsse der Nachbarn über die Voronoi-Zellen-Fläche ermöglicht eine teilweise quadratische Interpolation.

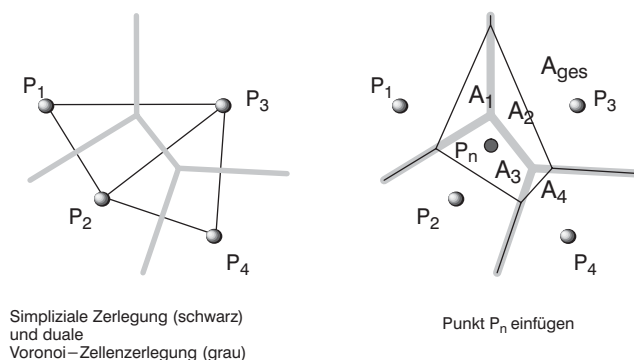


ABBILDUNG 5.5.8. Teilflächen der Sibson-Interpolation

Betrachtet man die duale Struktur zur Voronoi-Zerlegung, nämlich die Delaunay-Triangulation, so kann man feststellen, daß bei dieser Interpolation nicht nur die Information des Dreieckes eingehen, in dem der Punkt liegt, vielmehr geht die Information einer ganzen Region ein:

$$f(P) = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot f(P_i)}{\sum_{i=1}^4 A_i}.$$

Die Wirkung läßt sich sehr gut am Beispiel eines Netzes mit 4 Punkten verdeutlichen (Abb. 5.5.9). Betrachtet man auf der anderen Seite die zufällig gewählte Punktmenge, die als Vergleichsdaten in diesem Kapitel verwendet werden, so fällt auf, daß die Sibson-Interpolation eine wesentlich glattere Interpolation erzeugt (Abb. 5.5.10) als dies bei der linearen Interpolation auf einem Dreiecksnetz (Abb. 5.4.1) der Fall ist.

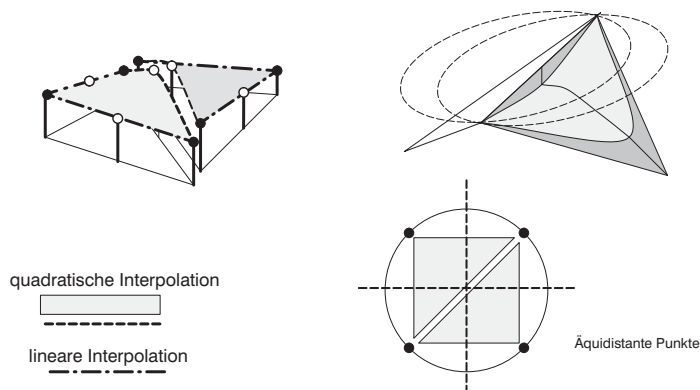


ABBILDUNG 5.5.9. Sibson-Interpolation auf einem Quadrat

5.6. Netzfremde Interpolationen

Die Erzeugung strukturierter bzw. unstrukturierter Netze (Gebietszerlegungen) ist häufig aufwendig und kann durch ungünstige Wahl zu falschen Interpolationen führen.

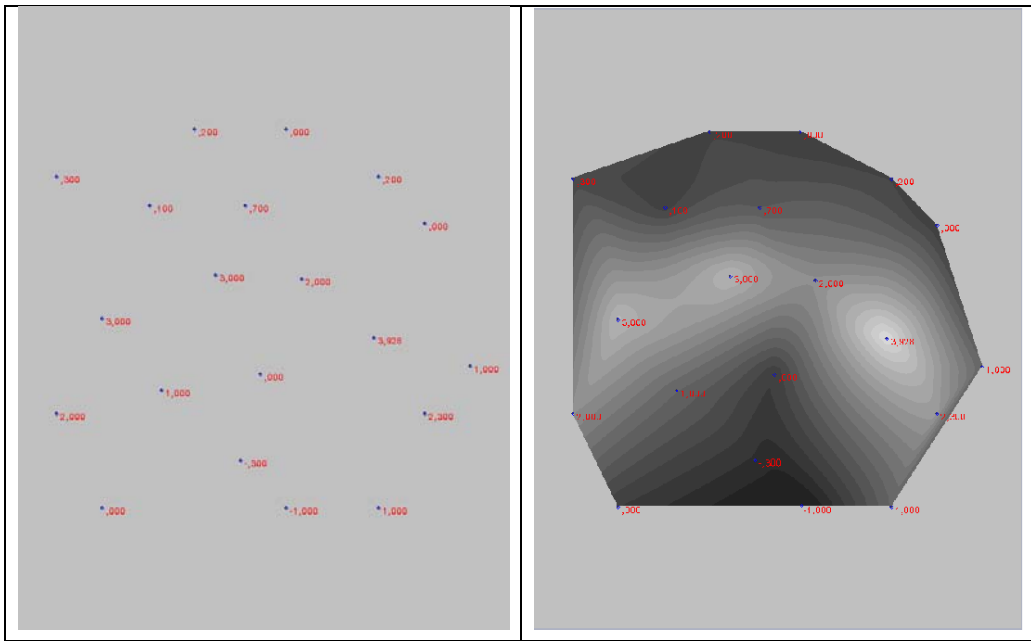


ABBILDUNG 5.5.10. Sibson-Interpolation

Es liegt nahe, die explizite Strukturangabe in Form von zugrundeliegenden Netzen durch implizite Algorithmen zu ersetzen. Interpolationsvorschriften ohne zugrundeliegende Gebietszerlegungen werden netzfreie Interpolationsverfahren genannt.

Ein wesentliches Problem bei netzfreien Interpolationen ist die Bestimmung von Einflußbereichen der Funktionswerte und deren Wirkung in ihrer Umgebung. Es wird an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß die Wahl der Wirkungsbereiche wesentlich den Charakter (lokal oder global) der Interpolation bestimmt. Grundlage vieler dieser Methoden ist der Abstandsbegriff bzw. das Maß eines Gebietes.

In diesem Abschnitt sollen die wesentlichsten netzfreien Interpolationsmethoden dargestellt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird eine zu interpolierende reellwertige Funktion $f(p)$ angenommen. Die Funktion f ist auf einer Teilmenge Ω eines Raumes M definiert. Innerhalb dieses Gebietes sei eine Menge von Punkten p^i mit $i = 1, \dots, N$ gegeben. Mit $f_i = f(p^i)$ werden die zugehörigen Funktionswerte bezeichnet. Weitere Voraussetzungen werden im Rahmen der vorzustellenden Methoden spezifiziert.

Die einfachsten Interpolationsverfahren verwenden gewichtete Linearkombinationen von in der Nähe gelegenen Funktionswerten, um den Wert an einem Punkt p zu interpolieren: $\bar{f}(p) = w_1 f(p^1) + w_2 f(p^2) + \dots + w_n f(p^n)$. Das Interpolationsproblem besteht nun darin, die Gewichte w_i so zu wählen, daß eine „gute“ Interpolation erreicht wird. Um jedoch die Qualität einer Interpolation genau zu quantifizieren, müßte der wahre Wert an der zu interpolierenden Stelle bekannt sein, was er im allgemeinen nicht ist. Aus diesem Grund werden häufig vereinfachende Annahmen getroffen. Eine solche pragmatische Herangehensweise ist die, Werten, die in der Nähe des zu interpolierenden Punktes liegen, ein

größeres Gewicht zuzuordnen als weiter entfernten. Dies beruht auf der implizierten Annahme der Stetigkeit der abhängigen Größe: Werte in der Nähe sind ähnlicher als weiter entfernt liegende. Diese Herangehensweise wird bei der klassischen netzfreien Interpolation in Form der Shepard-Interpolation verwendet. Im Verlauf dieses Kapitels wird auf die gleitende Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate eingegangen sowie auf die *Smooth Particle Hydrodynamic Method* (SPH). Am Ende dieses Abschnittes wird darauf eingegangen, daß die *Natural Element Method* als Interpolationsvorschrift auf Voronoi-Diagrammen auch als eine netzfreie Methode aufgefaßt werden kann.

Ein klassisches Anwendungsgebiet netzfreier Interpolationsmethoden ist die *scattered data interpolation*. Um einen vollständigeren Überblick zu erhalten, wird auf [70] und [149] verwiesen. In Erweiterung von netzfreien Interpolationsmethoden werden diese in Zukunft immer mehr zur Lösung von Approximationsaufgaben eingesetzt [82], [118].

5.6.1. Shepard-Interpolation.

Voraussetzung für die Einsetzbarkeit der im folgenden dargestellten Interpolationsmethode ist das Zugrundeliegen eines metrischen Raumes M . Ausgehend von einer vorgegebenen Menge von Punkten eines metrischen Raumes M , denen je eine reelle Zahl zugeordnet ist, wird eine Methode vorgestellt, die die Schätzung der zu erwartenden Werte bei allen anderen Elementen des metrischen Raumes geben.

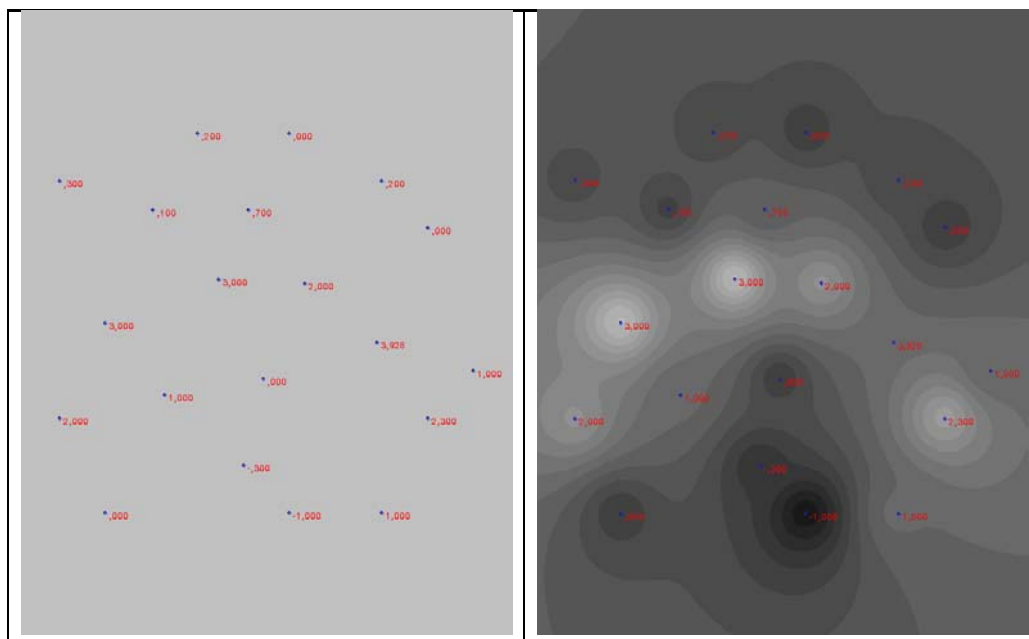


ABBILDUNG 5.6.1. Shepard-Interpolation ($\mu = 2$)

Ein bekannter Ansatz zur Beschreibung von flächigen Daten kommt aus den Bereichen der Meteorologie und Geologie und ist als Shepard-Methode [164] bekannt geworden.

Nutzt man ausschließlich die Eigenschaft, daß zwischen zwei Punkten ein Abstand definiert ist, kann die interpolierende Funktion $\bar{f}(p)$ als gewichteter Mittelwert der abhängigen $f(p^i)$ aufgefaßt werden

$$\bar{f}(p) = \sum_{i=1}^N \omega_i(p) \cdot f(p^i)$$

mit den Basisfunktionen (Gewichtsfunktionen)

$$\omega_i(p) = \frac{\sigma_i(p)}{\sum_{j=1}^N \sigma_j(p)}$$

und der inversen Abstandsfunktion

$$\sigma_i(p) = \frac{1}{d(p, p^i)^{\mu_i}} ; \mu_i \in \mathfrak{R}^+,$$

wobei d im allgemeinen eine Metrik ist. Der Einfluß der Ordinate $f(p^i)$ auf den Wert von $\bar{f}(p)$ am Punkt p nimmt mit dem Abstand zu p^i ab (*inverse distance weighted method*) (Abb. 5.6.1). Interessant ist bei diesem Ansatz die Wirkung des Parameters μ_i auf das Verhalten der Interpolationskurve in der Nähe der Stützstellen (Abb. 5.6.2). Es gilt:

- für $0 < \mu_i < 1$ hat die Shepard-Funktion an den Stellen p^i Spitzen,
- für $\mu_i = 1$ hat die Shepard-Funktion an den Stellen p^i Ecken und
- für $\mu_i > 1$ sind die Tangentialebenen an den Stellen p^i horizontal (Flachpunkte). Die entstehenden Interpolationen haben ein glattes Erscheinungsbild.
- Wird der Grenzübergang $\mu_i \rightarrow \infty$ für alle Datenpunkte gleichzeitig betrachtet, so geht diese Interpolation in die bereichsweise konstante Interpolation aus Abschn. 5.3 über.

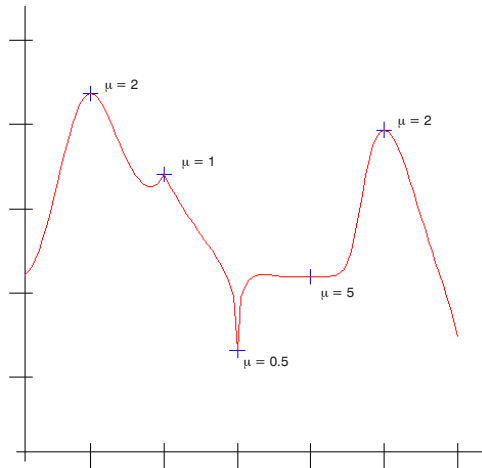


ABBILDUNG 5.6.2. Shepard-Interpolation mit verschiedenen μ Werten

Um eine Division durch 0 bei der Bestimmung von σ_i und numerische Instabilitäten zu vermeiden, sollte die Berechnung der Basisfunktionen $\omega_i(p)$ durch

$$\omega_i(p) = \frac{\prod_{j \neq i} d(p, p^j)^{\mu_i}}{\sum_{k=1}^N \prod_{j \neq k} d(p, p^j)^{\mu_i}}$$

ersetzt werden.

Neben der Stabilisierung der Shepard-Interpolation legt diese Darstellung eine Übertragung des rekursiven Aufbaus der Newton-Interpolation auf die Shepard-Interpolation nahe. Beschreibt $f_{n-1}(p)$ eine Shepard-Interpolation der Daten f_i mit $i = 1, \dots, n-1$, zu denen ein weiterer Datenpunkt hinzugefügt werden soll, so lautet die Rekursionsformel zur Ermittlung von f_n :

$$f_n(p) := f_{n-1}(p) + E_n(p) \cdot F_n$$

mit

$$\begin{aligned} E_1(p) &:= 1 \\ E_k(p) &:= \frac{\prod_{i=1}^{k-1} d(p, p^i)^\mu}{\sum_{j=1}^k \prod_{i \neq j} d(p, p^i)^\mu} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_1 &:= f_1 \\ F_2 &:= f_2 - f_1(p^2) \\ F_k &:= f_k - f_{k-1}(p^k). \end{aligned}$$

Um den globalen Charakter der Shepard-Interpolation in einen lokalen zu wandeln, gibt es neben der eben beschriebenen Rekursionsformel weitere Herangehensweisen.

Die einfachste Methode eine Shepard-Interpolation lokal zu gestalten, ergibt sich durch die Einbeziehung von nur denjenigen Punkten die innerhalb eines Kreises liegen bzw. durch die Festlegung einer Anzahl von Punkten, die herangezogen werden sollen. Eine sehr verbreitete Methode, die Interpolation lokal zu gestalten ist die Gewichtsfunktion mit einer Dämpfungsfunktion g zu multiplizieren. Hierbei muß g die folgenden Eigenschaften besitzen: an den vorgegebenen Punkten muß die Dämpfungsfunktion Eins sein und in einer Umgebung des betrachteten Punktes im Intervall von Null bis Eins liegen. Außerhalb der vorgegebenen Kreisscheibe mit dem Radius r verschwindet die Dämpfungsfunktion. Ein Beispiel einer solchen Gewichtsfunktion ist das Frank-Little Gewicht [25]

$$g(p) = \begin{cases} \left(1 - \frac{d(p, p^i)}{r}\right)^\mu & : d_i \leq r \\ 0 & \end{cases}$$

Auf Grund der engen Verknüpfung der Shepard-Interpolation mit der verwendeten Metrik erscheint es unumgänglich, deren Einfluß genauer zu spezifizieren.

Auftretende Ableitungsunstetigkeiten bzw. Flachpunkte können durch die Verwendung anderer Abstandsfunktionen beseitigt werden. Dies wird häufig durch eine konsistente

Modifikation der Basisfunktionen ω_i unter Verwendung veränderter Abstandsfunktionen σ_i realisiert. Typische Klassen von Abstandsfunktionen die zum Einsatz kommen sind:

- Lineare Abstandsfunktionen

$$\frac{1}{\sigma_i(p)} := \alpha_i \cdot d(p, p^i),$$

- Potenzfunktionen

$$\frac{1}{\sigma_i(p)} := \alpha_i \cdot d(p, p^i)^{\mu_i},$$

- Exponentielle Abstandsfunktionen

$$\frac{1}{\sigma_i(p)} := e^{\alpha_i \cdot d(p, p^i)} - 1,$$

- Hyperbolische Abstandsfunktionen

$$\frac{1}{\sigma_i(p)} := \cosh(\alpha_i \cdot d(p, p^i)) + \sinh(\alpha_i \cdot d(p, p^i)).$$

Diese auf den ersten Blick willkürliche Auswahl von Interpolationsfunktionen wird im Abschnitt 5.7 über Kriging nochmals aufgegriffen. Auch für die oben aufgeführten Klassen von inversen Abstandsfunktionen gibt es Möglichkeiten, einen lokalen Charakter der Interpolation zu erzwingen. Hierauf soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, sondern es wird auf den Abschnitt 5.7 verwiesen.

Wird die Forderung, daß $\frac{1}{\sigma_i(p)} = 0$ für $p^i = p$ gilt, fallen gelassen, so wird aus dem exakten Interpolator der Shepard-Methode eine Approximationsmethode. Für die Abstandsfunktion

$$\sigma_i(p) = \frac{1}{d(p, p^i)^{\mu_i} + c} ; \mu_i \in \mathbb{R}^+$$

sind die Ausgleichsfunktionen für verschiedene c in der Abbildung 5.6.3 dargestellt. Auf analoge Weise können alle anderen beschriebenen Abstandsfunktionen modifiziert werden, um eine ganze Klasse von abstandsabhängigen Approximationen (Ausgleichsfunktionen) zu erhalten.

Anwendungen der Shepard-Interpolation .

Die Shepard-Interpolation stellt ein mächtiges Werkzeug bei der Interpolation von Meßdaten dar. Sie ist gekennzeichnet durch ihre besonders einfache Interpolationsvorschrift und bei geeigneter Wahl der Abstandsfunktion durch ein sehr glattes Erscheinungsbild der interpolierten Größe. Im Rahmen dieser Arbeit soll jedoch eher der Einsatz dieser Interpolationsmethode im Rahmen von numerischen Modellen betrachtet werden. Auf die Modellierung bathymetrischer Daten im Rahmen von Simulationssystemen in der Hydromechanik wird in einem späteren Abschnitt 6.1 noch näher eingegangen. Neben der wesentlichen Randbedingung Gewässerboden, werden die Simulationen bestimmt durch Anfangswerte und Randbedingungen, die die Einbettung des Untersuchungsgebietes in seine globale Umgebung darstellen. An dieser Stelle soll die Shepard-Interpolation für

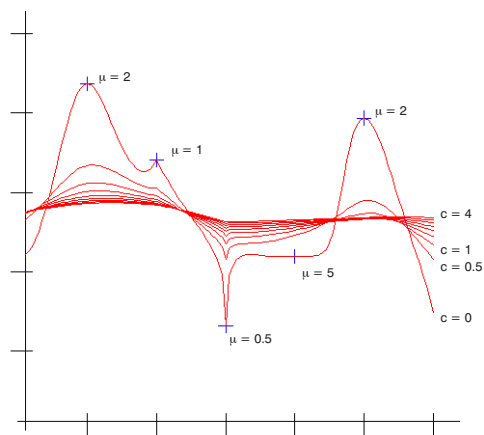


ABBILDUNG 5.6.3. Glättende Shepard-Approximation

die Erzeugung von Anfangswerten im Rahmen von Rand-Anfangswertaufgaben und die Adaption von Randwerten eingesetzt werden.

Eine der klassischen Anwendungen im Rahmen von numerischen Simulationen im Küsteningenieurwesen ist die Generierung von Anfangswerten, falls solche nicht oder nur unvollständig aus übergeordneten Modellen zur Verfügung stehen. Stehen beispielsweise nur die Randwerte zur Generierung eines Anfangszustandes zur Verfügung, so kann die Lage des Wasserspiegels aus den Werten an der Randkurve über eine Shepard-Interpolation angenähert werden (Abb. 5.6.4). Für die Interpolation von Anfangsgeschwindigkeiten in einem Gebiet mit sehr komplexer Bathymetrie ist eine Interpolation aus den Randwerten wesentlich schwieriger, wenn nicht sogar unmöglich. Dies liegt im wesentlichen daran, dass die entstehenden Strömungsverteilungen in einem Untersuchungsgebiet viel stärker von der zugrundeliegenden Bathymetrie abhängen als die Wasserstände und zum anderen daran, daß die Lage des Wasserstandes eine wesentliche treibende Kraft darstellt, die ja wiederum nur geschätzt werden kann.

In Analogie zur n -dimensionalen **Parameterinterpolation** auf der Basis von Zellzerlegungen können Parameterinterpolationen in natürlicher Weise durch netzlose Methoden realisiert werden. Bei solchen Interpolationsaufgaben ist immer zu überlegen, welche Abstandsfunktion zugrunde gelegt wird. Häufig ist es sinnvoll, besonders bei stark gekrümmten funktionalen Flächen, nicht die Metrik des Parameterraumes zu verwenden, sondern die Metrik des gemeinsamen Raumes aus Parameterraum und funktionalem Raum.

5.6.2. Gleitendes Interpolationsverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die englische Bezeichnung *inverse distance weighted method* für die Shepard-Methode legt es nahe, eine Verallgemeinerung dahingehend durchzuführen, allgemeine gewichtete Interpolationsmethoden zu betrachten.

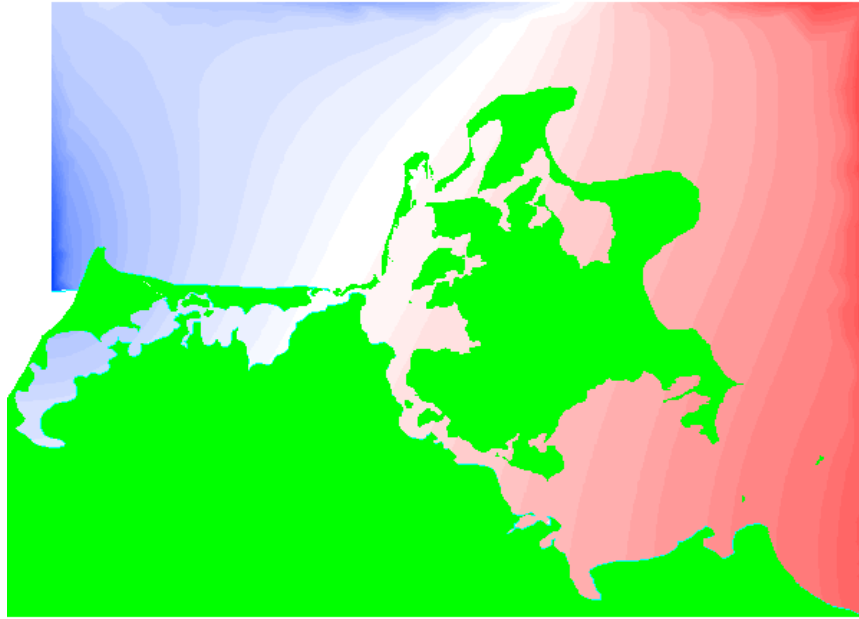


ABBILDUNG 5.6.4. Interpolierte Wasserstände aus den Randwerten

Der Interpolant \bar{f} einer Funktion f in einem Untersuchungsgebiet Ω wird formal wie folgt definiert:

$$(5.6.1) \quad f(p) \approx \bar{f}(p) := \sum_{i=1}^m \varphi_i(p) \cdot a_i(p) = [\varphi] \{a\}.$$

Hierbei sind φ_i zunächst m noch unbekannte Basisfunktionen (Häufig werden diese in Polynomform dargestellt). Die a_i werden als Koeffizienten bezeichnet, diese sind nicht konstant, sondern Funktionen des Ortes p . Die Spezifikation der Koeffizienten erfolgt über die Methode der kleinsten Quadrate:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j=1}^n w_j \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i(p^j) \cdot a_i(p^j) - f(p^j) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n w_j \left([\varphi^j] \cdot \{a\} - f^j \right)^2, \end{aligned}$$

wobei w_i Wichtungsfunktionen sind, m die Anzahl der Basisfunktionen und n die Anzahl der betrachteten Knoten. Fordert man nicht unbedingt das Verschwinden des Residuums, sondern begnügt sich damit, daß der Fehler minimal wird, was gleichbedeutend mit $\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0$

für alle k ist, so ergibt sich das folgende System von Gleichungen

$$(5.6.2) \quad 0 = \sum_{j=1}^n w_j (\varphi_k(p^j) \cdot a_k(p^j)) \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i(p^j) \cdot a_i(p^j) - f(p^j) \right) \quad \forall k$$

bzw.

$$(5.6.3) \quad \sum_{j=1}^n w_j [\varphi^i]^T [\varphi^i] \{a\} = \sum_{j=1}^n w_j [\varphi^i]^T f_j .$$

Werden folgende Matrizen

$$(5.6.4) \quad [A] := \sum_{j=1}^n w_j [\varphi^i]^T w_j [\varphi^i]^T [\varphi^i]$$

$$(5.6.5) \quad [B] := [w_j [\varphi^i]^T]$$

eingeführt, so wird aus Gl. 5.6.3:

$$(5.6.6) \quad [A] \{a\} = [B] \{f\} .$$

Für das weitere Vorgehen wird $|[A]| \neq 0$ vorausgesetzt, was ermöglicht, die unbekannt Parameter $\{a\}$ zu bestimmen. Werden die Koeffizienten in Gl. 5.6.3 eingesetzt, so erhält man

$$(5.6.7) \quad \bar{f} = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot f_i$$

mit

$$(5.6.8) \quad \phi_i = \sum_{j=1}^m \varphi_j ([A]^{-1} [B])_{ji} .$$

Die Funktion ϕ_i wird auch als Formfunktion des Knoten i bezeichnet.

Werden als Basisfunktionen φ_i die Polynome der Ordnung 0 verwendet, was bedeutet, daß es genau eine solche Basisfunktionen mit dem konstanten Wert 1 überall gibt, so haben die Formfunktionen ϕ_i das folgende Aussehen:

$$\phi_i(p) = \frac{w_i(p)}{\sum_{j=1}^N w_j(p)},$$

was wiederum genau der Shepard-Interpolation entspricht.

In Analogie zur Multiplikation der Basisfunktionen mit einer Dämpfungsfunktion im Rahmen der Shepard-Interpolation kann auch der globale Charakter der gleitenden Interpolation in einen lokalen gewandelt werden.

5.6.3. Smooth Particle Hydrodynamic Method.

Die älteste netzfreie Methode ist die *Smooth Particle Hydrodynamic Method* (SPH). Diese Methode wurde ursprünglich in der Astrophysik zur Beschreibung von Mehrkörperproblemen und kollabierenden Gaswolken entworfen.

Die folgende Einführung in die SPH-Methode orientiert sich an der von Libersky et al. [116]. Ausgangspunkt der Überlegungen war, daß Informationen über den Zustand eines Kontinuums nur an diskreten Punkten, den Stützstellen, vorliegen. Die Idee besteht darin, daß angenommen wird, daß der Wert an einem beliebigen Punkt im Mittel von den Werten der ihn umgebenden Zustandsgrößen abhängt. Ausgehend von einer kontinuierlichen Funktion $f(p)$ wird eine Kernel-Approximation in folgender Form definiert:

$$(5.6.9) \quad \bar{f}(p) := \int_{\Omega} w(d(p, q), h) \cdot f(q) d\Omega_q,$$

wobei über das Gebiet Ω bezüglich der Variable q integriert wird. Die Wichtungsfunktion w wird im weiteren auch häufig als Kernel-Funktion bezeichnet und hängt zum einen vom Abstand der betrachteten Punkte p und q ab als auch von einem weiteren Parameter h , der den Einflußbereich des Punktes p kennzeichnen soll. Die Kernel-Funktionen w müssen folgenden Anforderungen genügen (vgl. [34]):

1. $w(d(p, q), h) > 0$ auf einem Teilgebiet Ω_q .
2. Die Kernel-Funktion hat eine begrenzte Reichweite (einen kompakten Träger): $w(d(p, q), h) = 0$ außerhalb von Ω_q .
3. w ist normiert: $\int w d\Omega = 1$.
4. $w(s, h)$ ist monoton fallend in s .
5. $w(s, h) \rightarrow \delta(s)$ wenn $h \rightarrow 0$, wobei $\delta(s)$ die Dirac'sche Deltafunktion ist.

Ausgehend von diesen sehr allgemein gehaltenen Anforderungen an die Wichtungsfunktionen der SPH werden in der Praxis Wichtungsfunktionen mit folgendem funktionalen Zusammenhang $w(d(p, p^i), \mu)$ verwendet. Hierbei ist d eine Abstandsfunktion und μ das „Volumen“¹ der Trägermenge der Wichtungsfunktion. Beispielsweise kann d der Metrik entsprechen. Besonders erwähnenswert ist die Tatsache, daß die Trägermengen der Wichtungsfunktionen nicht disjunkt sein müssen.

Bei der SPH wird von folgendem Ansatz ausgegangen

$$(5.6.10) \quad \bar{f}(P) = \sum w(d(p, p^i), \mu(\text{supp}(w))) \cdot f_i \cdot \mu(\text{supp}(w)).$$

Neben kubischen und quadratischen Spline-Funktionen ist die Exponentialfunktion ein typischer Repräsentant für solche Wichtungsfunktionen:

$$(5.6.11) \quad w = \begin{cases} e^{-\left(\frac{d(P, P^i)}{r_i \cdot \alpha}\right)^2} & \frac{d(P, P^i)}{r_i} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

BEISPIEL: 1-dimensionaler Fall

¹Wenn im folgenden vom Volumen die Rede ist, so ist das entsprechende Maß (Länge, Fläche, Volumen,...) des betrachteten Parameterraumes gemeint.

Nutzt man eine Dreiecksfunktion (Abb. 5.6.5) in Anlehnung an die Interpolation bei 1-dimensionalen Finiten Elementen, so sollte wieder die Finite Element Interpolation wie sie in Abschnitt 5.4 beschrieben wurde herauskommen

$$w_i(P) := \begin{cases} \frac{1}{x_{i+1}-x_{i-1}} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot |P-x_i|}{x_{i+1}-x_{i-1}}\right) & P > x_{i+1} \parallel P < x_{i-1} \\ 0 & \end{cases} .$$

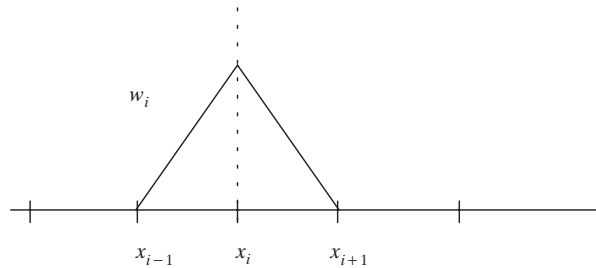


ABBILDUNG 5.6.5. Lineare Wichtungsfunktion für den 1d-Fall

Eine Verallgemeinerung / Spezialisierung erfährt diese Methode in der natürlichen Element Interpolation. Der Träger der Wichtungsfunktion ist in diesem Fall der Voronoi-Kreis.

5.6.4. Natural Element Interpolation.

Die natürliche Element Interpolation stellt eine Erweiterung der Sibson-Interpolation dar. Sibson [166] führte zur Interpolation und Glättung von Daten das Konzept der natürlichen Nachbarschaftskordinaten ein. Neben der Nutzung der Beziehung, nächster Nachbar zu einem Punkt zu sein, in Form von Voronoi-Diagrammen, kamen Voronoi-Diagramme höherer Ordnung zum Einsatz. Im weiteren wird mit $\mu(M)$ das Lebesgue-Maß der Menge M (Länge, Fläche, Volumen, ..) bezeichnet. Im zwei-dimensionalen euklidischen Raum ist das betrachtete Maß der Flächeninhalt $A(M)$.

DEFINITION 5.6.1. Unter den **natürlichen Nachbarschaftskordinaten** ϕ_i eines Punktes p bezüglich einer gegebenen Punktmenge $\{p^i\}$ mit $i = 1, \dots, N$, versteht man folgende Zahlen:

$$(5.6.12) \quad \phi_i(p) := \frac{\mu(VR(p, p^i))}{\mu(VR(p))},$$

wobei $VR(p)$ die Voronoi-Region des Punktes p (Abschn. 2.4.1) und $VR(p, p^i)$ die der Ordnung Zwei bezüglich dem zusätzlichen Punkt p^i (Abschn. 4.2.2) ist. Sollen diese Koordinaten bei der Formulierung von Approximationsaufgaben eingesetzt werden, so ist häufig die Bestimmung der partiellen Ableitungen notwendig.

Ableitung der natürlichen Nachbarschaftskordinaten

$$(5.6.13) \quad \frac{\partial \phi_i(p)}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial \mu(VR(p^i, p))}{\partial x_j} - \phi_i(p) \frac{\partial \mu(VR(p))}{\partial x_j}}{\mu(VR(p))}.$$

EIGENSCHAFTEN: Die erste Eigenschaft der natürlichen Nachbarschaftskordinaten ergibt sich als direkte Folgerung aus der Eigenschaft, daß die Vereinigung der Voronoi-Regionen zweiter Ordnung $VR(p, p^i)$ die Voroni-Region von p ergibt:

$$(5.6.14) \quad 0 \leq \phi_i(p) \leq 1.$$

Wie man sieht, nehmen die Koordinaten an den Bezugspunkten den Wert Eins an und alle andern natürlichen Koordinaten verschwinden

$$(5.6.15) \quad \phi_i(p^j) = \delta_{ij}.$$

Die natürlichen Nachbarschaftskordinaten stellen Zerlegung der Einheit dar

$$(5.6.16) \quad \sum_{i=1}^N \phi_i(p) = 1.$$

Die soeben aufgeführten Eigenschaften legen es nahe, die natürlichen Nachbarschaftskordinaten, als Funktionen des Ortes, als Ansatzfunktionen (Formfunktionen) für Interpolationsaufgaben zu verwenden.

DEFINITION 5.6.2. Die **natürliche Element Interpolierende** \bar{f} einer Funktion f bezüglich einer gegebenen Punktemenge $\{p^i\}$ mit $i = 1, \dots, N$ ist die wie folgt definierte Funktion:

$$\bar{f}(p) := \sum_{i=1}^N \phi_i(p) \cdot f(p^i).$$

EIGENSCHAFTEN:

- Eine Konsequenz aus Gl. 5.6.15 ist die Interpolationseigenschaft mit $\bar{f}(p^i) = f(p^i)$.
- Die Eigenschaft aus Gl. 5.6.16 impliziert, daß konstante Funktionen durch die natürliche Element Interpolation exakt wiedergegeben werden können.
- Lineare Vollständigkeit: Sibson [166] hat gezeigt, daß die natürlichen Nachbarschafts-Ansatzfunktionen die Eigenschaften der lokalen Koordinaten erfüllen, d.h. es gilt:

$$(5.6.17) \quad p = \sum_{i=1}^N \phi_i(p) \cdot p^i.$$

Andererseits bedeutet dies, daß die Ansatzfunktionen die geometrischen Koordinaten exakt wiedergeben können.

Aufbauend auf der natürlichen Element Interpolation wurden Approximationen für partielle Differentialgleichungen entwickelt. Sowohl die Interpolationen als auch die Approximationen auf der Basis einer natürlichen Element-Zerlegung werden unter der Bezeichnung Natürliche Element Methode (NEM) zusammengefaßt.

5.6.4.1. Interpolation im 1-dimensionalen Fall.

Es wird sich herausstellen, daß im 1-dimensionalen Fall die natürliche Nachbarschaftsinterpolation, wie sie hier beschrieben wurde, mit den linearen Finiten Elementen identisch ist.

Im folgenden wird eine Gerade der Länge L betrachtet, die mit N nicht gleichmäßig verteilten Knoten diskretisiert ist. Es ist einleuchtend, daß die Voronoi-Grenze genau in der Mitte zweier benachbarter Punkte liegt. Ein Konsequenz aus dieser Beobachtung ist, daß alle Punkte auf der offenen Geraden $(0, L)$ genau zwei Nachbarn haben, mit Ausnahme der Randpunkte, die nur einen Nachbarn besitzen. Um die Ansatzfunktion zu berechnen, wird ein Abschnitt Ω_i betrachtet, der von zwei Knoten p^i und p^{i+1} begrenzt wird. Betrachtet man einen Punkt P aus dem Intervall $[p^i, p^{i+1}]$ und die zugehörigen Voronoi-Zellen zweiter Ordnung, so erhält man

$$\phi_i(p) = \frac{d(p, p^i)}{d(p^{i+1}, p^i)}$$

$$\phi_{i+1}(p) = \frac{d(p, p^{i+1})}{d(p^{i+1}, p^i)},$$

was andererseits bedeutet

$$\phi_1(\lambda) = 1 - \lambda, \quad \phi_2(\lambda) = \lambda.$$

Dies entspricht einer 1-dimensionalen linearen Finiten Element Interpolation (Abb. 5.6.6).

- Voronoi-Knoten + Voronoi-Grenze

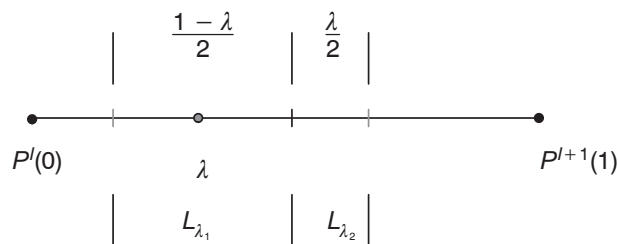


ABBILDUNG 5.6.6. Natürliche Nachbarschaftskoordinaten im 1-dimensionalen Fall

5.6.4.2. *Interpolationen im 2-dimensionalen Raum.*

Die natürliche Element Interpolation wird häufig in der Ebene hergeleitet und die wesentlichen Eigenschaften dort erklärt. Dies ist im wesentlichen auf die sehr guten Darstellungsmöglichkeiten zurückzuführen und führt dazu, daß viele Anwendungen sich zunächst auf die Ebene beschränken. Es wird sich zeigen, daß sich für ausgewählte Konfigurationen schon bekannte Interpolationen ergeben. Treten nur drei natürliche Nachbarn, wie dies bei einem Dreieck der Fall ist, auf, so sind die natürlichen Koordinaten äquivalent den baryzentrischen Koordinaten des Dreieckes. Für 4 äquidistante Bezugsknoten erhält man die bekannte bilineare Interpolation. Für irreguläre Gitter und $N > 4$ sind die Ansatzfunktionen rationale quadratische Funktionen [66]. Es wird sich zeigen, daß man mit Hilfe der natürlichen Elementkoordinaten eine Interpolationsvorschrift auf konvexen Polyedern erhält, deren Verlauf auf dem Rand linear ist.

Drei natürliche Nachbarn.

Hat der betrachtete Punkt nur drei natürliche Nachbarn, so sind die natürlichen Nachbarschaftskordinaten äquivalent den baryzentrischen Koordinaten. Die hierdurch beschriebene Interpolation entspricht der linearen Finiten Dreiecks Interpolation. Dies ist wie folgt leicht einzusehen. Seien zu einem Punkt p die drei Punkte p^1 , p^2 und p^3 die natürlichen und nutzt man die Gl. 5.6.16 und 5.6.17, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(p) \\ \phi_2(p) \\ \phi_3(p) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}.$$

Wird dieses Gleichungssystem gelöst, so ergibt sich

$$\phi_1(p) = \frac{D_1(p)}{D(p)}, \quad \phi_2(p) = \frac{D_2(p)}{D(p)}, \quad \phi_3(p) = \frac{D_3(p)}{D(p)},$$

wobei D , D_1 , D_2 und D_3 die Determinanten der obigen Matrix bzw. Teilmatrizen sind. Auf der anderen Seite ist bekannt, daß diese Determinanten ein vorzeichenbehaftetes Volumen repräsentieren, und somit sind die natürlichen Nachbarschaftskordinaten äquivalent den baryzentrischen Koordinaten des Punktes p .

Vier natürliche Nachbarn (reguläres Netz).

Für ein Netz mit einem regulären Quadratnetz, wo jeder Punkt p genau vier natürliche Nachbarn hat, erhält man eine bilineare Interpolation. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, daß sich der zu interpolierende Punkt im Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ befindet. Die Voronoi-Regionen erster und zweiter Ordnung sind in der Abbildung 5.6.7 zu sehen. Nach der Definition der Ansatzfunktion bei der natürlichen Element Interpolation kann folgendes geschrieben werden

$$(5.6.18) \quad \phi_i(p) = \frac{A_i(p)}{A(p)} \quad i = 1, \dots, 4,$$

wobei A_i die in der Abbildung 5.6.7 dargestellten Dreiecksflächen sind und A selbst der Flächeninhalt der Voronoi-Region erster Ordnung von p ist. Dabei stellen die Punkte

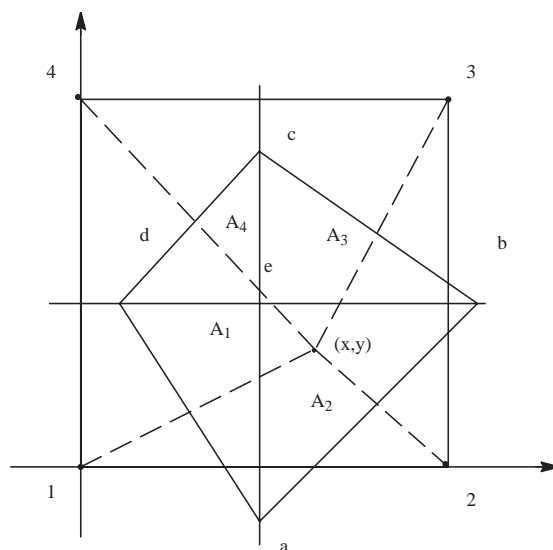


ABBILDUNG 5.6.7. Bilineare Interpolation auf einem regulären Netz

a , b , c , d die Mittelpunkte der Umkreise der Dreiecke, die mit dem Punkt p gebildet werden, dar. Als Koordinaten ergeben sich:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{2}, & a_y &= \frac{-p_x + p_x^2 + p_y^2}{2p_y}, \\ b_x &= \frac{1 + p_y - p_x^2 - p_y^2}{2(1 - p_x)}, & b_y &= \frac{1}{2}, \\ c_x &= \frac{1}{2}, & c_y &= \frac{1 + p_x - p_x^2 - p_y^2}{2(1 - p_y)}, \\ d_x &= \frac{-p_y + p_x^2 + p_y^2}{2p_x}, & d_y &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Flächeninhalte haben dann folgenden Werte:

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{(p_x^2 + p_y^2 - p_x - p_y)^2}{8p_x p_y} \\ A_2(p) &= \frac{(p_x^2 + p_y^2 - p_x - p_y)^2}{8p_y(1 - p_x)} \\ A_3(p) &= \frac{(p_x^2 + p_y^2 - p_x - p_y)^2}{8(1 - p_x)(1 - p_y)} \\ A_4(p) &= \frac{(p_x^2 + p_y^2 - p_x - p_y)^2}{8p_x(1 - p_y)}, \end{aligned}$$

wobei der Gesamtflächeninhalt der Voronoi-Region des Punktes p :

$$A(p) = \frac{(p_x^2 + p_y^2 - p_x - p_y)^2}{8p_x p_y(1 - p_x)(1 - p_y)}$$

ist. Setzt man diese Flächeninhalte in Gl. 5.6.18 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (1 - p_x)(1 - p_y) \\ \phi_2 &= p_x(1 - p_y) \\ \phi_3 &= p_x p_y \\ \phi_4 &= p_y(1 - p_y),\end{aligned}$$

welche genau den bilinearen Ansatzfunktionen entsprechen. Für beliebige Rechtecke kann eine Transformation auf das Einheitsquadrat durchgeführt werden, womit der Beweis abgeschlossen wäre.

Die nächste Verallgemeinerungsstufe ist die Betrachtung von konvexen Gebilden.

5.6.4.3. *Interpolation auf konvexen Zellen.*

Erinnert man sich daran, was man unter einer konvexen Zelle versteht, so ist es für die folgenden Betrachtungen ausreichend die N Eckpunkte des konvexen Polyeders \mathcal{P} zu betrachten. Wird mit $\partial\mathcal{P}$ die konvexe Hülle der Eckpunkte bezeichnet, so sind die NEM-Ansatzfunktionen auf dem Rand des konvexen Polyeders linear.

BEWEIS. Man betrachte zunächst einmal ein einfaches Dreieck mit den Ecken p^1, p^2, p^3 und bestimme die natürlichen Nachbarschaftskordinaten des Punktes p . Wird im weiteren eine Koordinate ξ eingeführt, für die $\xi = 0$ bei p^1 und $\xi = 1$ bei p^2 gilt, so kann die zugehörige natürliche Nachbarschaftskordinate wie folgt geschrieben werden:

$$\phi_i(\xi) = \frac{A_i(\xi)}{A(\xi)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Da für jeden Knoten auf dem Rand der konvexen Hülle die Voronoi-Region unbeschränkt ist, berechnen sich die A_i wie folgt:

$$A_1(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} L\xi_1 + \delta_1, \quad A_2(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} L\xi_2 + \delta_2, \quad A_3(\xi) = \delta_3,$$

wobei $\xi_1 = (1 - \xi)/2$, $\xi_2 = \xi/2$ und δ_1, δ_2 und δ_3 die in Abb. 5.6.8 dargestellten endlichen Teilflächen sind. Eingesetzt in die Berechnungsvorschrift der natürlichen Nachbarschaftskordinaten

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L(1 - \xi) + 2\delta_1}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3}, \\ \phi_2(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L\xi + 2\delta_2}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3}, \\ \phi_3(\xi) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\delta_3}{L + 2\delta_1 + 2\delta_2}\end{aligned}$$

und unter Beachtung des Grenzübergangs $L \rightarrow \infty$ erhält man

$$\phi_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \phi_2(\xi) = \xi, \quad \phi_3(\xi) = 0.$$

Mit anderen Worten ausgedrückt, ist der Verlauf der natürlichen Nachbarschaftskordinaten entlang der Kante von p^1 zu p^2 linear. Die soeben dargestellte Vorgehensweise kann in

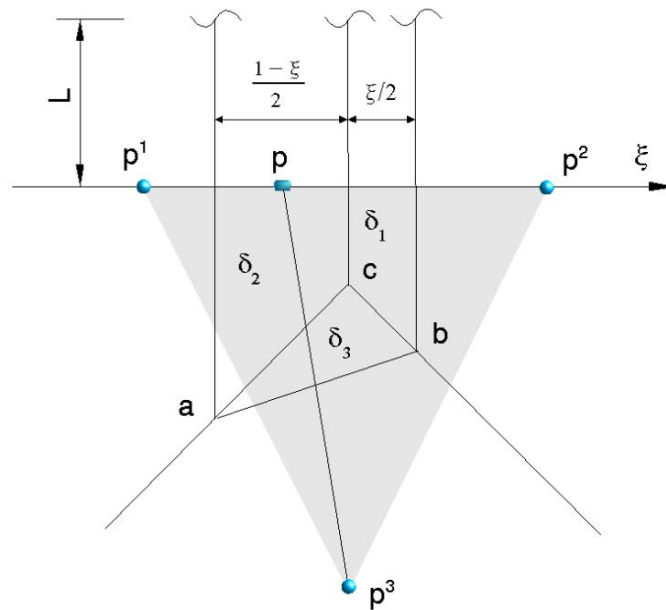


ABBILDUNG 5.6.8. Lineare Eigenschaft der NEM-Interpolation

analoger Weise übertragen werden auf Konstellationen, bei denen mehr als drei natürliche Nachbarn berücksichtigt werden müssen. Auch in diesen Fällen sind zwei Regionen unbeschränkt und alle anderen Voronoi-Regionen zweiter Ordnung sind geschlossene Polyeder mit einem endlichen Maß. \square

Werden konvexe Zellen im dreidimensionalen Raum betrachtet, so kann der Argumentation für konvexe Polygone in der Ebene gefolgt werden, mit dem Unterschied, daß die Interpolationen auf den Facetten nicht mehr linear sind. Vielmehr gilt die Aussage, daß der Verlauf der Interpolation auf der Facette, einem konvexen Polygon, mit der zweidimensionalen Interpolation auf der Facette übereinstimmt. Hierzu führt man sich wiederum vor Augen, daß, wenn der zu interpolierende Punkt in der Ebene einer Facette liegt, unbeschränkte Voronoi-Regionen entstehen, deren Volumenverhältnisse von den Flächenverhältnissen auf der Facette abhängen. Folgerichtig bleibt die Interpolation auf den Kanten auch bei der Interpolation im Raum linear.

Zum Abschluß dieses Abschnittes kann man sich die Wirkung der natürlichen Nachbarschaftinterpolation für einen Punkt in der Abbildung 5.6.9 betrachten.

Mit den natürlichen Nachbarschaftskordinaten ist man nun in der Lage, für beliebigdimensionale konvexe Zellen Interpolationen anzugeben, so daß eine Komposition aus konvexen Zellen in Form eines euklidischen Komplexes eine stetige Interpolation erlaubt. Eine ganz neue Perspektive ergibt sich unter Nutzung dieser Interpolation in Richtung einer Verallgemeinerung der Finiten Elemente bis hin zu Finiten konvexen Zell-Elementen.

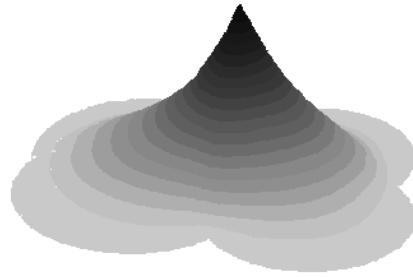


ABBILDUNG 5.6.9. Natürliche Element Interpolation eines Punktes

5.6.4.4. *Finite konvexe Zell-Elemente* .

Mit den soeben beschriebenen Interpolationsfunktionen eröffnet sich die Möglichkeit, eine neue Familie von Finiten Elementen (Abschn. 5.4) zu definieren.

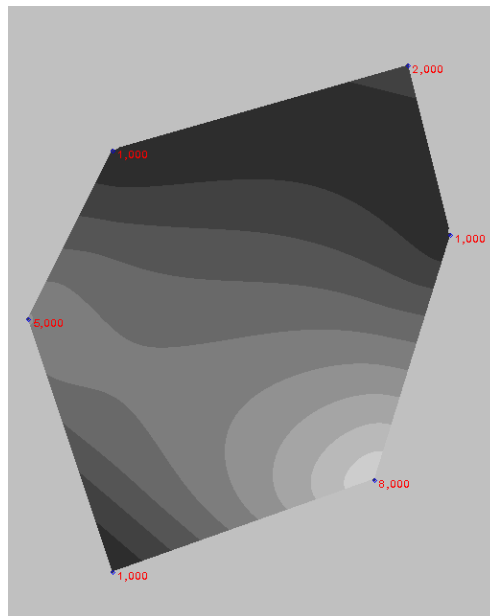


ABBILDUNG 5.6.10. Interpolation auf einer konvexen Zelle

Besonderes Gewicht bekommt diese Finite Element Interpolationsfamilie im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit der minimalen konvexen Zellzerlegung (Abschn. 4.3.2).

Die so definierte Finite Element Familie erlaubt die Nutzung von Zellzerlegungen mit unterschiedlichsten Elementen als Finite Element Zerlegung. Es ist eine Familie entstanden, die in konsistenter Form lineare Linien- und Dreiecks-, bilineare Vierecks-Elemente

und allgemeine konvexe Zell-Elemente zusammenführt. Die Definition 5.4.2 eines Finiten Elementes erfordert die Festlegung einer kompakten Trägermenge K , eines linearen Raumes von Ansatzfunktionen Ψ und einer Freiheitsgradmenge Σ . Die Freiheitsgradmenge ist in dieser Definition der am meisten durch eine Anwendung geprägte Teil. Die kompakte Trägermenge ist für diese Klasse von Finiten Elementen eine konvexe Zelle, beschrieben durch ihre n Eckknoten p^i . Der Raum der Interpolationsfunktionen Ψ über K wird aufgespannt von den natürlichen Nachbarschaftskoodinaten:

$$\psi_i(p) := \frac{\mu(VR(p, p^i))}{\mu(VR(p))} \text{ mit } p \in K.$$

Mit Hilfe dieses Raumes von Ansatzfunktionen lassen sich nun Zustandsgrößen u im Element interpolieren (Abb. 5.6.10):

$$u(p) := \sum_{i=1}^n \psi_i(p) \cdot u^i,$$

wobei u^i zu verstehen ist als der Funktionswert der Funktion u an der Stelle p^i .

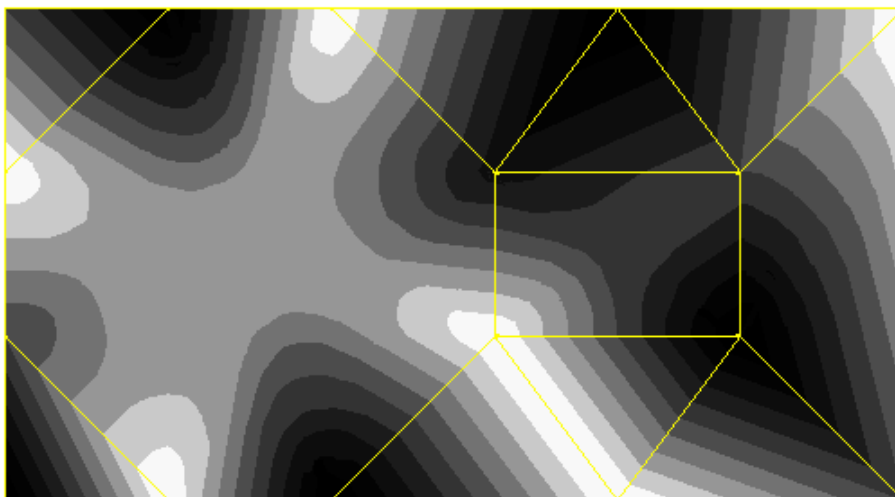


ABBILDUNG 5.6.11. Finite Zellen Interpolation über einer konvexen Zellzerlegung

Die Einschränkung der natürlichen Element Interpolation auf konvexe Polyeder ist gekennzeichnet durch ihre strikte Abhängigkeit von den Interpolationen auf den Facetten der konvexen Polyeder, was eine lineare Interpolation auf den Kanten bedeutet und eine konsistente Komposition von Zellen unterschiedlicher Dimension und Geometrie erlaubt. Gut erkennbar sind die unterschiedlichen Interpolationsordnungen in der Abb. 5.6.11, wie die bilineare Interpolation im Viereckselement, die lineare in den Dreiecken und eine fast quadratische im Achteck. Weiterführende Forschungen in Richtung Finiten konvexen Zell-Element Approximationen scheinen vielversprechend.

5.7. Interpolation unter Verwendung der räumlichen Statistik

Es ist im Abschnitt 5.6.1 erkennbar, daß durch den Einsatz unterschiedlicher Gewichtsfunktionen die Eigenschaften der Shepard-Interpolation ganz wesentlich beeinflusst werden. In Ergänzung hierzu entwickelte Matheron [124] ein Verfahren zur Interpolation auf Meßnetzen, welches mit „Kriging“ bezeichnet wurde.

Werden Natur-Messungen als Grundlage für Interpolationen herangezogen, so sind diese im allgemeinen fehlerbehaftet und unregelmäßig über das Untersuchungsgebiet verstreut. Bei der Übertragung der punktuellen Messungen auf eine flächige Information, unter Nutzung gemessener Daten, taucht die Frage auf, ob das Meßnetz ausreichend dicht ist, um eine zuverlässige Übertragung zu ermöglichen. Um dieses beurteilen zu können, ist es notwendig, die mögliche Genauigkeit der Übertragung zu kennen bzw. abschätzen zu können. Dieses Kenntnis kann in einigen Fällen auch bei der Ausdünnung des Meßnetzes helfen, da man den Verlust der Genauigkeit abschätzen kann.

Der erste Schritt ist die Analyse der räumlichen Variabilität der untersuchten Parameter. In diesem Schritt wird aus den Meßwerten eine Funktion, das sogenannte Variogramm, berechnet, das die Variabilität quantitativ ausdrückt. Das Variogramm liefert Informationen über die „Kontinuität“ des Parameters.

Das Semi-Variogramm oder Variogramm, wie es in der Literatur meist kürzer genannt wird, beschreibt die durchschnittliche Varianz der Meßwerte von Punktepaaren mit einem bestimmten Abstand h in einem Meßfeld als Funktion von eben diesem Abstand. Das Variogramm gibt also ein Maß für die Ähnlichkeit von Meßergebnissen zwischen Punktepaaren gleichen Abstandes. Je ähnlicher im Mittel Meßwerte an Punktepaaren gleichen Abstandes sind, desto kleiner ist der Variogrammwert. Kriging ist eine Methode zur Interpolation von unbekanntem Werten aus gemessenen Nachbarwerten. Im Unterschied zu anderen Interpolationsverfahren berücksichtigt Kriging auch die räumliche Variabilität des betreffenden Parameters und ergibt deshalb unverzerrte Schätzwerte mit minimaler Schätzvarianz. Für den praktischen Einsatz kommen die Stärken des Kriging besonders bei unregelmäßig verteilten Meßpunkten zum Tragen. So werden beispielsweise Gewichte von geclusterten Meßpunkten (unverhältnismäßig viele dicht beieinander) auf weiter entfernte, aber weniger redundant platzierte Meßpunkte verteilt. Ein wesentlicher Vorteil ist jedoch, daß die Schätzvarianz überhaupt berechnet werden kann und die Schätzwerte deshalb mit einer bestimmbarer Sicherheit verwendet werden können.

Eine umfassende Darstellung zum Bereich der geostatistischen Methoden ist in [24] zu finden.

5.7.1. Statistische Annahmen.

Wie in der Einleitung schon erwähnt, soll für an bestimmten Orten durchgeführte Messungen von gewissen Parametern $f(p^i)$ auf eine Charakterisierung dieser Parameter auf einem räumlichen Kontinuums geschlossen werden. In der Regel sind die zu beschreibenden Variablen nicht mit einfachen deterministischen Funktionen identisch und werden deshalb in einen statistischen Rahmen gestellt. Bei den folgenden Betrachtungen ortsabhängiger

Variablen spielt das Konzept der Zufallsfunktionen eine zentrale Rolle. Eine Zufallsfunktion besteht aus einer Menge von Zufallsvariablen $F(p)$, die dem Punkt p im untersuchten Raum zugeordnet sind.

Eine ortsabhängige Variable wird als Realisierung einer Zufallsfunktion betrachtet: An jedem Punkt p im d -dimensionalen Untersuchungsraum entspricht der Wert $f(p)$ einer Realisierung der Zufallsvariablen $F(p)$. Diese Auffassung berücksichtigt, daß es nicht möglich ist, ortsabhängige Variablen mit Hilfe deterministischer Methoden vollständig zu beschreiben. Auf der anderen Seite kann in den meisten Fällen nicht geprüft werden, ob ein Parameter eine Realisierung einer Zufallsfunktion darstellt, weil nur eine Realisierung vorliegt.

Im weiteren wird angenommen, daß der Erwartungswert der Zufallsfunktion $F(p)$ über das gesamte Gebiet Ω konstant ist:

$$E[F(p)] = m \quad \forall p \in \Omega.$$

Dies bedeutet aber nicht, daß die Variable konstant sein muß, sondern nur, daß für zwei beliebige Punkte p^A und p^B nicht im voraus angenommen werden kann, daß der Wert am Punkt p^A größer ist als am Punkt p^B . Anders ausgedrückt, bedeutet diese Annahme, daß sich die Parameter im Gebiet nicht systematisch ändern. Diese Annahme ist allerdings nicht immer erfüllt. Falls Informationen über derartige Trends bekannt sind, können sie bei der Schätzung mit dem *External-Drift-Kriging* berücksichtigt werden, worauf jedoch im folgenden nicht eingegangen werden soll.

Das Kriging-Verfahren unterscheidet sich von den herkömmlichen Interpolationsverfahren dadurch, daß es die Variabilität des Parameters berücksichtigt. Dies kann beispielsweise dazu führen, daß bei unterschiedlichen Variogrammen der bathymetrischen und sedimentologischen Daten, die einzelnen Meßpunkte trotz gleicher Meßkonfiguration für die zugehörigen Interpolationen unterschiedlich gewichtet werden.

5.7.2. Einfaches Kriging.

Wie oben erwähnt, wird beim Kriging ein konstanter Erwartungswert $E[F(p)] = m$ im gesamten Gebiet angenommen. Beim einfachen Kriging wird dieser im allgemeinen unbekannte Erwartungswert durch den Mittelwert der gemessenen Daten geschätzt:

$$E[F(p)] = m \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(p^i).$$

Aus diesem Grund spricht man auch von **Kriging mit bekanntem Mittel**. Eine weitere wesentliche Voraussetzung wird an die Kovarianz gestellt. Die Kovarianz soll nur von der Entfernung h zweier Punkte abhängen und nicht von deren Lage:

$$C(h) = E[(F(p) - m)(F(q) - m)] \quad \forall p, q : h = d(p, q).$$

Die Translationsinvarianz des Erwartungswertes und der Kovarianz der Zufallsvariable wird auch als **Stationarität zweiter Ordnung** bezeichnet.

Das Problem ist nun, ein gewichtetes Mittel zu konstruieren, das den Wert an der Stelle p schätzt. Die Methode erinnert an multiple Regression. Die Abweichung der gesammelten Daten vom bekannten und auf dem betrachteten Bereich als konstant angenommenen Mittelwert wird gewichtet, um den Wert an der Stelle p zu schätzen

$$\bar{f}(p) = m + \sum_{i=1}^N \omega_i (f(p^i) - m),$$

wobei die Gewichte ω_i den Residuen $f(p^i) - m$ zugeordnet sind. Es ist leicht zu sehen, daß diese Interpolation erwartungstreu ist, es gilt:

$$E[\bar{f}(p) - f(p)] = 0.$$

Für die Varianz des Schätzfehlers gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= \text{var}(\bar{f}(p) - f(p)) \\ &= E[(\bar{f}(p) - f(p))^2] \\ &= \sum_i^N \sum_j^N \omega_i \omega_j C(p^i - p^j) + C(p - p) - 2 \sum_i^N \omega_i C(p^i - p). \end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, daß man $\text{cov}[f(p^i), f(p^j)] = C(p^i - p^j)$ schreiben kann. Diese Varianz ist minimal, wenn ihre erste partielle Ableitung gleich Null ist:

$$\frac{\partial \sigma_E^2}{\partial \omega_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich das Gleichungssystem für das *Simple Kriging*, das gelöst werden muß, um die optimalen Gewichte ω_i zu bestimmen:

$$\forall i = 1, \dots, N \text{ gilt } \sum_{j=1}^N \omega_j C(p^i - p^j) = 2 \cdot C(p^i - p).$$

Hier beschreibt die linke Seite der Gleichung die Kovarianz zwischen den Datenpunkten. Die rechte Seite beschreibt die Kovarianz zwischen dem zu schätzenden Punkt und allen Datenpunkten. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die optimalen Kriginggewichte ω_i .

5.7.3. Intrinsische Hypothese.

Die Annahme der Stationarität zweiter Ordnung kann nicht immer als erfüllt angesehen werden. Es können andere ähnliche Annahmen formuliert werden. Die Annahme eines konstanten Erwartungswertes über das gesamte Gebiet bleibt immer erhalten. Die Bedingung an die Kovarianz, daß diese nur abhängig von der Entfernung der betrachteten Punkte ist, kann wie folgt abgeschwächt werden.

- Die Varianz des Inkrements $Z(p+h) - Z(p)$ zwischen zwei Punkten ist nur abhängig vom Entfernungsvektor h zwischen diesen Punkten.

Diese Annahmen wird intrinsische Hypothese genannt und kann folgendermaßen als Gleichung formuliert werden:

$$\begin{aligned} E[Z(p)] &= m \\ \frac{1}{2}E[(Z(p+h) - Z(p))^2] &= \gamma(h). \end{aligned}$$

Die Funktion $\gamma(h)$, die nur vom Abstandsvektor aber nicht vom Ort der Punkte p abhängt, wird Semivariogramm oder kurz Variogramm genannt. Es ist nicht schwer zu sehen, daß aus der Stationarität zweiter Ordnung die intrinsische Hypothese folgt, aber nicht umgekehrt.

Für die Definition der Kovarianzfunktion wird der Erwartungswert m benötigt, während das Variogramm von diesem Wert unabhängig ist. Das Variogramm wird daher von leichten Trends weniger beeinflusst, während die Kovarianzfunktion wegen der unsicheren Schätzung des Mittelwertes davon stärker betroffen wird. Die Kovarianz und das Variogramm hängen in folgender Weise zusammen:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h).$$

5.7.4. Das Variogramm.

Ein Variogramm hat bestimmte charakteristische Merkmale, die die Art der räumlichen Abhängigkeit der untersuchten Größen beschreiben.

Variogramme sollen folgende Eigenschaften haben:

- $\gamma(0) = 0$
- $\gamma(h) \geq 0$ für alle h (positiv definit)
- $\gamma(h) = \gamma(-h)$ für alle h (Symmetrie)
- Die mehr oder weniger kontinuierliche Änderung des Parameterwertes im Raum drückt sich darin aus, daß die Varianz des Inkrements mit der Größe h zunimmt. Für kleine Abstände sind die Unterschiede meist geringer als für größere.
- Variogramme sind in der Nähe des Ursprunges häufig diskontinuierlich. Das bedeutet, daß für alle $h \neq 0 : \gamma(h) \geq C_0 > 0$ gilt. Dieses Phänomen ist der sogenannte Klumpeneffekt (*nugget effect*), der teilweise durch Meßfehler und teilweise durch räumlich nicht variable Zufallskomponenten in den Daten erklärt werden kann.

Typische Variogramme sind in der Abbildung 5.7.1 schematisch dargestellt. Obwohl nach der obigen Forderung $\gamma(0) = 0$ gelten sollte, d.h. Meßwerte an derselben Stelle theoretisch identische Werte ergeben müssen, strebt $\gamma(h)$ oft scheinbar einem positiven Grenzwert zu für $h \rightarrow 0$. Dieser Grenzwert wird Nugget-Varianz genannt und ist durch Probennahme- und Meßungenauigkeiten sowie durch kleinräumige Varianz von Meßwerten bedingt. Der Nugget-Effekt bestimmt zu einem großen Teil die Präzision der Schätzwerte nach der Kriging-Methode.

Mit zunehmender Entfernung h nimmt die Semivarianz $\gamma(h)$ häufig bis zu einem bestimmten Wert zu und bleibt dann konstant.

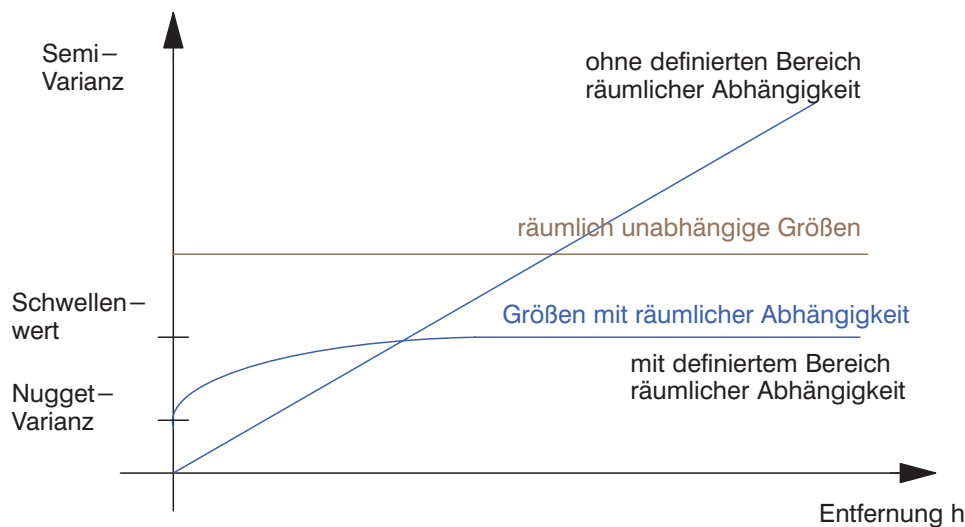


ABBILDUNG 5.7.1. Typische Variogramme

5.7.4.1. Experimentelle Variogramme.

Grundlage der Berechnung des Variogramms sind neben den eigentlichen Meßwerten deren Koordinaten. Die Semivarianz $\gamma(h)$ ist definiert als:

$$(5.7.1) \quad \gamma(h) := \frac{N(h)}{2} \sum_{i=1}^{N(h)} (f(p_i + h) - f(p_i))^2$$

mit

$\gamma(h)$ - Semivarianz für die Entfernung h zwischen den Meßpunkten p_i

$N(h)$ - Anzahl der Punktepaare mit dem Abstand h

$f(p_i)$ - Meßwert am Punkt p_i

$f(p_i + h)$ - Meßwert an einem Punkt mit dem Abstand h .

5.7.4.2. Theoretische Variogramme.

Die oben berechnete Abschätzung eines Variogramms unter Einbeziehung von Meßwerten ist zunächst jedoch nur für eine endliche Anzahl von Abständen h definiert. Für eine Interpolation ist die Kenntnis des Variogramms im gesamten Untersuchungsgebiet notwendig. Eine Extrapolation des experimentellen Variogramms zu einem theoretischen erfolgt über Parameteranpassungen.

Es gibt vier elementare Typen von Variogrammen:

Reiner Klumpeneffekt. Gibt es keinerlei Korrelation zwischen den Zufallsvariablen an verschiedenen Orten, so gilt:

$$\gamma(h) \begin{cases} = 0 & \text{falls } h = 0 \\ = c & \text{falls } h > 0 \end{cases} .$$

Ein "reiner Klumpeneffekt" bedeutet, daß die Parameterwerte keine gleichmäßige räumliche Kontinuität aufweisen. Eine große Differenz zwischen den Meßwerten kann sowohl bei kleiner, wie auch bei großer Entfernung zwischen den Meßpunkten auftreten.

Sphärische Variogramme.

$$\gamma(h) \begin{cases} = c \left(\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right) & \text{falls } h \leq a \\ = c & \text{falls } h > a \end{cases}$$

Exponentielles Variogramm.

$$\gamma(h) = c(1 - e^{-\frac{h}{a}})$$

Gauß'sche Variogramme.

$$\gamma(h) = c(1 - e^{-\frac{h^2}{a^2}})$$

Auch Kombinationen dieser Variogramm-Modelle werden häufig in der Praxis angewendet.

5.7.4.3. *Isotropie.*

Für den Fall, daß die Semivarianz $\gamma(h)$ nur vom Abstand h zwischen Punktepaaren abhängt und nicht von der Richtung, wird das Variogramm **isotrop** genannt. **Anisotropie** führt dementsprechend zu unterschiedlichen Variogrammen für verschiedene Richtungen. Praktisch werden zunächst Meßwerte zu Variogrammen für die Hauptrichtungen waagrecht/senkrecht und diagonal berechnet. Ergeben sich dabei gleiche Variogramme für alle Richtungen, so kann ein Variogramm aus allen Werten berechnet werden, das dann die gesamte Fläche unabhängig von der Richtung repräsentiert.

5.7.4.4. *Anpassung verschiedener Variogramm-Modelle.*

Anhand der Meßwerte aus einer Fläche werden zunächst mit Gleichung 5.7.1 die experimentellen Variogramm-Werte berechnet. Durch diese Punkte muß dann eine stetige Funktion gelegt werden, das eigentliche Variogramm. Eine automatische Anpassung kann z.B. nach der Methode der kleinsten Quadrate geschehen.

5.7.5. Ordinary Kriging.

Eine Variogrammberechnung verrät zwar viel über den zu untersuchenden Parameter, aber als Ziel wird meist die Erstellung einer zuverlässigen Interpolation der Parameter im gesamten Gebiet betrachtet. Weiterhin ist man an der Genauigkeit der Karte interessiert. Diesem Zweck dient die Kriging-Interpolationsmethode.

Punkt-Kriging.

Für die Schätzung von Werten einer ortsabhängigen Variable an einem Punkt, für den keine Meßwerte vorliegen, wird eine Linearkombination vorhandener Meßwerte der Form

$$\bar{f}(p) = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot f(p^i)$$

verwendet. Die Gewichte ω_i werden so gewählt, daß die Interpolation erwartungstreu ist:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1.$$

Die Minimierung der Schätzvarianz erfolgt mit Hilfe eines Lagrange-Parameters. So erhält man das „*Ordinary Kriging System*“:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i \gamma(p_j - p_i) + \mu = \gamma(p_j - p) \quad \forall j = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1.$$

Die Schätzvarianz beträgt dann:

$$\sigma_k^2 = -\mu - \gamma(p - p) + 2 \sum_{i=1}^N \omega_i \gamma(p_i - p).$$

Für die interpolierten Werte kann eine Schätzvarianz angegeben werden, die nur von der Lage und Entfernung der Nachbarknoten abhängig ist und nicht von deren Meßwerten. Die Schätzvarianz kann also bei Kenntnis des Variogramms schon vor der Probennahme für verschiedene Probennahmen-Konstellationen berechnet werden.

Wichtige Eigenschaften der Interpolation mittels Kriging sind

- Kriging ist ein exakter Interpolator: an den Meßpunkten stimmen Meßwert und Schätzwert überein.
- Die Kriging-Gewichte werden mit Hilfe des Variogramms, der Lage der Meßpunkte und des zu schätzenden Punktes ermittelt. Daher spielt auch die relative Lage der Meßpunkte eine Rolle.
- Die Kriging-Gewichte sind unabhängig von den absoluten Meßwerten. Die gleiche Konfiguration von Meßpunkten führt stets zu gleichen Gewichten, bei gleichen Variogrammen.
- Weiter entfernte Meßpunkte erhalten kleinere Gewichte, wenn näherliegende Messungen vorhanden sind.
- Die Kriging-Gewichte können auch negative Werte annehmen. Daher ist die übliche Hypothese

$$\max\{Z(p^i)\} \leq Z(p) \leq \min\{Z(p^i)\}$$

nicht unbedingt erfüllt.

Meßnetzplanung.

Punkt-Kriging kann bei der Planung von Meßnetzen sehr vorteilhaft eingesetzt werden. Da die Schätzvarianz eine Funktion der Gewichte ω_i ist, deren Größe nur von der Konfiguration der Punkte, nicht aber von deren Ort oder den absoluten Meßwerten selbst abhängig ist, kann bei der Planung des Meßnetzes bereits die gewünschte Sicherheit bei der Interpolation berücksichtigt werden.

Das bedeutet, daß man in Kenntnis des Variogramms hypothetisch zusätzliche Meßpunkte annehmen kann. Zu dieser Meßkonfiguration kann für jeden Punkt eine Schätzvarianz bestimmt werden.

Beispiel im eindimensionalen Fall.

Man betrachte zwei Punkte p^1 und p^2 auf einer Geraden. Zu den Punkten gehöre jeweils ein Funktionswert $f(p^1)$ und $f(p^2)$. Im folgenden soll für einen beliebigen Punkt p auf der Geraden ein Funktionswert $\bar{f}(p)$ interpoliert werden. Es wird ein lineares Variogramm angenommen: $\gamma(h) = h = d(p, q)$.

Die Kriging-Gleichungen haben dann folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \omega_1 + d(p^1, p^2)\omega_2 &= d(p, p^1) \\ d(p^2, p^1)\omega_1 + 0 \cdot \omega_2 &= d(p, p^2) \\ \omega_1 + \omega_2 &= 1. \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{d(p^2, p^1) + d(p, p^1) - d(p, p^2)}{2d(p^2, p^1)} \\ \mu &= d(p, p^1) - d(p^1, p^2)\omega_2 \\ \omega_1 &= 1 - \omega_2. \end{aligned}$$

Analysiert man diese Lösung, so hat man zwei Fälle zu betrachten.

Im ersten Fall liegt der betrachtete Punkt p zwischen den Punkten p^1 und p^2 und es gilt:

$$(5.7.2) \quad d(p^2, p^1) + d(p, p^1) - d(p, p^2) = 2d(p, p^1)$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d(p, p^2)}{d(p^1, p^2)} \\ \omega_2 &= \frac{d(p, p^1)}{d(p^1, p^2)} \\ \mu &= 0, \end{aligned}$$

was die gleichen Gewichte wie die lineare Interpolation oder die inverse Abstandsmethode liefert.

Im zweiten Fall liegt der Punkt p nicht zwischen den Punkten p^1 und p^2 , und man kann die Vereinfachung in Gleichung 5.7.2 nicht durchführen. Man erhält aber

für $p \geq p^2$, daß $\omega_2 = 1$ gilt und

für $p \leq p^1$, daß $\omega_1 = 1$ gilt.

Der Funktionsverlauf ist konstant außerhalb des Intervalls.

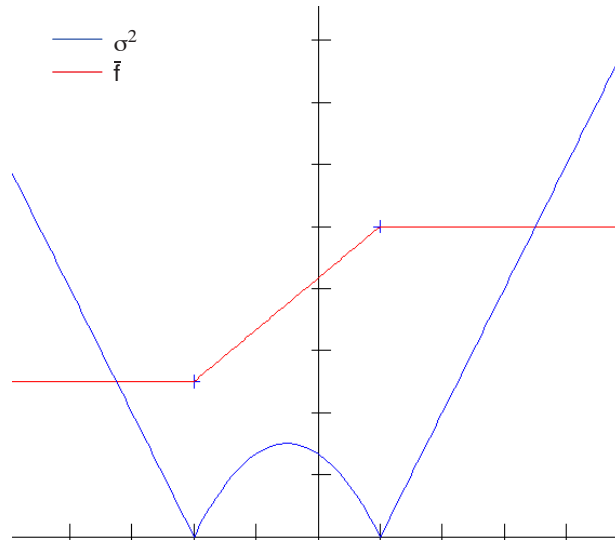


ABBILDUNG 5.7.2. Kriging-Interpolation zweier Punkte

Interessant ist der Verlauf der Varianz σ^2 :

$$\sigma^2(p) = -2\omega_1\omega_2d(p^1, p^2) + 2(\omega_1d(p^1, p) + \omega_2d(p^2, p)),$$

welche als Vertrauenswürdigkeit angesehen werden kann. An den Originalpunkten ist die Varianz Null, was bedeutet, daß diese Werte absolut sicher sind (Abb. 5.7.2). Die Unsicherheit zwischen den beiden Stützstellen nimmt bis zur Mitte zu und hat dort ein lokales Maximum. Außerhalb des Intervalls $[p^1, p^2]$ nimmt die Unsicherheit proportional zum Abstand zu und wächst ins Unendliche.

Block Kriging.

Das obige Beispiel hat gezeigt, daß man beim Punkt-Kriging mit recht großen Spannweiten (Ungenauigkeiten) rechnen muß. Andere Verfahren schätzen den mittleren Wert eines Blocks, z.B. einer Fläche, ohne auf die Variabilität innerhalb dieses Blocks einzugehen. Diese Verfahren werden unter dem Begriff des Block-Kriging zusammengefaßt. Die Schätzung eines solchen Block-Mittelwertes ist natürlich sicherer als die Schätzung eines Punktes. Auf eine detaillierte Darstellung wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet und auf [179] verwiesen.

Bemerkung.

Bei der Beschreibung von Variogrammen ist man mit Formen in Berührung gekommen, die sehr nach Abstandsfunktionen bei der Shepard-Interpolation aussahen. Werden Variogramme mit *Nugget*-Effekt verwendet, so ist das Kriging-Verfahren kein exaktes Interpolations-Verfahren mehr, sondern vielmehr ein Approximations-Verfahren.

5.8. Morphing

Ein ganz anderer Anwendungsbereich von Interpolationsalgorithmen ist das Morphing. Hierbei werden nicht mehr nur skalare und vektorielle Größen interpoliert, sondern es erfolgt eine Interpolation zwischen graphischen bzw. geometrischen Modellen.

Das Morphing ist eine bekannte Technik zur Erzeugung weicher Übergänge zwischen zwei Objekten, wie sie typischerweise bei *Special-Effects* in Filmproduktionen verwendet wird. Meist ist das Ziel solcher Verfahren, einen möglichst kontinuierlichen Übergang vom Ausgangsobjekt zum Zielobjekt zu generieren. Besonders einfach ist die Interpolation zwischen Polyedern oder allgemein konvexen Zellen. Natürlich muß man sich beim Morphing nicht nur auf zwei Ausgangsmodelle beschränken, sondern kann zwischen mehreren Modellen variieren (Abb. 5.8.1). Auf diese Weise entsteht ein Raum von Modellen.

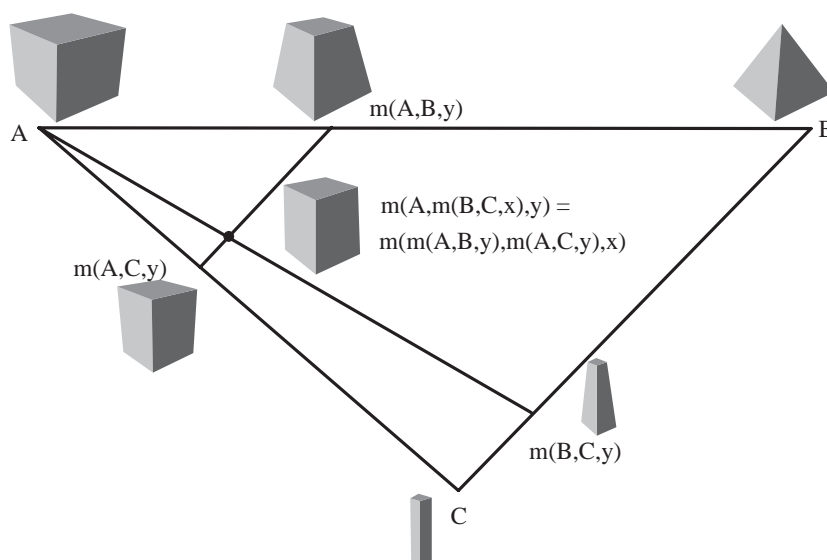


ABBILDUNG 5.8.1. Morphing von drei geometrischen Objekten

5.8.1. Morphing Raum.

Morphing operiert auf Objekten, welche sowohl real als auch virtuell sein können. Morphing im klassischen Sinne benötigt zunächst einmal zwei Objekte als Eingabe und erzeugt ein Objekt als Ausgabe. All diese Objekte gehören zur selben Menge von Objekten. Dies wird im folgenden Axiom festgehalten.

AXIOM 5.8.1. *Morphing operiert auf einer Objektmenge Ω .*

Die Elemente der Menge Ω werden im weiteren mit großen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet. Die Menge Ω ist der Bereich des Morphings und es wird vorausgesetzt, daß diese nicht leer ist: $\Omega \neq \emptyset$.

Eine Menge ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Elemente wohlunterscheidbar sind. Folglich gibt es in Ω eine Relation die mit „ $=$ “ bezeichnet wird. Andere Relationen sind zunächst nicht definiert.

Ausgehend von der Grundmenge auf dem das Morphing wirkt, werden folgende zwei Grundeigenschaften eingeführt:

- Der Prozeß des Morphing induziert eine Ordnung auf der Menge der zwischenliegenden Objekte.
- Die Menge der zwischenliegenden Objekte ist dicht im mathematischen Sinne.

Die Frage ist nun, wie bekommt man eine solche Menge zwischenliegender Objekte. Die übliche Herangehensweise ist über das Intervall $[0, 1]$ der reellen Zahlen. Dabei kann man die Zahlen des Intervalls als Identifikatoren für die Zwischenobjekte auffassen. Dieser Parameter wird dann Übergangsparameter genannt. Folglich kann man Morphing als eine Funktion von 3 Parametern auffassen. Dabei setzt man voraus, daß der Übergangsparameter 0 das Quellobjekt und der Parameter 1 das Zielobjekt reproduzieren.

DEFINITION 5.8.2. Seien $A, B \in \Omega$ und $x \in [0, 1]$. Man bezeichnet $m : \Omega \times \Omega \times \mathfrak{R} \rightarrow \Omega$ als **Morphing-Funktion**, wenn m wohldefiniert für alle $x \in [0, 1]$ ist und folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} m(A, B, 0) &= A, \\ m(A, B, 1) &= B \end{aligned}$$

gelten.

In den meisten Fällen bleibt die Einschränkung auf das Intervall $[0, 1]$ erhalten. Eine Erweiterung auf alle reellen Zahlen ist jedoch denkbar, man spricht dann von extrapolierendem Morphing.

Im weiteren werden Eigenschaften von Funktionen aufgeführt die im Rahmen von Morphing-Funktionen relevant sind.

DEFINITION 5.8.3. Eine Morphing-Funktion ist **injektiv**, wenn für alle $A, B \in \Omega$ die folgende Implikation gilt:

$$x \neq y \Rightarrow m(A, B, x) \neq m(A, B, y).$$

Die Injektivität wird bei Morphing-Funktionen nur für den reellen Parameter x benötigt. Die Injektivität einer Funktion ermöglicht es, das Urbild eines Objektes zu bestimmen.

Neben der Injektivität ist die Linearität und die Distributivität einer Funktion eine hilfreiche Eigenschaft.

DEFINITION 5.8.4. Eine Morphing-Funktion m ist **linear**, genau dann, wenn für alle $A, B \in \Omega$ und $x, y, z \in [0, 1]$ die folgende Gleichheit gilt:

$$m(m(A, B, x), m(A, B, y), z) = m(A, B, x + z(y - x)).$$

Die Linearität bezieht sich ausschließlich auf den reellen Parameter (Abb. 5.8.2).

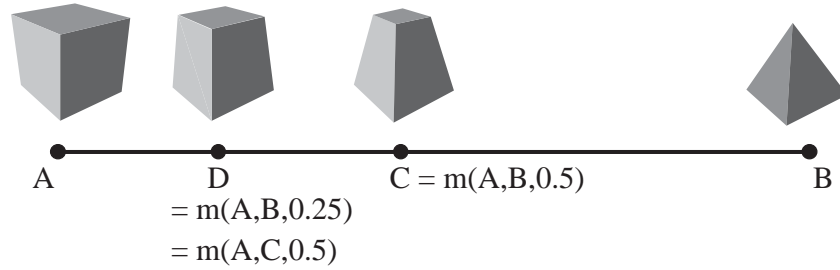


ABBILDUNG 5.8.2. Linearität der Morphing-Funktion

DEFINITION 5.8.5. Eine Morphing-Funktion ist **distributiv**, genau dann wenn für alle $A, B, C \in \Omega$ und $x, y \in [0, 1]$ die folgende Gleichheit gilt:

$$m(A, m(A, C, x), y) = m(m(A, B, y), m(A, C, y), x).$$

Die Distributivität einer Morphing-Funktion ist in der Abbildung 5.8.1 dargestellt.

Im weiteren soll ein Morphing-Raum allgemein definiert werden. Hierzu wird angenommen, daß n Basisobjekte zur Verfügung stehen.

DEFINITION 5.8.6. Gegeben sei eine Menge von Objekten Ω , ausgewählte Objekte $B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, und eine Morphing-Funktion $m : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$. Seien die Mengen $\Psi_i \subseteq \Omega$, $i \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \{B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}, \\ \Psi_i &= \{m(C, D, x) \mid C, D \in \Psi_{i-1}, x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Die Menge $\Psi = \Psi_n \subseteq \Omega$ wird dann **Morphing-Raum** genannt.

Betrachtet man einmal diese Definition, enthält die Menge Ψ_0 alle Basisobjekte $B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \Omega$. Die Menge Ψ_1 enthält alle Objekte, die durch Morphing aus je zwei Basisobjekten erzeugt werden können. Man könnte sagen, daß die Menge Ψ_1 die Achsen des Morphing-Raumes darstellen. Andererseits bildet Ψ_1 die Kanten eines n -dimensionalen Simplex. Die nächste Menge Ψ_2 enthält alle Objekte, die durch Morphing aus je zwei in Ψ_1 entstehen können. Anders ausgedrückt enthält Ψ_2 alle Ebenen zwischen zwei Achsen bzw. die 2-Subsimplexe des n -dimensionales Simplex.

Ausgehend von der Modellvorstellung eines Simplex können alle Elemente des Morphing-Raumes durch eine Linearkombination der Basiselemente dargestellt werden:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^n x_i B_i \\ 1 &= \sum_{i=0}^n x_i. \end{aligned}$$

5.8.2. Der Morphing-Raum als ein Vektorraum.

Ein Vektorraum war charakterisiert als eine Menge, auf denen eine Addition und eine skalare Multiplikation definiert sind. Man kann nun zeigen, daß auch der Morphing-Raum ein linearer Raum über \mathfrak{R} ist. Die erste Schwierigkeit, nämlich die Definition eines Nullelements kann man umgehen, indem man die leere Menge als Nullelement auffaßt und $B_0 = \emptyset$ setzt. Nun kann eine skalare Multiplikation wie folgt festgelegt werden.

DEFINITION 5.8.7. Eine skalare Multiplikation $\mathfrak{R} \times \Psi \rightarrow \Psi$ ist für jedes Element $A \in \Psi$ durch

$$\lambda A := m(\emptyset, A, \lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathfrak{R}$ festgelegt.

Bei der Definition einer Addition kann man sich von der Vektoraddition im euklidischen Raum inspirieren lassen.

DEFINITION 5.8.8. Die Addition $\Psi \times \Psi \rightarrow \Psi$ von zwei Elementen $A, B \in \Psi$ ist gegeben durch

$$A + B := M(\emptyset, m(A, B, 0.5), 2).$$

Nun ist es nicht schwer zu zeigen, daß der Morphing-Raum mit den eben eingeführten Definitionen ein linearer Vektorraum ist, falls die Morphing-Funktion linear und distributiv ist. Der Beweis ist nur technisch und wird deshalb nicht ausgeführt.

5.8.3. Technische Anwendungen des Morphing.

Das Morphing ist ein Beispiel, wie die unterschiedlichsten mathematischen Begriffe in eine sehr abstrakten Formulierung zu einer neuen Modellvorstellung führen. Es hat sich gezeigt, daß man es unter Einhaltung bestimmter Bedingungen beim Morphing mit einem Vektorraum zu tun hat.

Erste Anwendungen fanden Morphing-Algorithmen bei der Bearbeitung von Bildern und bei *Special-Effects* in Filmproduktionen. Der Übergang auf den dreidimensionalen Raum erfolgte erst spät. Aber auch hier waren die Produzenten von Filmen die ersten Anwender. Die Animation von Bewegungen wie auch die Veränderung der Gestalt von geometrischen Objekten lassen sich auf elegante Weise durch die Theorie des Morphing sowie deren Algorithmen beschreiben. Besonders einfach gestalten sich solche Algorithmen, wenn die zu beschreibende Geometrie durch Gitternetze gleicher Knotenzahl beschrieben werden.

Anwendungen im technischen Bereich ließen lange auf sich warten. Eine naheliegende Anwendung war und ist die Modellierung und Steuerung von Bewegungsabläufen bei Robotern im Maschinenbau. Analog führen Morphing-Algorithmen bei der Animation von Verformungs- und Entwicklungsabläufen zu realistischen Darstellungen. Die Nutzung von Morphing-Algorithmen im Bauingenieurwesen steht noch ganz am Anfang der Entwicklung. Es stehen auch hier zunächst Fragestellungen der Animation und Darstellung im Vordergrund. Betrachtet man beispielsweise Geographische Informations-Systeme, so sind

diese gekennzeichnet durch eine Vielzahl von Daten unterschiedlichen Typs und unterschiedlicher Auflösung, die verwaltet werden müssen. Hat man es zum Beispiel mit Kartenobjekten unterschiedlicher Skalen zu tun, so ist bei einer Navigation durch das System ein weiches Überblenden (Morphen) der Objekte beim Übergang von einem zum nächsten Skalenbereich wünschenswert. Werden die Objekte der unterschiedlichen Skalenbereiche in Beziehung gesetzt, so realisieren schon einfache Morphing-Algorithmen ein weiches Überblenden. Werden neben den geographischen Objekten in einem Geographischen Informations-System auch zeitliche Entwicklungsprozesse berücksichtigt, so kann eine flüssige Animation von beispielsweise geologischen und ökologischen Veränderungen zu einem wesentlich besseren Verständnis der Prozesse führen.

Ähnliche Anwendungen werden auch in anderen Bereichen des Bauingenieurwesens Einzug halten. Hierbei ist zu erwarten, daß die beim Morphing einbezogenen Objekte nicht mehr rein geometrischer Natur sind, sondern daß ganze Systemzustände und Prozesse als eigenständige Objekte eines entsprechenden Morphing-Raumes aufgefaßt werden. Dies könnte dazu führen, daß beispielsweise eine Vielzahl von Projektstudien und Simulationsergebnissen in einem Archiv abgelegt werden und bei einem neu zu bearbeitenden Projekt, zunächst eine gemorphte Aussage, aus den schon durchgeführten Projekten, generiert wird. Hierdurch kann eine grobe Abschätzung der zu erwartenden Phänomene gegeben werden.

Anwendungen in der Umweltsystemmodellierung

Mit dem zunehmenden Einsatz der Informationsverarbeitung in allen Bereichen des Bauingenieurwesens rücken Fragestellungen im Zusammenhang mit Datenbanken, Informations-, Simulations- und Managementsystemen in das Aufgabenfeld des Bauingenieurs. Die Bebauungsentwicklung, die zunehmende Dimension von Ingenieurbauwerken sowie neue Rahmenbedingungen des Umweltschutzes führen zu neuen qualitativen und quantitativen Anforderungen an Planungs-, Durchführungs- und Managementaufgaben. Die Modellierung von Umweltfragestellungen ist gekennzeichnet durch ihre Mehrdimensionalität in Raum und Zeit. Hinzu kommt die Vielfalt der zu beschreibenden Prozesse. Sind bei klassischen Ingenieurobjekten, die Produkte menschlichen Schaffens sind, im allgemeinen Material, Ausmaße und Systemverhalten bekannt bzw. gut abschätzbar, so hat man es bei Umweltproblemen mit vielen unbekanntem Größen zu tun. Die Umweltsystemmodellierung umfaßt die Beschreibung von natürlichen Prozessen wie dem Wasserkreislauf, biologischen Wachstums- und chemischen Reaktionsprozessen in der Luft, dem Wasser und Boden. Grundlage für die Modellierung bildet das zu analysierende System und das daraus abgeleitete Modell. Im folgenden soll kurz auf einige grundlegende Begriffe eingegangen werden.

Ein **System** besteht aus einer Menge von Elementen zwischen denen bestimmte Beziehungen bestehen oder die nach bestimmten Regeln zu verwenden sind. Nicht alle in der Umwelt vorkommenden Konstruktionen und Objekte werden als System bezeichnet. Damit ein Objekt ein System ist müssen allgemeine Merkmale erfüllt sein. Ein System besitzt eine bestimmte Funktion, die einen Systemzweck definiert. Werden von einem System Elemente oder Beziehungen entfernt, so würde es seinen ursprünglichen Systemzweck nicht mehr erfüllen. Ein weiterer wichtiger Aspekt eines Systems ist der Charakter seines Verhaltens. Als statisch wird es in der Regel eingestuft, wenn sich sein Zustand in einem bestimmten Zeitabschnitt nicht verändert. Als dynamisch werden Systeme eingestuft, wenn sich ihr Zustand in einem definierten Zeitintervall verändert. Würde hingegen ein beliebig langer Zeitraum betrachtet werden, würde jedes System dynamisch sein, da sein Zustand immer gewissen Alterungserscheinungen unterliegt. Um reale Systeme beschreiben zu können werden Modelle entwickelt.

Ein **Modell** ist eine vereinfachte repräsentative Darstellung eines Gegenstandes der realen Welt oder des Ablaufes eines Prozesses, die eine Untersuchung oder Erforschung erleichtert oder erst möglich macht. Da ein Modell eine vereinfachte Darstellung eines Systems ist, repräsentiert es nur die dem Modell zugrunde gelegten Annahmen. Hierbei ist es wichtig zu erkennen, daß ein in sich abgeschlossenes Modell immer konsistent ist,

solange die zugrunde gelegten Annahmen eingehalten werden, auch wenn sich das Modell nicht mit der Wirklichkeit vereinbaren läßt. Zur Definition eines Modells für spezielle Umweltfragestellungen müssen die Eigenschaften des realen Systems beschrieben werden, die zur Lösung der Aufgabenstellung nötig sind. Alle zur Lösung nicht nötigen Eigenschaften können vernachlässigt werden oder stark vereinfacht sein.

Das Aufstellen eines Modells, die Prozeßidentifikation und die Formulierung von Zusammenhängen wird als **Modellbildung** bezeichnet. Werden dynamische Systeme untersucht, so reicht es im allgemeinen nicht aus, die Prozesse formal zu beschreiben. Vielmehr wird bei dynamischen Systemen dazu übergegangen unter Verwendung von physikalischen und numerischen Modellen das Systemverhalten über gewisse Zeiträume zu untersuchen. Insbesondere das Aufstellen von numerischen Simulationsmodellen ist in vielen Bereichen des Bauingenieurwesens integraler Bestandteil der Modellbildung und eine wesentliche Grundlage zur Entscheidungsfindung. Numerische Modelle sind besonders gekennzeichnet durch die Möglichkeit Prozesse prognostisch zu beschreiben, zerstörungsfreie Versagenssimulationen durchzuführen sowie das Studium einer Vielzahl von Varianten zu erlauben.

Der Schwerpunkt in dieser Arbeit liegt im Bereich der Umweltsimulation, speziell der Simulation von hydrodynamischen Prozessen im Küstenbereich [132] (Abb. 6.0.1). Die im Bauingenieurwesen interessierenden physikalischen Prozesse im Küstenbereich zeichnen sich durch unterschiedlichste Skalen sowohl in der örtlichen Ausdehnung als auch in ihren Zeitskalen aus. Der Charakter der hydrodynamischen Vorgänge erfordert sowohl deterministische als auch stochastische Modellbetrachtungen. Die physikalische Modellvorstellung zur Beschreibung der Dynamik eines Wasserkörpers basiert auf den 3-dimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen. Diese zeitabhängigen partiellen Differentialgleichungen beschreiben die Transportvorgänge im Wasserkörper. Die zwei wesentlichen Randbedingungen bilden der Meeresboden und die freie Oberfläche des Wassers als Grenze zur Luft. Die Modellierung der Bathymetrie ist daher wesentlich für die Güte von Simulationsergebnissen (Abschn. 6.1).

Im Rahmen numerischer Modelluntersuchungen ist es im allgemeinen nicht möglich Globalmodelle zu betreiben. Vielmehr werden nur Ausschnitte (Teilgebiete) betrachtet. Als Modellvorstellung hierfür wird die Einbettung in eine globale Dynamik verwendet. Die am Gebietsrand zu spezifizierenden Größen beeinflussen wesentlich die Simulationsergebnisse (Abschn. 6.5) und damit auch die Qualität der physikalischen Aussagen, die daraus abgeleitet werden.

Weiterhin führen der stochastische Charakter als auch das Unverständnis von Teilprozessen häufig zur Parametrisierung von physikalischen Prozessen. Die Identifikation solcher Parameter und Parameterkombinationen ist eine im Ingenieurwesen häufig auftretende Aufgabe und erfordert ein hohes Maß an Erfahrung (Abschn. 6.6).

Neben den soeben am Beispiel von Modellen im Küsteningenieurwesen dargestellten Bereichen der Modellbildung wie Prozeßidentifikation, Geometrieapproximation und Modellsteuerung, spielt die Generierung von Rechnernetzen bei netzbasierten Simulationsmodellen eine wichtige Rolle. Hierbei muß klar zwischen der Geometriemodellierung und den benötigten Gitternetzen unterschieden werden. Bei der Geometriemodellierung geht es vorwiegend darum, die als Randbedingung zu betrachtenden im wesentlichen geometrischen

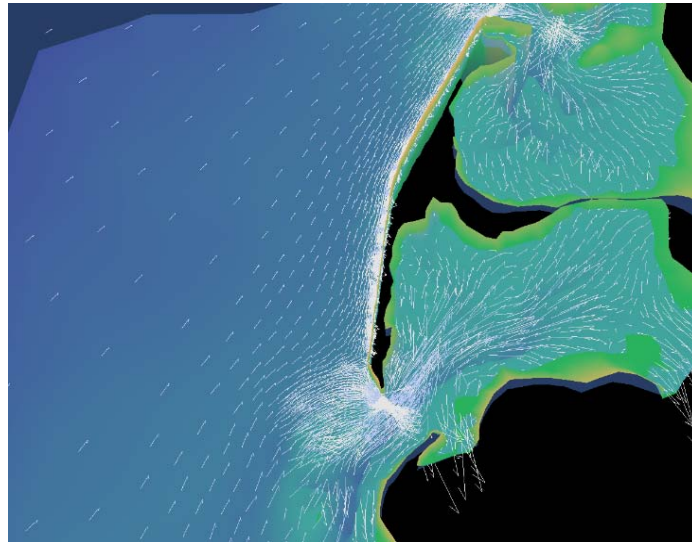


ABBILDUNG 6.0.1. Strömungszustände an der Südspitze von Sylt

Eigenschaften möglichst gut zu beschreiben. Grundlage der Geometriemodellierung sind im allgemeinen Naturdaten, die aus punktuellen Messungen stammen. Im Gegensatz dazu muß das Berechnungsnetz im Zusammenspiel mit der verwendeten Approximation die abhängigen physikalischen Größen und deren Dynamik wiedergeben können. Sowohl die Generierung als auch die Übertragung der Geometrieinformationen auf die Diskretisierung des numerischen Modells können durch geometrische Algorithmen realisiert werden.

Ausgehend von der Modellbildung, den durchgeführten Simulationen und der Analyse der Ergebnisse, steht am Ende eines solchen Prozesses immer die Formulierung von Empfehlungen und Aussagen.

6.1. Modellbildung bathymetrischer Daten

Für die Beurteilung morphologischer Änderungen in natürlichen hydrodynamischen Systemen sowie als Grundlage zur Erstellung von Modelltopographien in hydraulischen und numerischen Modellen spielt die Handhabung großer topographischer Datenmengen eine wesentliche Rolle. Topographien können zusätzlich zur klassischen Konturkarte durch verschiedene analytische, numerische und digitale Methoden modelliert werden. Bei der Aufnahme eines Geländes, z.B. durch Fächerecholotungen bei Unterwasserstränden oder Laserscanaufnahmen bei Vorländern und trockenfallenden Gebieten, entstehen im allgemeinen große Mengen von Punktdaten. Die Punktförmigkeit der Messungen führt dazu, daß die zu beschreibende Fläche nicht an allen Stellen definiert ist. Die Werte der dazwischen liegenden Punkte müssen deshalb über ein angemessenes Modell interpoliert werden. Hierzu wird angenommen, daß die raumbezogenen Daten räumlich zusammenhängen. Räumlich unabhängige Daten können nicht interpoliert werden, da auf Grund der Unabhängigkeit der Daten aus den beobachteten Daten keine Informationen über die

Daten an unbeprobten Orten gewonnen werden können. Wie im Kapitel 5 aufgezeigt, stehen hierfür eine Vielzahl von Interpolationsmethoden zur Verfügung. Wesentlich ist nun, schon im Vorfeld der Untersuchungen ein geeignetes Modell zu wählen, denn auch die Ergebnisse der verschiedenen Methoden können sehr unterschiedlich sein. Die Qualität der interpolierten Ergebnisse hängt von der Genauigkeit, Anzahl und Verteilung der der Berechnung zugrundeliegenden bekannten Punkte ab. Dies ist insbesondere bei der Datenerhebung (Vermessung) zu berücksichtigen. Weiterhin hängt die Qualität aber auch davon ab, wie gut die mathematische Modellfunktion das darzustellende Phänomen modelliert. So kann es sinnvoll sein, für unterschiedliche Phänomene unterschiedliche Interpolationsmethoden heranzuziehen.

6.1.1. Digitale Geländemodelle.

Besteht der Wunsch, eine reale Geländeoberfläche zu beschreiben, so stehen sowohl klassische Träger, wie topographische, See- oder allgemeine Konturkarten, als auch digitale Realisierungen von Karten zur Verfügung. Grundlage einer digitalen Karte ist das digitale Geländemodell, das sich aus flächenbildenden Polygonen, die die Geometrie der Erdoberfläche approximieren, zusammensetzen.

Die wesentlichen Qualitätsunterschiede der verschiedenen Interpolationsmethoden, die bei der Generierung eines digitalen Geländemodells eingesetzt werden können, werden nicht, wie dies im Kapitel 5 geschehen ist, gegen eine analytisch gegebene Funktion aufgezeigt, sondern es wird ein natürliches Beispiel herangezogen, der Unterwasserstrand eines Bühnenfeldes vor der Nordseeinsel Norderney (Abb. 6.1.1). Die Verteilung der digitalisierten Geländepunkte ist unregelmäßig und entspricht realen Basisdaten, wie sie in Ingenieurprojekten anzutreffen sind.

Die erste und einfachste Methode zur flächigen Beschreibung von bathymetrischen Daten war die Nutzung von Geländemerkmalen, wie Rinnen, Sandbänken, Häfen usw.. Die Annahme der Konstanz der zu interpolierenden Parameter führte zu einem gestuften Landschaftsmodell. Im zu interpolierenden Bühnenfeld wird angenommen, daß keine, bezüglich Geländemerkmalen vorgegebene Unterteilung vorliegt. Die Thiessen-Polygone (Voronoi-Diagramme) führen in einem solchen Fall zu einer natürlichen (abstandsabhängigen) Unterteilung des Gebietes bezüglich einer gegebenen Punktmenge. Werden allen Punkten einer Voronoi-Region die Werte des Bezugspunktes zugeordnet, so wird von einer **Voronoi-Interpolation** (Abschn. 5.3) gesprochen. Stufige Interpolationen werden bei der Generierung von Rechennetzen für mehrdimensionale numerische Verfahren, bei denen der Wasserkörper in Schichten diskretisiert wird, wieder interessant.

Wie in Abschnitt 4.3.1 dargestellt, können Nachbarschaftsbeziehungen aus Voronoi-Diagrammen in der dualen Struktur der **Delauny-Triangulation** beschrieben werden. Die entstehenden Dreiecksnetze bilden die Grundlage für Finite Element Interpolationen der Bathymetrie wie auch als Rechennetze für numerische Verfahren auf der Grundlage der Finiten Element Approximationen. Finite Dreiecksnetze haben ihren festen Platz als ein Standardwerkzeug zur Generierung von digitalen Geländemodellen. Eine ihrer Stärken ist

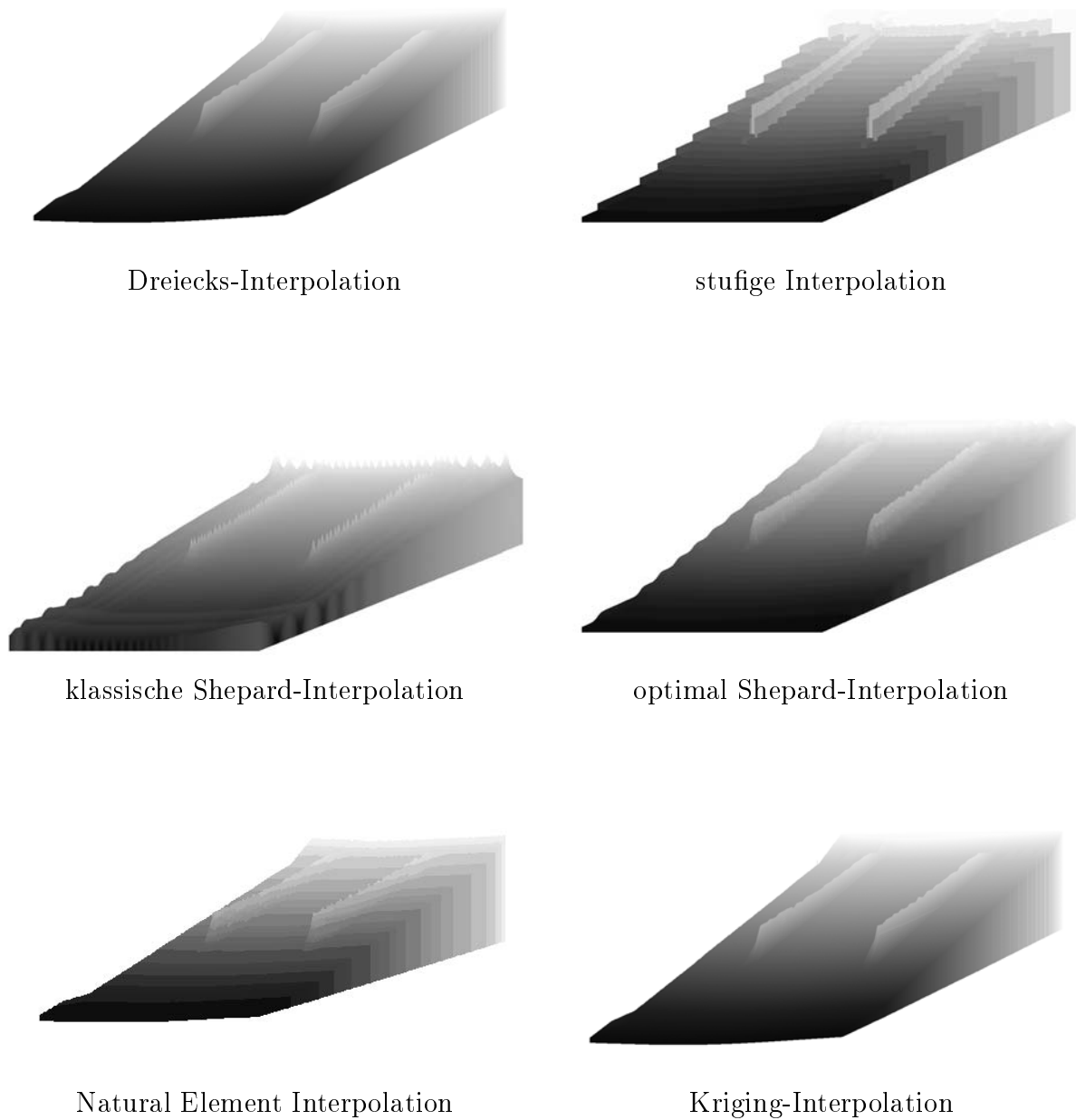


ABBILDUNG 6.1.1. Vergleich der Interpolationen

die Möglichkeit durch manuelles Eingreifen (Umlegen von Kanten) oder das Festlegen von Zwangskanten in Form von Isolinien sehr schnell gefällige Geländemodelle zu generieren.

Der wohl bekannteste Ansatz, aus punktuellen Informationen flächenhafte Aussagen zu erhalten, kommt aus der Meteorologie und Geologie. Die **Shepard-Interpolation** (Abschn. 5.6.1) ist eine sehr flexible Interpolation und die Basis einer Vielzahl modifizierter Verfahren. Im Rahmen dieses Vergleiches wurde die klassische globale Shepard-Interpolation und eine lokale Variante eingesetzt. Die klassische globale Shepard-Interpolation führt dazu, daß die Stützstellen der Interpolation stark hervortreten, was den Eindruck von Spitzen und Löchern hervorruft. Die optimierte Shepard-Interpolation verwendet einen flexiblen Einflußbereich, der so gewählt wird, daß nur die natürlichen Nachbarn zur Interpolation herangezogen werden. Diese Herangehensweise führt zu einer wesentlichen Glättung der Shepard-Interpolation. Die Ergebnisse ähneln stark denen, die beim Kriging berechnet wurden.

Als letzte nicht statistische Interpolation wurde eine natürliche Element Interpolation (Abschn. 5.6.4) in den Vergleich mit einbezogen. Bei der natürlichen Element Interpolation wurden nur die natürlichen Nachbarn zum zu interpolierenden Punkt herangezogen. Im Unterschied zur optimalen Shepard-Interpolation, bei der ebenfalls nur die nächsten Nachbarn herangezogen wurden, basiert die natürliche Element Interpolation auf Flächenverhältnissen und nicht auf Abstandsverhältnissen. Die natürliche Element Interpolation generiert bei der hier verwendeten Punktemenge die optisch glatteste Geländeoberfläche.

Ein großer Nachteil der soeben beschriebenen nicht statistischen Interpolationsmethoden ist die vom jeweiligen realen Problem unabhängige Festlegung des räumlichen Zusammenhangs.

Wird der räumliche Zusammenhang in Abhängigkeit von den betrachteten Daten gewählt, so spricht man von statistischen Interpolationsverfahren. Ein klassischer Vertreter ist hierfür das **Kriging** (Abschn. 5.7). Bei der Bestimmung des Variogramms ergab sich ein sehr beschränkter Einflußbereich. Dies erklärt auch das ähnliche Aussehen der interpolierten der optimierten Shepard-Interpolation und des Krigings.

Allgemein kann festgestellt werden, daß es keine universell einsetzbare Interpolationsmethode gibt. Vielmehr gibt es für bestimmte Klassen von Problemstellungen eher geeignete als ungeeignete Verfahren. Im Rahmen von digitalen Geländemodellen, bei denen eine relativ gleichmäßige Verteilung der Stützstellen vorliegt, ist die natürliche Element Interpolation zu favorisieren. Liegen Informationen im wesentlichen in den Randbereichen des zu beschreibenden Gebietes vor, so hat sich die Shepard-Interpolation als geeignet herausgestellt. Hierfür ist die Bestimmung einer Ausgangswasserspiegellage aus den Randwerten in Abschnitt 5.6.4 ein überzeugendes Beispiel. Geht es jedoch darum, durch Eingriffe des Menschen entstandene Strukturen zu beschreiben, ist die Verwendung strukturierter Netze vorzuziehen, da diese für Konstruktionsprozesse eher geeignet sind.

Werden neben den zu interpolierenden Werten Aussagen über die Vertrauenswürdigkeit benötigt, so kommt man um den Einsatz geostatistischer Verfahren nicht herum.

6.1.2. Sedimentbeprobungen.

Das Aufnehmen von Sedimentproben im Küstenvorfeld stellt eine wesentliche Grundlage für die Einschätzung von Sedimenttransportvorgängen sowie für die Einschätzung von

Sedimentressourcen für küstenbauliche Maßnahmen dar. Solche Sedimentbeprobungen haben im allgemeinen einen punktuellen Charakter. Die Abbildung 6.1.2 zeigt die Lage der einzelnen Meßpunkte, welche unregelmäßig über das Gebiet verteilt sind. Man ist

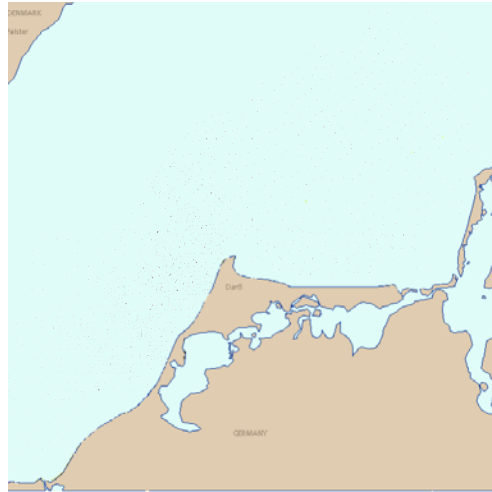


ABBILDUNG 6.1.2. Lage der Meßpunkte der Sedimentaufnahme

jedoch im allgemeinen nicht an den Punktdaten selbst interessiert, sondern möchte Informationen über die flächenhafte Verteilung des Sedimentes haben. Für die exemplarische Durchführung einer geostatistischen Interpolation wird im weiteren nur der mittlere Korndurchmesser betrachtet.

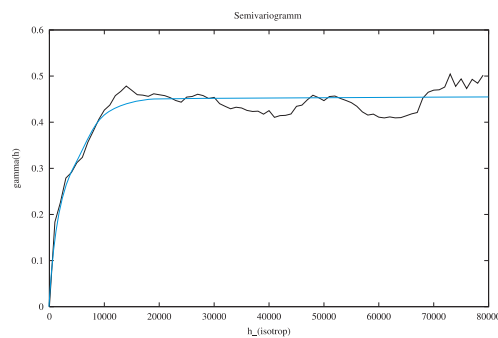


ABBILDUNG 6.1.3. Experimentelles und theoretisches Variogramm

Ausgehend von einer Klassenbreite von einem Kilometer erhält man das in Abbildung 6.1.3 dargestellte experimentelle Variogramm des mittleren Korndurchmessers. Ein Bereich der räumlichen Abhängigkeit (im Umkreis von 15 Kilometern) und ein Schwellwert sind gut erkennbar. Als zugehöriges theoretisches Variogramm kommt ein exponentielles Variogramm in Frage.

Das Kriging Verfahren wurde für ein Raster von 500*700 Punkten durchgeführt, die den Punkten des Bildschirmes entsprachen. Die Abbildung 6.1.4 zeigt die Ergebnisse mit Hilfe eines Graustufen-Bildes.

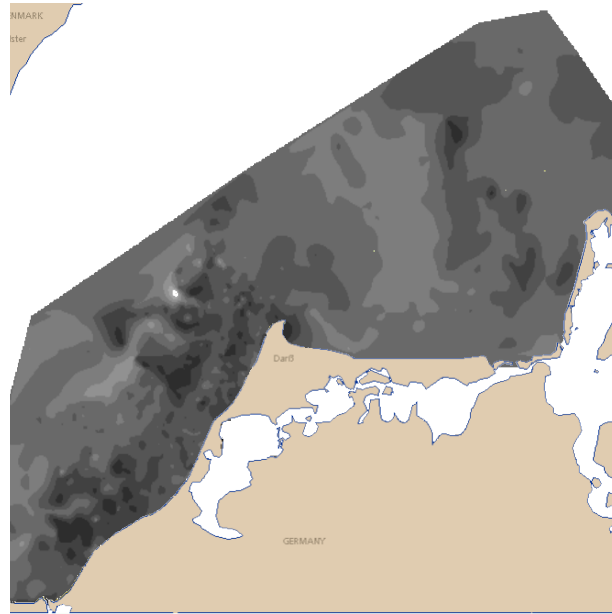


ABBILDUNG 6.1.4. Ergebnis des Kriging Verfahrens

6.1.3. Topographische Interpolationen in Raum und Zeit.

In den vorherigen Abschnitten wurden Interpolationen im Ort betrachtet. Das Ziel bestand hierbei in der Interpolation flächiger Daten, die zu einem bestimmten Zeitpunkt aufgenommen worden sind. Im Rahmen des Umweltmonitoring kommt es in vielen Ingenieurbereichen zu Messungen von Parametern in unterschiedlichen Zeitintervallen und differenzierten örtlichen Auflösungen. Beispielweise werden im Küstenbereich Schiffahrtsrinnen wesentlich häufiger Vermessen als trockenfallende oder sehr tiefe Bereiche (Abb. 6.1.5).

Werden diese Informationen in einer Datenbank gesammelt, so besteht häufig der Wunsch, zu einem gewissen Zeitpunkt konsistente Tiefeninformationen in einem gewissen Gebiet zu erhalten. Diese Aufgabe wirft zwei Fragen auf:

- Sind überhaupt Informationen vorhanden? Dies läuft darauf hinaus, daß der Konfidenzbereich der Datenerhebung bestimmt werden muß.
- Wenn Informationen im gewünschten Bereich vorhanden sind, wie kann eine zu diesem Zeitpunkt wahrscheinliche Tiefenverteilung bestimmt werden?

Die erste Frage des Konfidenzbereiches läßt sich recht einfach durch die Berechnung der konvexen Hülle im Orts-Zeit-Raum beantworten.

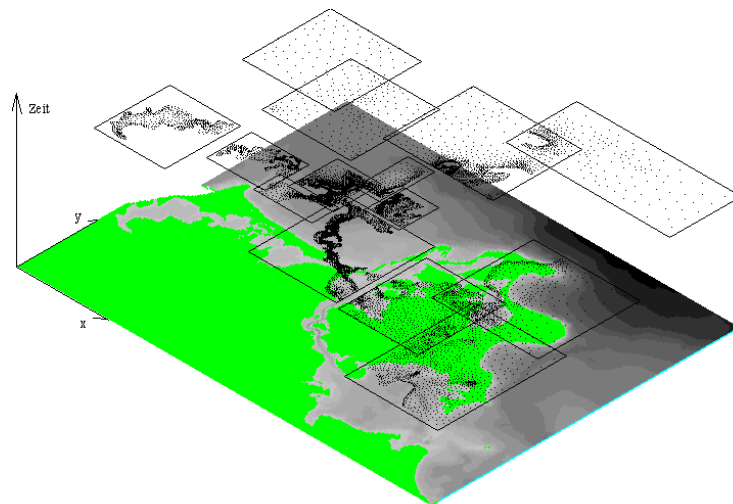


ABBILDUNG 6.1.5. Vermessungsbereiche im Orts-Zeit-Raum

Die Bestimmung einer wahrscheinlichen Tiefenverteilung ist zunächst wieder ein klassisches Interpolationsproblem (Abb. 6.1.6). Zu einem festgelegten Zeitpunkt kann beispielsweise an jedem Ort eine Tiefe mittels netzfreier Interpolation im Orts-Zeit-Raum berechnet werden. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil der freien Wahl eines Gitters, auf welches die Tiefenverteilung abgebildet wird. Dies erfordert eine gute Abstimmung der verwendeten Abstandsfunktion auf die Ausdehnungen im Ort und in der Zeit.

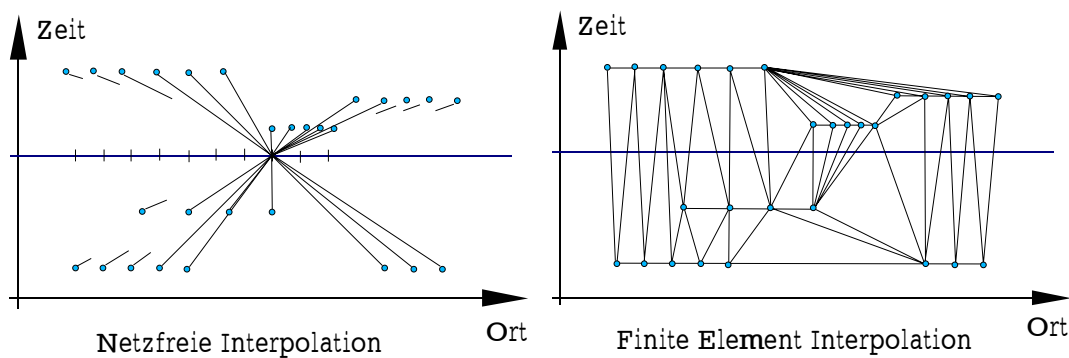


ABBILDUNG 6.1.6. Interpolation im Orts-Zeit-Raum

Bei einer anderen Herangehensweise wird zunächst eine Simplicial- oder Zellzerlegung des Orts-Zeit-Raumes bezüglich der Meßpunkte generiert. Die Bestimmung einer Tiefenverteilung läuft in diesem Fall auf eine Schnittbildung mit einer Hyperebene hinaus. Vorteil dieser Herangehensweise ist, daß zur Interpolation der Tiefe nur topologisch benachbarte Messungen herangezogen werden. Das entstehende Netz kann unter Umständen aber sehr

unterschiedliche Netzweiten aufweisen. Verschiebt man die betrachtete Hyperebene kontinuierlich über die Zeit, so erhält man einen Eindruck von der zeitlichen Entwicklung der Tiefenverteilung.

6.1.4. Geometrische Algorithmen auf topographischen Daten.

Nachdem man in die Lage versetzt wurde, zu einem bestimmten Zeitpunkt mittels eines digitalen Geländemodells die Topographie bzw. Bathymetrie im Rechner zu beschreiben, können weitere geometrische Algorithmen ihre Anwendung finden.

Das Verschneiden digitaler Geländemodelle aus unterschiedlichen Zeiträumen läßt beispielsweise Aussagen über Massenbilanzen zu. Durch das geometrische Verschneiden des digitalen Geländemodells mit einer Fläche eines zu erwartenden Wasserstandes wird der Umweltingenieur in die Lage versetzt potentielle Überflutungsgebiete zu identifizieren (Abb. 6.1.7). Sowohl im Küstenraum als auch in Flußlandschaften erhält man auf diese Weise, ohne aufwendige Simulationen, gefährdete Bereiche bezüglich eines Wasserstandes. Weitere Informationen solcher Untersuchungen können Zusammenhangskomponenten sein, die bei Versagen von Schutzbauwerken zusammenhängende Überflutungsbereiche kennzeichnen. Wird der zeitliche Vorgang einer Flutwelle benötigt, kommt man um numerische oder physikalische Simulationen der Vorgänge nicht herum. Aber auch hier bilden die digitalen Geländemodelle eine wesentliche Grundlage und bestimmen somit die Qualität der Simulationen.



ABBILDUNG 6.1.7. Identifikation von überfluteten Bereichen

6.2. Bodenmodelle

Bei der Planung und Realisierung von Bauvorhaben unterschiedlichster Art, der Nutzung von Naturressourcen und der Abschätzung von Risiken künstlicher Eingriffe werden großmaßstäbliche Informationen über geographische, geologische und andere Umweltdaten benötigt. Neben digitalen Geländemodellen und flächigen Objekten, wie Altlasten-Standorte, Mülldeponien usw. spielen numerische Modelle in der Geologie und Geotechnik eine wichtige und heikle Rolle. Einerseits ist das Interesse an Ergebnissen groß, denn es gibt im allgemeinen keine alternative Erkenntnismöglichkeit. Nachzusehen, wie die Verhältnisse in mehreren Kilometern Tiefe wirklich sind, erfordern teure Bohrungen, was man allenfalls unternehmen würde, wenn wirtschaftliche Interessen vorliegen. Andererseits fehlt dem Ingenieur dadurch häufig die Möglichkeit, seine Modelle und Annahmen an der Realität zu

prüfen. Mehr als andere Wissenschaften ist die Geologie also auf ein enges Zusammenspiel zwischen Modellbildung und Simulation auf der Basis der erstellten Modelle angewiesen.

Auf Grund der geologischen Entwicklung besteht der Boden im allgemeinen aus Schichten unterschiedlichen Aufbaus. Bodenschichtenmodelle geben dem Ingenieur Aufschluß über den Verlauf von Erdschichten im (Bau-) Grund. Neben Haupt- und Nebenbodenarten können Härte, Schichtung, Verwitterungsgrad, Feuchtigkeit und andere Eigenschaften von Interesse sein. Die Kenntnis dieser Bodenstrukturen sowie die Kenntnis über verschiedene Grundwasserleiter und Stauschichten, sind unter anderem zur Beurteilung der Stabilität von Bauten, zur Beurteilung der Grundwassersituation und Risikoanalyse bei Schadstoffeintrag in das Erdreich notwendig.

Durch die Entnahme von Bohrproben wird versucht, den Verlauf der Bodenschichten zu bestimmen. Solche Bohrproben (Abb. 6.2.1) sind sehr kostspielig und so wird versucht, mit möglichst wenigen auszukommen. Um den Verlauf solcher Erdschichten zu modellieren wird angenommen, daß sich die einzelnen Erdschichten stetig verändern. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß von einem solchen stetigen Verhalten generell nicht ausgegangen werden kann.

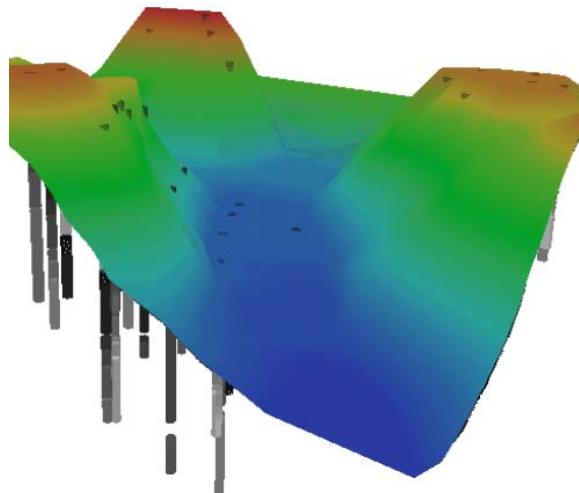


ABBILDUNG 6.2.1. Geländeoberfläche und Bohrkerne

Zum Aufbau der dreidimensionalen Bodenstruktur werden die Geländeoberfläche und mehrere Bohrprofile herangezogen. Hierbei sind die Bohrprofile mit der Geländeoberfläche verknüpft. Es ist häufig notwendig, daß von einem Fachmann eine Vereinheitlichung der Bohrprofilinformationen durchgeführt werden muß ([14],[141]), um eine automatische Modellgenerierung zu ermöglichen.

Die zu beschreibende Geländeoberfläche kann durch ein zweieinhalbdimensionales digitales Geländemodell repräsentiert werden, das z.B. aus einem Dreiecksnetz bestehen kann.

Die Bohrprofile werden mit der Oberfläche verknüpft und beinhalten die Bodenschichteninformation des Bohrprofils. Je nach Notwendigkeit können diese als Liniensegmente oder Zylinder modelliert werden.

Die Modellierung des dreidimensionalen Verlaufs der Bodenschichten kann unter bestimmten Umständen durch Interpolation von Grenzschichten erfolgen (Abb. 6.2.2). Hierzu werden die Schichtgrenzen in jedem Bohrprofil identifiziert und gekennzeichnet. In einem zweiten Schritt wird die dreidimensionale Lage einer ausgewählten Schichtgrenze in allen Bohrprofilen als Stützstellen einer zweieinhalbdimensionalen Fläche aufgefaßt. Die Bestimmung der Lage dieser Grenzfläche zwischen zwei Bodenschichten an jedem Ort des betrachteten Gebietes kann unter Zuhilfenahme der in Kapitel 5 dargestellten Interpolationsverfahren erfolgen. Eine solche Herangehensweise erfordert im allgemeinen die Existenz der entsprechenden Grenzschichten im gesamten Gebiet. Das Verschwinden von Bodenschichten kann in solchen Fällen durch das Zusammenlegen von Grenzen verschwindender Bodenschichten erfolgen.

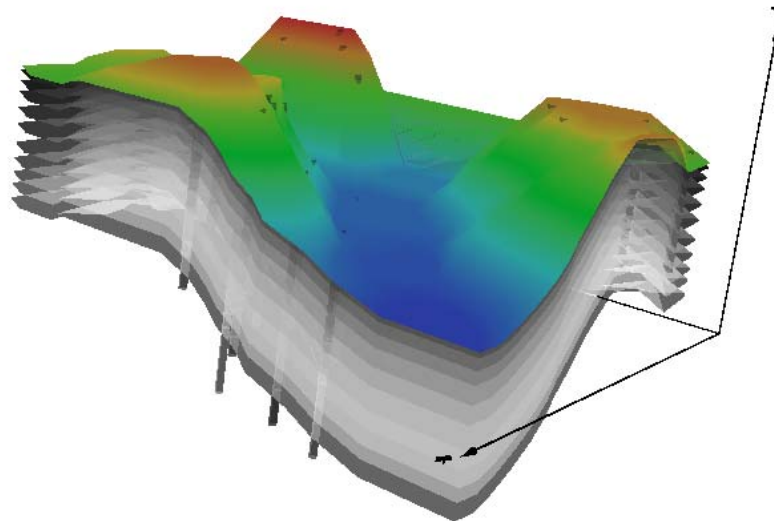


ABBILDUNG 6.2.2. Aus den Bohrkernen interpolierte Bodenschichten

Der Grundwasserspiegel bzw. die Grundwasserleiter können auf analoge Weise modelliert werden und bilden die Grundlage für geotechnische Berechnungen und Nachweise. Häufig verwendete Darstellungen sind entsprechende Isobaren und Isolinien des ersten Grundwasserleiters. Solche Isolinien werden aus Brunnenpegeln bestimmt und können durch Einbeziehung von geologischen Gegebenheiten wesentlich verbessert werden.

Der weiter hinten vorgestellte Algorithmus zur Bestimmung von Parameterkombinationen (Abschn. 6.6) kann zur Berechnung von Isolinien bezüglich unterschiedlicher Interpolationsfunktionen herangezogen werden. Aber nicht nur die Wahl der Interpolationsmethode ist ausschlaggebend für die Qualität des Schichtenmodells. Das verwendete Bezugsniveau muß den geologischen Gegebenheiten angepaßt werden. Interpoliert man beispielsweise die

Bohrkerninformationen entsprechend der relativen Tiefe zur Geländeoberfläche, so geht man davon aus, daß der Boden als gefaltet angenommen wird. Interpolationen bezüglich eines theoretischen Nullniveaus sind hingegen besser zur Wiedergabe von Ablagerungsstrukturen geeignet.

Wesentlich schwieriger ist die Bestimmung geologischer Strukturen, wenn von nicht zusammenhängenden Schichtformationen ausgegangen werden muß. Durch die Faltung und das Brechen großer geologischer Strukturen sowie anschließender Erosion können Gesteinsschichten an der Erdoberfläche aufhören bzw. bis in tiefe Erdregionen verschoben sein. Die Rekonstruktion solcher Strukturen aus wenigen Daten ist ein schwieriger Prozeß und kann häufig nur mit viel Erfahrung gelöst werden. Geometrische Algorithmen stellen auch hier gute Werkzeuge zur Verfügung um den Experten bei seiner Arbeit zu unterstützen.

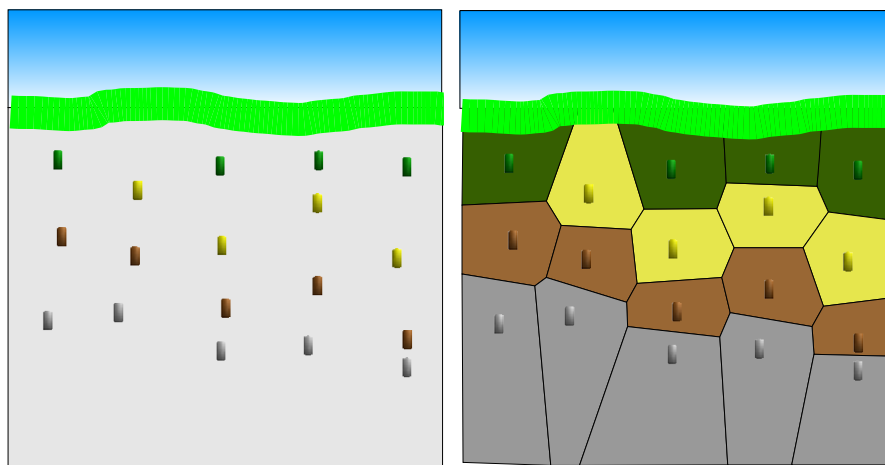


ABBILDUNG 6.2.3. 2-dimensionale Voronoi-Zerlegung

In der Abbildung 6.2.3 ist ein fiktiver Schnitt durch eine geologische Struktur aus punktuellen Informationen (farblich gekennzeichnet) zu rekonstruieren. Werden zu den Beprobungen die zugehörigen Voronoi-Regionen in der euklidischen Metrik konstruiert, so lassen sich zusammenhängende Strukturen identifizieren, aber auch nichtzusammenhängende Schichten beschreiben.

Diese Vorgehensweise läßt sich auf natürliche Weise in den dreidimensionalen Raum erweitern, so daß eine vollständige Beschreibung dreidimensionaler geologischer Strukturen möglich wird (Abb. 6.2.4)[135]. Sowohl in der Ebene als auch im dreidimensionalen Raum ist erkennbar, daß die Grenzen zwischen den Schichten ein sehr kantiges Aussehen haben. Durch geeignet glättende Algorithmen kann ein gefälligeres Aussehen der Schichtstrukturen realisiert werden. erinnert man sich an die Abbildung 2.4.2 in der Voronoi-Zerlegungen bezüglich unterschiedlicher Metriken dargestellt sind und daran, daß man Wichtungen von

Abstandsfunktionen vornehmen kann, so eröffnet sich ein breites Feld von möglichen Modifikationen des beschriebenen Verfahrens um spezifische geologische Eigenschaften einfließen zu lassen.

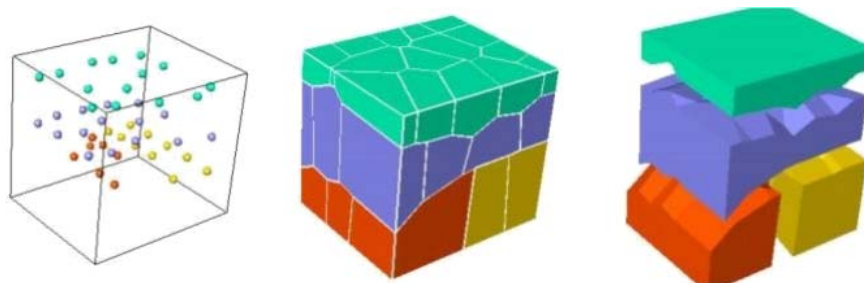


ABBILDUNG 6.2.4. 3-dimensionale Voronoi-Zerlegung (aus [135])

Simulationsmodelle können ausgehend von Bodenmodellen Prozesse im Boden beschreiben oder die Auswirkung von Eingriffe in Form von Bauwerken auf Bodenprozesse und deren Rückkopplung auf das Bauwerk beschreiben [57]. Sowohl der Boden als auch die eingebrachten Ingenieurkonstruktionen lassen sich durch Zellen und Zellzerlegungen beschreiben.

6.3. Geographische Informations-Systeme

In den letzten beiden Abschnitten ist auf die Modellierung von Geländeoberflächen und Bodenformationen eingegangen worden. Diese beiden Einzelmodelle sind häufig Bestandteil eines Geographischen Informations-Systems.

Geographische Informations-Systeme (GIS) behandeln in geeigneter Weise gemeinschaftlich topographische Daten und solche, die nicht topographischer Natur sind (Sachdaten). Unter der Topographie wird alles das verstanden, was auf der Erde sichtbar ist. Die Verknüpfung von geometrischen mit den Sachdaten unterscheidet GIS grundlegend von Computer Aided Design (CAD) Systemen, bei denen die Geometrie die einzig verwendete Information ist.

Was man unter einem Geographischen Informations-System zu verstehen hat, ist nicht eindeutig geklärt. Die Spannweite von Systemen, die unwidersprochen als GIS zählen, reicht von großen, meist modularen Systemen bis hin zum weniger aufwendigen, kleinen „Desktop-GIS“. In Anlehnung an [37] wird im weiteren folgende Definition verwendet. Ein Geographisches Informations-System besteht aus einem Software-Paket plus Datensammlung, um in einem datenbankbasierten System raumbezogene Informationen zu erfassen, speichern, verwalten, analysieren und vor allem grafisch auszugeben. Somit werden schon einfache Routenplaner als GIS aufgefaßt. Die Tendenz bei der Entwicklung von Geographischen Informations-Systemen geht jedoch hin zu modularen Systemen, die auch die Integration numerischer Modelle beinhalten ([147]).

Die Mehrzahl der Geographischen Informations-Systeme ist gekennzeichnet durch eine Zweiteilung der Daten und Informationen in geometrische Informationen und Sachdaten. Diese künstlich erscheinende Zweiteilung ist historisch entstanden und begründet in den Schwierigkeiten, Geometriedaten in relationalen Datenbanken zu speichern. Objektorientierte Methoden und Datenbanken eröffnen neue Möglichkeiten, Geometrie- und Sachdaten ganzheitlich zu betrachten und zu behandeln. Der Ansatz eines punktbasierten Informationsmodells, wie in [161] vorgestellt, dokumentiert die Tragfähigkeit eines solchen Konzeptes.

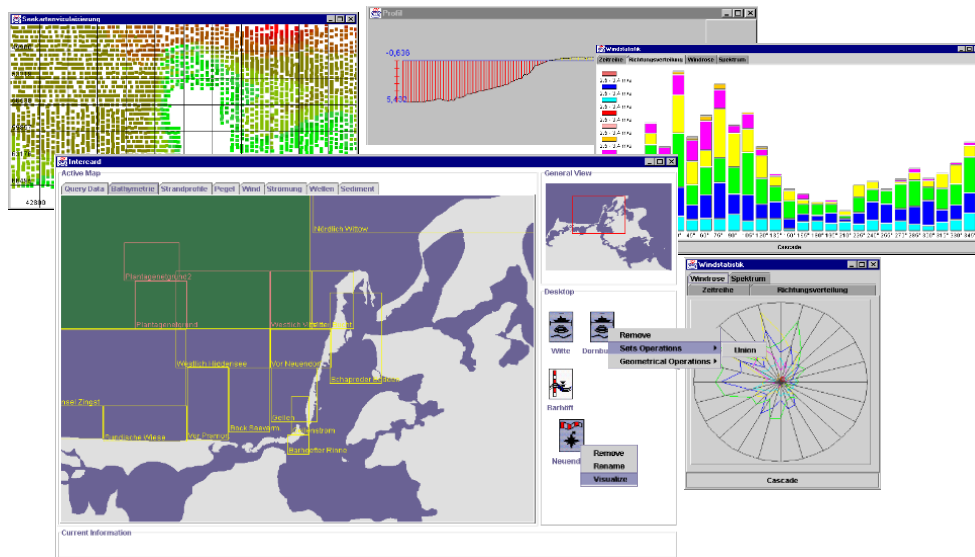


ABBILDUNG 6.3.1. Grafische Nutzeroberfläche der Informationsbasis in MorWin [163]

6.3.1. Typen Geographischer Informations-Systeme.

Auf Grund der Vielzahl sehr unterschiedlicher Anwendungen in denen geographische Informationen mit Sachdaten verbunden werden, ergeben sich vielfältige Spezialisierungen Geographischer Informations-Systeme.

Den Bedürfnissen des Vermessungswesens angepaßt, entstanden Land-Informationssysteme (LIS). Zentrale Fragestellungen sind die exakte geometrische Erfassung und Laufendhaltung des Grund und Bodens sowie hiermit verknüpfter Sachdaten. Sie sind ein Instrument zur Entscheidungsfindung in Recht, Verwaltung und Wirtschaft. Den Bedürfnissen von Raumplanern, Demoskopern und Geographen angepaßte Informationssysteme basieren auf Datensammlungen zur Bevölkerungs-, Wirtschafts- und Siedlungsentwicklung und werden als Raum-Informationssysteme (RIS) bezeichnet. Die Aufgabenbereiche reichen von der Erfassung der Bevölkerungsentwicklung, Wirtschaft und Siedlungen bis hin zur Aufstellung von Entwicklungsprogrammen. Eine weitere große Gruppe von Geographischen Informations-Systemen bilden die Umwelt-Informationssysteme (UIS). Sie sind gekennzeichnet dadurch, daß sie Daten und Informationen berücksichtigen, die

den Zustand der Umwelt hinsichtlich Belastung und Gefährdung charakterisieren und bilden die Grundlage für Entscheidungen im Umweltschutz. Die größte Gruppe der GIS-Nutzer verwenden Netz-Informationen-Systeme. Zentrale Aufgabe sind die Dokumentation und Bearbeitung von Betriebsmitteldaten, z.B. Kundendaten und Daten zu Leitungsnetzen und Anlagen. Zum Abschluß sei auf eine besondere Klasse von Geographischen Informations-Systemen, den Fach-Informationen-Systemen (FIS) eingegangen. In diese Kategorie werden solche Raumbezogenen Informations-Systeme eingeordnet, für die keine der bisherigen Ausprägungen zutrifft.

6.3.2. Datenmodellierung.

Die Abbildung verschiedenartiger Ausgangsdaten in Geographischen Informations-Systemen erfordert eine geeignete und systematische Datenmodellierung. In der Regel werden zur Strukturierung der Daten eine Drei-Ebenen-Hierarchie herangezogen, wobei die unterste Ebene die Geometrie enthält, die in der Regel durch Koordinaten gegeben ist, die mittlere Ebene die Topologie aufnimmt, und die oberste Ebene die semantische Bedeutung des raumbezogenen Objektes wiedergibt. Die klare Trennung zwischen Geometrie im engeren Sinne und der Topologie erlaubt im allgemeinen eine bessere Überprüfung des Datenbestandes und nach der Bereinigung der topologischen Fehler auch dessen Analyse.

Die Geometrie von räumlichen Objekten wird durch die relative Lage von Punkten und durch ihre Form vollständig beschrieben. Bei den Geometriedaten wird eine Einteilung in Raster- und Vektordaten vorgenommen.

Die kleinste Einheit der **Rasterdaten** ist das *Pixel* in der Ebene, bzw. das *Voxel* im dreidimensionalen Raum. Die einzelnen Rasterzellen sind dabei zumeist rechteckig, es sind aber auch Dreieck- und Sechseckstrukturen möglich. Dem von einer Zelle überdeckten Gebiet wird eine bestimmte Information, auch Attribut genannt, zugeordnet. Die Art der Information kann von einer Höhenangabe über Angaben zu Niederschlagsmenge bis zur Darstellung soziologischer Größen nahezu jede thematische Information enthalten. Die Daten werden im allgemeinen durch Scannen der Erdoberfläche mittels satellitengestützter Spezialkameras oder von analogen Vorlagen erhoben. Das Rasterbild als Ganzes kann als Matrix aufgefaßt werden, auf die ohne große Schwierigkeit zahlreiche Operationen ausgeführt werden können. Die wichtigste davon ist die Verschneidung, wobei die Matrixelemente zweier Bilder jeweils über logische Operatoren miteinander verglichen werden, um daraus weitere Informationen abzuleiten. Die topologischen Beziehungen der einzelnen Rasterzellen zueinander beschränken sich im wesentlichen auf Nachbarschaftsbeziehungen und die Ordnung nach der Position der Pixel.

Werden raumbezogene Objekte ausschließlich über Punkte beschrieben, so wird von **Vektordaten** gesprochen. Im zweidimensionalen Raum wird beispielsweise die Gerade durch zwei Punkte und die Fläche durch einen geschlossenen Polygonenzug, dessen Ecken auch wieder Punkte sind, dargestellt.

Sowohl bei der Aufnahme als auch bei der Pflege solcher Daten kommen geometrische Algorithmen zum Einsatz. Hauptanwendungsgebiet für Vektordaten sind Liegenschaftskataster, Digitalisierungen von analogen Karteninformationen, Leitungsdokumentationen

und Planung sowie Konstruktionen am graphischen Arbeitsplatz. Neben den geometrischen Attributen der Vektordaten haben sich für die topologischen Eigenschaften Graphen (Abschn. 2.10) als geeignete Darstellungsform herausgestellt.

Das **geometrische Modellieren** von räumlichen Objekten bildet die Basis der Dreiebenen-Hierarchie. Beim geometrischen Modellieren von dreidimensionalen Objekten wird zwischen analytischen und approximierenden Verfahren unterschieden. Analytische Verfahren basieren auf Flächengleichungen oder Standardvolumen und approximierende Verfahren auf Interpolationen oder Approximationen in finiten Elementen. Der überwiegende Teil der in geographischen Informations-Systemen eingesetzten geometrischen Modellierern hat seine Wurzeln im Bereich der CAD-System (Abschn. 3.5). Die wichtigsten Modellansätze aus dem CAD-Bereich sind die einfachen Kanten- oder Drahtmodelle, Flächen- oder Blockmodelle und die Volumenmodelle. Einfache Objekte können häufig durch eine feste Anzahl von Parametern wie z.B. Länge, Breite, Höhe usw. charakterisiert werden. Solche **parametrischen Darstellungen** geometrischer Objekte eignen sich besonders bei Variantenkonstruktionen, wo es beispielsweise um reines Vergrößern oder Verkleinern geht. Müssen komplexere Objekte dargestellt werden, so besteht eine weitere grundlegende Methode darin, diese Objekte in übersichtlicher Weise aus einfachen Bausteinen zusammenzusetzen. Eine solche **Zellzerlegung** besteht aus einfachen zusammenhängenden Teilkörpern (z.B. Würfel, Tetraeder usw.), welche Zellen genannt werden. Eine geeignete Modellgrundlage bilden hierbei die euklidischen Komplexe bei konvexen polygonalberandeten Teilkörpern bzw. topologische Komplexe bei topologischen Zellen (Kap. 3). Bei der **Randdarstellung** wird ein räumliches Objekt durch seine Begrenzungselemente beschrieben. Die Randdarstellung stellt eine Erweiterung der einfachen Flächenmodellierer dar, in der Hinsicht, daß nicht nur Nachbarschaften zwischen den einzelnen Flächen gespeichert werden, sondern jede Fläche zusätzlich Information darüber speichert, welche Seite nach innen und welche nach außen zeigt. Als letztes seien in diesem Zusammenhang die **konstruktiven Modellierer** genannt, die die Objekte mittels regulärer Mengenoperationen und entsprechender Positionierung konstruieren.

Es hat sich gezeigt, daß sich die geometrische Modellvorstellung des Komplexes in seinen verschiedenen Ausprägungen, wie er in den Abschnitten 3.3 und 3.4 beschrieben wurde, sehr geeignet für die Beschreibung der Geometrie in Geographischen Informations-Systemen ist. Sowohl Randmodellierer als auch Zellzerlegungen sowie die Komposition von Objekten unterschiedlichster Dimension in einem Geographischen Informations-Systemen lassen sich mit dieser Modellvorstellung realisieren.

Neben der absoluten geometrischen Lage von Objekten spielen in vielen Bereichen Geographischen Informations-Systeme relative Eigenschaften der Objekte untereinander eine wichtige Rolle. So sind im Rahmen von Katasterplänen Nachbarschaftbeziehungen richtig wiederzugeben und zu überprüfen. Eigenschaften wie die der Nachbarschaft, der Geschlossenheit, der Schnittpunktstreue, der Randeigenschaft sowie der Trennung von Innen und Außen sind topologischer Natur (Abschn. 2.3). Das **topologische Modellieren** innerhalb Geographischer Informations-Systeme erlaubt zum einen Konsistenzprüfungen der Daten sowie Abfragen über kürzeste Wege innerhalb der raumbezogenen Daten, zum anderen werden wesentliche Hilfsmittel für die Präsentation der Daten und Verwaltung von

Querverweisen unter ihnen zur Verfügung gestellt. Eine topologische Strukturierung der Daten hat den Vorteil, raumbezogene Objekte ohne Kenntnis ihrer Koordinaten in ihren gegenseitigen Beziehungen zu manipulieren. Diese koordinatenfreien Manipulationen sind wesentlich effizienter als ihre geometrischen Äquivalente.

In der dritten Ebene, dem **thematischen Modellieren** werden Zuweisungen unterschiedlicher Thematik zur Geometrie realisiert. Die thematische Modellierung ist stets von der Anwendung abhängig. Es finden sich jedoch grundlegende Konzepte und somit Gemeinsamkeiten in vielen, voneinander unterschiedlichen Problemstellungen. Diese allgemeinen thematischen Modelle können in generell zwei unterschiedliche Vorgehensweisen unterteilt werden. Die ältere Methode ist das Ebenen- oder Folienprinzip und das neuere das Objektklassenprinzip. Geometrische Algorithmen spielen bei der thematischen Modellierung nur am Rande eine Rolle.

Durch das immer stärkere Zusammenwachsen Geographischer Informations-Systeme mit numerischen Simulationsmethoden, gewinnt der Bereich der Kopplung beider Systeme an Bedeutung.

6.4. Gitternetze für numerische Verfahren

Ausgehend von einer guten Geometrieapproximation wird durch den Einsatz von numerischen Simulationsmodellen der Versuch unternommen, dynamische Prozesse der Natur wiederzugeben. Viele dieser Prozesse lassen sich durch zeitabhängige partielle Differentialgleichungen beschreiben. Zur numerischen Approximation solcher Gleichungen wurden unterschiedliche Methoden entwickelt. Lösungsverfahren sind die Methode der Finiten Differenzen, Finiten Elemente und Finiten Volumen sowie verschiedene Charakteristiken-Verfahren. Nur die Charakteristiken-Verfahren benötigen keine Rechennetze, an deren Knoten die Werte der unbekanntenen Lösung bestimmt werden müssen. Die Generierung von Gitternetzen und deren Qualität sind entscheidend für die Zuverlässigkeit der Simulationsergebnisse der ersten drei Methoden.

Für eine Vielzahl von numerischen Verfahren in der Umweltsystemmodellierung stellen euklidische Komplexe (Abschn. 3.3) eine geeignete Modellvorstellung dar. Nicht nur Gitternetze im herkömmlichen Sinne lassen sich so realisieren. Vielmehr ist man in der Lage, durch den Einsatz euklidischer Komplexe Modellklassen unterschiedlicher Dimensionen zusammenzuführen. Beispielsweise kann ein Ästuar durch eine Verknüpfung eindimensionaler Zellen zur Beschreibung eines Flusses über zweidimensionale Netze zur Beschreibung von Wattgebieten bis hin zu dreidimensionalen Gitternetzen zur numerischen Simulation von dreidimensionalen Strömungsvorgängen modelliert werden (Kopplung Finiter Elemente unterschiedlicher Dimension, Abb. 6.4.1).

Bei der Netzgenerierung müssen die Geometriedaten der Datenbasis auf die Knoten und Elemente des Gitternetzes abgebildet werden. Diese enge Bindung zwischen Geometriemodell und Gitternetz für ein Berechnungsverfahren darf jedoch nicht dazu führen beide gleich zu setzen. Vielmehr ist eine klare Trennung zwischen ihnen notwendig. Das Geometriemodell (Basismodell) wird vielfach als unveränderlich angesehen, wohingegen das

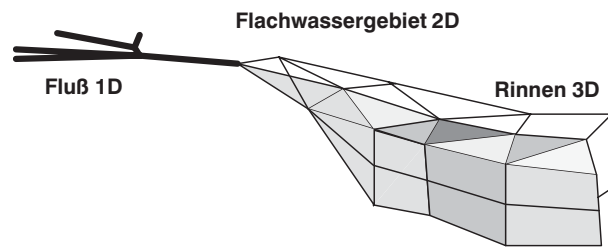


ABBILDUNG 6.4.1. Prinzipmodell eines Ästuars

Berechnungsnetz den Erfordernissen der zu beschreibenden Phänomene angepaßt werden muß. Dies bedeutet, daß das zu erzeugende Rechenetz in Bereichen erhöhten Interesses und erhöhter Dynamik mehr Elemente und Knoten enthalten muß, als in Regionen untergeordneter Dynamik. Bei der problemorientierten Anpassung (Adaption) von Gittern unterscheidet man die *a priori* und *a posteriori* Adaption. Bei der *a priori* Adaption wird eine Problemanpassung des Gitters vor der numerischen Simulation auf der Grundlage vorhandener Kenntnisse oder Abschätzungen über das Lösungsverhalten durchgeführt. Bei der *a posteriori* Adaption dagegen wird für die Anpassung des Gitters im Sinne einer Rückkopplung auf Berechnungsergebnisse zurückgegriffen.

Zeitabhängige Probleme erfordern unter Umständen eine dynamische *a posteriori* Adaption des Gitters, was bedeutet, daß das Gitter während der Simulation zyklisch den Gegebenheiten und Notwendigkeiten angepaßt wird.

Zur Steuerung solcher geometrischen Algorithmen der Netzverfeinerung und -reduktion müssen neben geometrisch-topologischen Konsistenzbedingungen weitere Regeln formuliert werden. Hierbei sollten folgende Schwerpunkte berücksichtigt werden:

1. Korrekte Wiedergabe der die physikalischen Phänomene determinierenden Eigenschaften (z.B. Topographie, Tiefengradienten).
2. Korrekte Wiedergabe der zu beschreibenden physikalischen Phänomene (z.B. Geschwindigkeitsgradienten, Walzen).
3. Korrektheit des numerischen Verfahrens (z.B. Minimierung eines Rechenfehlers, Elementwahl, Winkelkriterien).
4. Stabilität des numerischen Verfahrens (z.B. Courant-Bedingung).

Hierbei kennzeichnet die Position in der Aufzählung gleichzeitig die Wichtung des entsprechenden Kriteriums. Die numerische Stabilität ist ein nicht zu unterschätzendes Problem, darf jedoch erst an letzter Stelle bei einer Optimierung von Rechenetzen stehen. Wird davon ausgegangen, daß die Abbildung der Geometrie und Basisdaten auf das Rechenetz mittels Interpolationsverfahren (Kap. 5) korrekt ist, so spielt der zweite Punkt eine zentrale Rolle. Die korrekte Wiedergabe der zu beschreibenden physikalischen Phänomene ist in hohem Maße problemabhängig und schwer zu verallgemeinern.

Da bei der **a priori Adaption** eines Gitters keine Simulationsergebnisse zur Verfügung stehen, werden die Anforderungen an das Gitter aus den Erfahrungen des Anwenders oder aus Abschätzungen gewonnen. Anhand dieser Anforderungen lassen sich Größe und

Form der Gitterelemente optimieren. Ein allgemeiner Erfahrungsgrundsatz für Finite Element Methoden ist beispielsweise die Tatsache, daß ein Netz anzustreben ist, in dem die minimalen Winkel der Elemente maximiert werden. Eine solche Elementformoptimierung kann mit dem baryzentrischen Verfahren erreicht werden [142]. Die Modellvorstellung dieses Verfahrens ist die, daß alle Rechenknoten des Netzes mit Federn verbunden sind. Algorithmisch erfolgt dies über ein iteratives Verfahren. Ein Patchmittelknoten wird in den Schwerpunkt der Knotenkoordinaten der Patchrandknoten verschoben. Da alle inneren Knoten Patchmittelknoten sind, wird dieses Vorgehen solange durchgeführt, bis keine wesentlichen Ortsänderungen der Knotenlagen auftreten. Hierbei muß darauf hingewiesen werden, daß die zugehörigen physikalischen Zustandsgrößen aus einer Referenzgeometrie interpoliert und die korrekte Wiedergabe der die physikalischen Phänomene determinierenden Eigenschaften garantiert werden müssen. Unter Umständen müssen nach einer solchen Optimierung wieder neue Knotenpunkte eingefügt werden. In der Abbildung 6.4.2 ist diese Vorgehensweise, ausgehend von einer Polygonvermaschung der Randkurve, für die Lagune von Venedig dargestellt. Es ist zu erkennen, daß eine solche einfache Vorgehensweise schon dazu führt, daß in Bereichen zu erwartend hoher Dynamik automatisch kleinere Elemente erzeugt werden. Solche Verfeinerungen können aber auch durch explizite Bedingungen erzwungen werden. Wird beispielsweise ein hyperbolisches Seegangmodell im Küstenvorfeld angewendet, so ist eine Auflösung von einer Stützstelle je Wellenlänge im Küstennahbereich eine notwendige Bedingung [130].

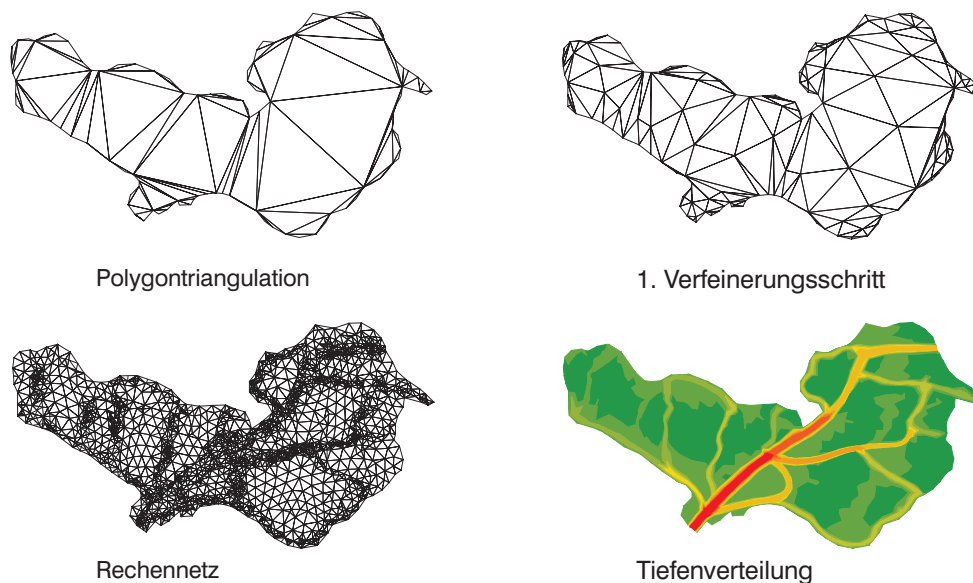


ABBILDUNG 6.4.2. Durch baryzentrische Verfeinerung erzeugtes Berechnungsnetz der Lagune von Venedig

Die **a posteriori Adaption** hat im wesentlichen die Gitteroptimierung bezüglich der zu beschreibenden physikalischen Prozesse als Ziel. Wie schon erwähnt, ist hier zu unterscheiden, ob es sich um ein stationäres Problem oder ein zeitabhängiges handelt. Werden

zunächst nur stationäre Probleme betrachtet, so erfolgt eine a posteriori Adaption im allgemeinen dann, wenn die Simulationsergebnisse des posteriori adaptierten Gitters nicht befriedigend sind. Die zu adaptierenden Bereiche können durch Fehlerabschätzungen unter Einbeziehung der betrachteten Differentialgleichungen identifiziert werden. Im allgemeinen ist eine solche Fehlerabschätzung nicht einfach zu erhalten. Deshalb werden als einfacher Ansatz die Variationen der Zustandsgrößen benachbarter Bereiche betrachtet. Neben den Variationen der physikalischen Größen selbst werden auch häufig abgeleitete Größen wie der Gradient einer skalaren oder die Richtung einer vektoriellen Größe herangezogen [142].

Die Auflösung von Netzen kann auf unterschiedliche Weise verändert werden. Hierbei ist es empfehlenswert, zwischen strukturierten und unstrukturierten Netzen zu unterscheiden. Strukturierte Gitter besitzen eine reguläre Topologie, die im allgemeinen implizit gegeben ist. Unter unstrukturierten Netzen werden im weiteren immer Zellzerlegungen verstanden. Für diese Verfeinerungen sind typische Beispiele die baryzentrische und die Quadtree-Verfeinerung.

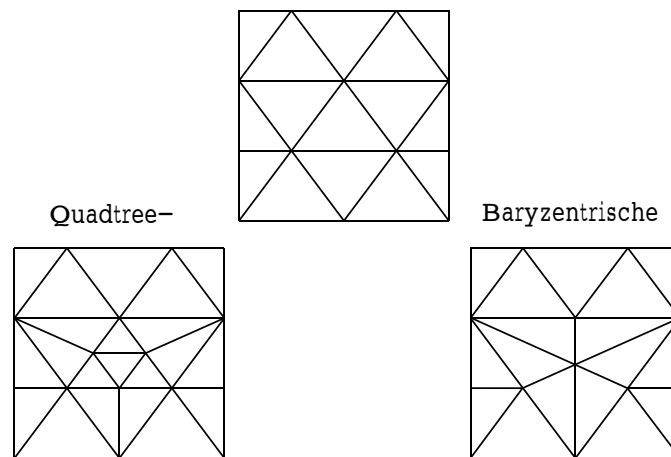


ABBILDUNG 6.4.3. Verfeinerungen unstrukturierter Gitter

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll auch auf die Problematik der Netzreduktion hingewiesen werden. Mit der ständigen Weiterentwicklung der Meßverfahren wird die Datenmenge, die zur Generierung eines Basismodells herangezogen wird, zunehmend größer. Für die Belange einer reinen Visualisierung müssen solche Basisdaten reduziert werden. Die Reduzierung der Datendichte geht einher mit einer Vereinfachung der Geometrie. Werden Topographien betrachtet, so bedeutet dies, unter Einbeziehung eines erlaubten Fehlers Flächen zu identifizieren und im Rahmen eines unstrukturierten Gitters zu beschreiben.

6.5. Spezifikation von Randbedingungen

In der Einleitung wurde festgestellt, daß zur numerischen Modellierung der Dynamik des Wasserkörpers im Küstenbereich neben der Randbedingung Gewässerboden häufig eine Einbettung in Raum und Zeit in ein globales Modell notwendig ist. So einfach sich dies aus

Modellsicht anhört, so schwierig ist häufig die Umsetzung. Große Schwierigkeiten ergeben sich aus der Unkenntnis der korrekten Randbedingungen in Zeit und Raum. Werden diese aus einem übergeordneten numerischen Modelle generiert, so ist dieses häufig angepaßt auf großräumige Prozesse und vernachlässigt im allgemeinen die kleinräumige Dynamik. Hindcast-Daten, wie solche Modelldaten genannt werden, besitzen im allgemeinen den Vorteil, daß sie in gewisser Weise schon flächig und über eine gewisse Zeit kontinuierliche Daten zur Steuerung bereitstellen. Die Erzeugung eines Ausgangszustandes ist in Abschnitt 5.6.1 unter Verwendung der Shepard-Interpolation dargestellt worden. In diesem Abschnitt soll auf die Spezifizierung von Randwerten eingegangen werden.

Randwerteadaption. Problemstellungen, speziell in der numerischen Strömungsmechanik, sind wesentlich durch ihre Randwerte gesteuert. Häufig besteht die Aufgabe, die Randwerte so zu modifizieren, daß gegebene (gemessene) Zustände im Gebiet durch das numerische Modell richtig wiedergegeben werden. Diese Klasse von Problemstellungen wird unter dem großen Begriff der inversen Modellierung zusammengefaßt und umfaßt ein eigenständiges Forschungsgebiet. Im Rahmen dieser Arbeit wird unter Verwendung der Shepard-Interpolation eine rein heuristische Herangehensweise vorgestellt, wie ausgehend von vorhandenen schon gutartigen Randbedingungen (z.B. aus einem übergeordneten Modell) eine Adaption durchgeführt werden kann, so daß gemessene Werte an Pegeln im Untersuchungsgebiet besser durch die Simulation wiedergegeben werden.

Am Beispiel von Simulationen der großräumigen Strömung im Bereich Rügen an der deutschen Ostseeküste wird diese Vorgehensweise vorgestellt. Voraussetzung für die Anwendbarkeit ist die Annahme eines örtlichen Zusammenhangs der Wasserstände im Untersuchungsgebiet, speziell bezüglich der Lokationen am offenen Rand des Modellgebietes. Für die Simulation der großräumigen Strömung in einem dreimonatigen Zeitraum im Jahr 1997 standen Modellergebnisse eines globalen Ostseemodells mit einer Auflösung von 5 km zur Verfügung, sowie gemessene Windzeitreihen. Es wurde zunächst ein Simulationslauf mit den aus dem globalen Modell generierten Randwerten durchgeführt. Hierbei ergaben sich zum Teil erhebliche Differenzen zwischen den gemessenen und simulierten Wasserständen an den Pegellokationen. Diese Differenzen (Fehler) werden an allen Pegeln im Untersuchungsgebiet bestimmt. Der zu erwartende Fehler, der an den Randknoten des Simulationsgebietes in den Randwerten enthalten gewesen sein mußte, wird über eine Shepard-Interpolation geschätzt und dort zur Korrektur der Randwerte verwendet. Im beschriebenen Beispiel hat sich gezeigt, daß besonders systematische Fehler durch die beschriebene Randwerteadaption minimiert werden konnten (Abb. 6.5.1).

Besonders vielversprechend ist dieser Ansatz bei der Korrektur von Wasserständen an den Randknoten, wenn für die Korrektur Pegel zur Verfügung stehen, die noch relativ unbeeinflusst von nichtlinearen Effekten, wie der Dynamik von Bodden und Flachwasserbereichen, sind. Die Korrektur der Zuflüsse bzw. der Geschwindigkeiten ist auf diese Weise nicht realisierbar. Durch die Verwendung unterschiedlicher (parameterabhängiger) Wichtungsfunktionen kann eine weitere Adaption durchgeführt werden. Auch hierbei können wiederum Parameterinterpolationen verwendet werden. Die Abhängigkeit numerischer

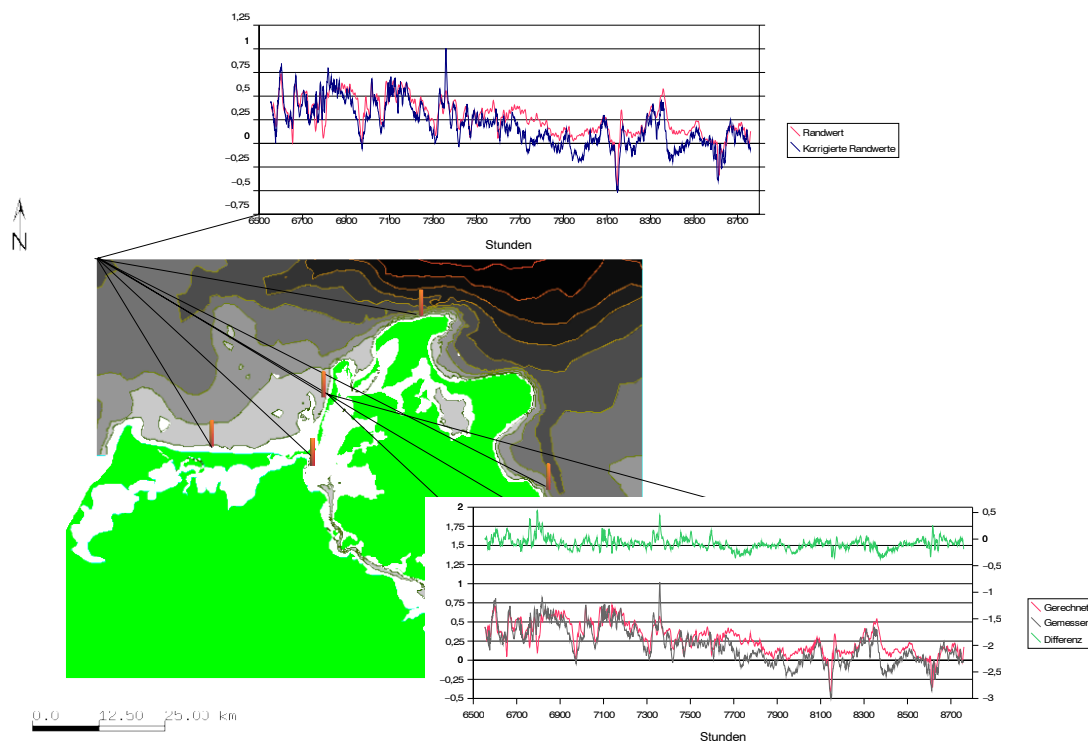


ABBILDUNG 6.5.1. Prinzipskizze inverses Problem

Modelle von einer Vielzahl unterschiedlicher Parameter macht die Anpassung solcher Modelle an konkrete Gegebenheiten sehr schwierig. Hilfreich wäre es eine Vorstellung über die Zusammenhänge in solchen Parameterräumen zu erhalten.

6.6. Erforschung von Parameterräumen

Numerische Simulationsmodelle sind ein wichtiges Werkzeug zur Beurteilung von Prozessen in Natur und Technik. Sie gestatten es,

- natürliche Prozesse experimentell zu erschließen,
- Werkstoffe, Bauwerke und Objekte zerstörungsfrei zu untersuchen,
- prognostische Aussagen zu Naturvorgängen zu geben.

Da die verwendeten Modellvorstellungen versuchen, einen bestimmten Teil der Prozesse im Modell abzubilden, im allgemeinen die zu beschreibenden Vorgänge in ihrer ganzen Komplexität nicht widerspiegeln können, werden gewisse Einflüsse durch Parametrisierungen beschrieben. Auf der anderen Seite werden Parametrisierungen auch herangezogen, wenn der Aufwand für eine exakte Lösung zu groß wird und man auf eine Approximation zurückgreifen muß. Solche Parameter werden auch als Modellparameter bezeichnet. Die das Verhalten eines Modells steuernden Eingangsgrößen - im folgenden Steuerparameter genannt - sowie der Gültigkeitsbereich der Modelle muß ebenfalls festgelegt werden. Dieses

stellt einen in der Modellfindungsphase besonders häufig anzutreffenden und zeitaufwendigen Vorgang dar.

Die Verifikationen bzw. Anpassung von numerischen Modellen an Spezifika des Einsatzbereiches erfolgen im allgemeinen durch Parameterstudien. Dies bedeutet, daß der Einfluß jedes Parameters auf die Lösung zu spezifizieren ist. Aus diesem Studium wird anschließend eine günstig erscheinende Kombination ausgewählt. Dieses Problem kann vom Ingenieur häufig nur durch Erfahrung gelöst werden. In der Regel wird durch die so gefundene Parameterkombination noch keine ausreichende Modellaussage erreicht, so daß weitere Untersuchungen der Einflüsse der einzelnen Parameter auf die Lösung durchgeführt werden müssen. Dieses mitunter ungezielte Vorgehen wird solange wiederholt, bis eine als ausreichend definierte Übereinstimmung zwischen bekanntem Sollwert und dem simulierten Ist-Wert ermittelt wurde. Das Ergebnis dieser Bemühungen ist häufig eine willkürlich gefundene Parameterkombination. Die Reproduzierbarkeit der Parameteridentifikation ist in dieser zufälligen Methode nicht gegeben. Ein solches Verfahren (nach der „Monte Carlo Methode“) wird mit zunehmender Anzahl an Parametern immer unübersichtlicher und läßt trotz erheblichen Aufwandes nur relativ beschränkte Aussagen zu.

Der Einfluß einzelner Parameter auf das Modell ist erst in zweiter Linie wesentlich. Vielmehr bestimmt die Wechselwirkung der Parameter untereinander und ihre Wirkung auf das Modell im wesentlichen die Lösung. An dieser Stelle ist der Anwender mit seiner Anschauungsfähigkeit häufig überfordert. Im allgemeinen kann man die gegenseitige Beeinflussung von mehr als drei Faktoren nicht wiedergeben.

Unter Verwendung elementarer geometrischer Verfahren kann durch ein gezieltes Vorgehen diese Wechselwirkung berücksichtigt und dadurch die Anzahl der Versuchsläufe erheblich minimiert werden.

Ein wesentliches Merkmal dieser Herangehensweise ist, daß alle unternommenen Versuchsrechnungen einen Anteil an der Lösung haben - es gibt also keine unnützen Rechnungen. Durch Interpolationsvorschriften kann von einer punktuell vorhandenen Information (Ergebnis einer Versuchsrechnung) auf eine räumliche Information (Lösungsgebiet) geschlossen werden.

Man stelle sich einen (physikalischen, ökologischen, sozialen bzw. technischen) Prozeß vor, der von gewissen Parametern abhängig ist und als Antwort zunächst eine skalare Größe liefert.

1-dimensionaler Fall: Im folgenden wird ein reellwertiger Prozeß $f(x)$ betrachtet. Gesucht werden alle Parameter, die $f(x) = 2$ besitzen. Zunächst muß ein betrachteter Bereich festgelegt werden. Im 1-dimensionalen Fall reichen zwei Extrempunkte aus. Für diese Extrempunkte wird die Antwort des Prozesses bestimmt und danach die Triangulierung mit der Ebene $f(x) = 2$ geschnitten. Existiert kein Schnittpunkt, so werden weitere Punkte im Untersuchungsbereich eingefügt bis Schnittpunkte entstehen. Die entstehenden Schnittpunkte sind nun die neuen Punkte der Zellzerlegung. Für den Parameter wird der zugehörige Funktionswert bestimmt. Im allgemeinen stimmen der so interpolierte und der exakte Wert der Funktion $f(x)$ nicht überein. Der so bestimmte interpolierte Funktionsverlauf wird wieder mit der Hyperebene $f(x) = 2$ geschnitten. Dieser Vorgang wird so

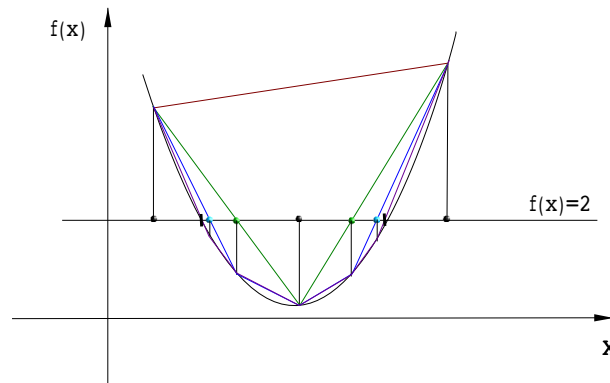


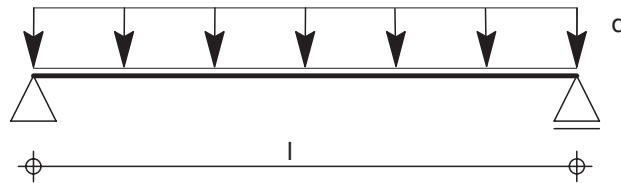
ABBILDUNG 6.6.1. Parameteridentifikation im eindimensionalen Raum

lange wiederholt bis die durch die Schnittoperation bestimmten Werte mit dem korrekten Wert $f(x) = 2$ übereinstimmen (Abb. 6.6.1).

Die soeben vorgestellte Methode läuft auf ein binäres Teilen hinaus.

2-dimensionaler Fall: $f(x_1, x_2)$ ist ein von zwei Parametern abhängiger Prozess. Zur Beschreibung eines umhüllenden Rechtecks werden 4 Extrempunkte benötigt.

An einem sehr einfachen Beispiele sei diese Vorgehensweise erläutert. Im folgenden wird das physikalische System, Balken auf zwei Stützen (Abb. 6.6.2), betrachtet. Werden die beiden Parameter, Balkenlänge l und Linienlast q als unabhängige Parameter betrachtet und das Moment in der Mitte des Balken als Antwort des Prozesses aufgefaßt, so kann man der folgenden Frage nachgehen: Welche Parameterkombinationen (l, q) ein Moment



Randbedingungen:

Einfeldträger mit den Eingangsparametern:

Systemlänge l ($l = 1.0$ bis 10.0 m)

Streckenlast q ($q = 1.0$ bis 10.0 kN/m)

ABBILDUNG 6.6.2. Balken auf zwei Stützen

von 5 kNm in Feldmitte erzeugen? Obwohl die analytische Lösung für dieses Problem bekannt ist wird in diesem Gedankenexperiment angenommen, es gäbe nur ein Simulationsprogramm, welches zu jeder Parameterkombination das Moment berechnet. Zunächst werden 2^n Punkte (Parameterkombinationen) festgelegt, die den Untersuchungsbereich in Form eines umschreibenden Kubus repräsentieren. Die Ergebniswerte der Simulationsrechnung für die Punkte des Kubus werden ermittelt. Durch Triangulation dieser Punkte und lineare Interpolation der Simulationsergebnisse erhält man eine erste Approximation des

Lösungsraumes. Die Lösung des obigen Beispiels stellt eine Isolinie $f(l, q) = 5kNm$ im Parameterraum $l \times q$ dar. Um diese Isolinie zu bestimmen, wird ein geometrischer Schnitt des sich ergebenden Simplizialkomplexes im Raum $l \times q \times f(l, q)$ mit dem Hyperraum durch $f(l, q) = 5kNm$ vorgenommen (1. Schritt in Abb. 6.6.3).

Als Ergebnis dieser Operation erhält man sämtliche Parameterkombinationen, die in erster Näherung das gesuchte Moment liefern. Im folgenden gilt es, diese Näherung systematisch zu verbessern.

Hierzu wird das Ergebnis der Simulation an ausgewählten Punkten der Isolinie überprüft. Kandidaten solcher Parameterkombinationen sind die Schnittpunkte der Isolinie mit den Kanten der Triangulation. Die Punkte und deren zugehörige Simulationsergebnisse werden zu der Triangulation aus dem vorigen Schritt hinzugenommen und ermöglichen, durch erneute Interpolation die Approximation der Lösung zu verbessern. Diese Verfeinerung kann solange durchgeführt werden, bis eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen gesuchter Lösung und Ergebnis der Simulation gegeben ist (Abb. 6.6.3).

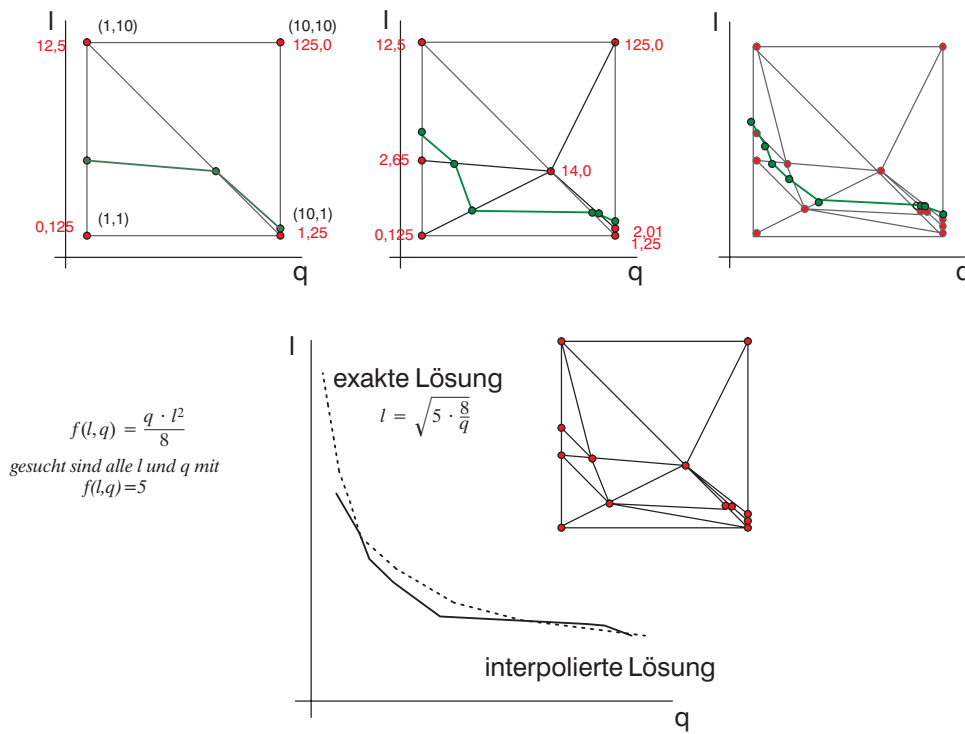


ABBILDUNG 6.6.3. Berechnung des Niveaus $f(l,q)=5$

n-dimensionaler Fall: Die Vorgehensweise bei höher-dimensionalen Problemen ist analog und stellt eine Simplizialzerlegung des Parameterraumes dar. Hierbei ist zu beachten, daß für den umschließenden Kubus schon 2^n Werte (Antworten des Systems) berechnet werden müssen.

Das soeben beschriebene *Black-Box* Verfahren läßt sich auf beliebige numerische und physikalische Modelluntersuchungen anwenden. Die Simplizial- bzw. Zellzerlegung des Parameterraumes ermöglicht eine zielgerichtete Suche nach geeigneten Parameterkombinationen. Hierbei bedeutet zielgerichtet zum einen, daß keine der durchgeführten Parameterauswertungen (Simulationen) verloren gehen (nicht mit einbezogen werden) und zum anderen werden Parameterauswertungen nur noch in der Nähe der zu erwartenden geeigneten Parameterkombination durchgeführt. Wie in der Abbildung 6.6.3 erkennbar ist, schmiegt sich die interpolierte Kurve der gültigen Parameterkombinationen immer mehr an die, in diesem Fall bekannte, Lösung an.

Eine andere interessante Anwendung der vorgestellten Vorgehensweise ist die Ermittlung von Verschneidungslinien von Flächen. Die Bestimmung solcher Linien ist einfach, wenn beide Flächen durch ebene Dreieckselemente approximiert werden. Wesentlich schwieriger ist diese Aufgabe, wenn zwei funktionale Flächen, dargestellt durch $z = f_i(x, y)$, $i = 1, 2$, gegeben sind. Die Problemstellung hierfür lautet dann, alle Paare (x, y) zu finden, so daß $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ gilt. Die Bestimmung von Verschneidungslinien, z.B. zwischen einer Geländeoberfläche und der Oberfläche eines zu planenden Bauwerkes, sowie damit verbundene Volumen- bzw. Massenberechnungen ermöglichen die Identifikation und Quantifizierung von Aufschüttungs- und Abtragungsgebieten.

Besonders hilfreich sind die vorgestellten Methoden dann, wenn Isolinien auf der Basis von netzfreien Interpolationen bestimmt werden sollen. Hierbei ist es nicht mehr notwendig, daß gesamte Untersuchungsgebiet mit äquidistanten Stützstellen zu überdecken, auf dessen Basis wieder ein Netz generiert wird. Vielmehr werden nur noch an Stellen in der Nähe der zu bestimmenden Isolinie Interpolationen durchgeführt.

Mit der Zunahme der Bedeutung numerischer Simulationsmodelle bei der Planung, Steuerung und Überwachung natürlicher Prozesse wächst die Notwendigkeit parametrische Modellansätze möglichst automatisch an die Gegebenheiten des Untersuchungsgebietes anzupassen. Die Einfachheit des Algorithmus läßt das Einfließen in andere Bereiche des Bauingenieurwesens erwarten.

6.7. Technische Visualisierung

Sowohl moderne Meßverfahren als auch mathematisch-numerische Simulationsverfahren im Bereich der Umweltsystemmodellierung benötigen und erzeugen eine erhebliche Menge von Daten. Ist es bei kleinen Datenmengen noch möglich die Zuverlässigkeit anhand der „abstrakten Zahlen“ zu beurteilen, so ist dies bei der Behandlung komplexer Probleme und deren unüberschaubar großen Menge an Zahlenmaterial unmöglich. Insbesondere bei der Interpretation und Analyse von Simulationsergebnissen ist in vielen Fällen eine leistungsfähige Visualisierung notwendig (Abb. 6.7.1).

Die Technische Visualisierung beschäftigt sich mit der Abbildung technischer Objekte unter Zuhilfenahme von Computersystemen [139]. Im Rahmen des Bauingenieurwesens zählen zu solchen technischen Objekten vor allem Gebäude, Brücken, Straßen und Kanalnetze. Darzustellende natürliche Objekte sind ganze Geländeoberflächen, Flüsse und

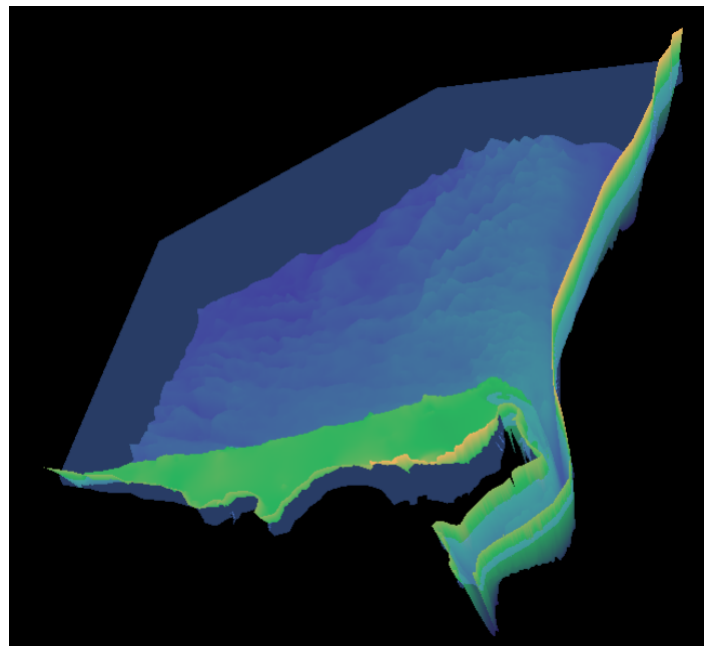


ABBILDUNG 6.7.1. Darstellung der Bathymetrie und der Wasserspiegellage einer Simulation

Seen. Der Unterschied zur rein graphischen Visualisierung liegt in dem Wunsch und den Möglichkeiten auch im allgemeinen nichtsichtbare Zustandsgrößen sichtbar zu machen. Die Technische Visualisierung hat somit zwei Teilaufgaben zu genügen: die Beschreibung der technischen Objekte und deren Darstellung sowie die Speicherung und Darstellung der Variation zugehöriger physikalischer Zustandsgrößen. Besonders bei der Darstellung physikalischer Zustände entstehen enge Bindungen zwischen der geometrischen Formbeschreibung, den topologischen Beziehungen der Objekte untereinander und der Beschreibung des physikalischen Verhaltens. Besonders einfach ist die graphische Darstellung des zeitlichen Verlaufes einer skalaren Zustandsgröße an einem festen Punkt. Die Darstellung stationärer Vektorfelder erfolgt im allgemeinen durch kleine Symbole (Pfeile) an den örtlichen Lokationen der Größen. Wesentlich komplizierter ist das Problem der Isolinien- und Isoflächendarstellung in der Ebene bzw. dem Raum. Diese basieren auf der Modellvorstellung eines stetigen Verlaufes der darzustellenden Größe und laufen häufig auf die Bestimmung von Schnitten mit Hyperebenen hinaus.

Häufig entziehen sich aber auch physikalische Zustände der direkten Beobachtung, da sie sich beispielsweise im Inneren von Strukturen befinden. Moderne Meßverfahren und numerische Simulationen ermöglichen jedoch die Modellierung dieser Zustände. Durch geeignete Editiermethoden ist man in der Lage, nicht nur die Zustandsgrößen auf der Oberfläche zu betrachten, sondern das Innere der Modelle zu erforschen [88]. Ein wichtiges Hilfsmittel ist hierbei die Zellzerlegung des Objektes. Die entstehenden Zellen können

dann interaktiv entfernt werden. Unter Einbeziehung von Interpolationsansätzen auf Zellen erhält man eine Vorstellung vom räumlichen Verlauf der Zustandsgrößen.

Präsentationen von Ergebnissen werden in Zukunft immer häufiger so gestaltet werden müssen, daß auch „Nichtexperten“ oder Entscheidungsträger einen Zugang finden und die wesentlichen Charakteristika und Aussagen erkennen. Animationen vermitteln einen Eindruck von der zeitlichen Entwicklung von Zustandsgrößen. Eine Differenzierung unterschiedlicher Oberflächenelemente durch einen naturähnlichen Charakter, sogenannten Texturen, und die Einbindung von Bild- und Filmmaterial ermöglichen ein besseres Verständnis der Daten auch ohne entsprechendes Spezialwissen. Durch Hinzunahme von Licht und Schatten erhalten viele Objekte einen natürlichen Eindruck. In Kombination mit Isolienen vermitteln Schattierungen einen plastischen Reliefeindruck, weshalb sie beispielsweise zur Darstellung der Geländeoberfläche in topographischen Karten verwendet werden. Hierzu muß an jedem Punkt der Oberfläche der Normalenvektor bestimmt werden. Aus dem Normalenvektor und der Richtung der Lichtquelle wird dann die zugehörige Lichtintensität bestimmt. Weitere Impulse erhält die Technische Visualisierung durch die Verfügbarkeit von Werkzeugen zur Erstellung virtueller Realitäten und durch preiswerte hochwertige Computergraphiken. Dies führt schon heute dazu, daß eine Abgrenzung zwischen der physikalischen Wirklichkeit und Simulationen schwierig wird.

Zusammenfassung und Ausblick

Durch den Einsatz moderner Computer- und Informationstechnologien haben sich viele Arbeitsprozesse, mit denen ein Bauingenieur in Berührung kommt, grundlegend verändert. Die Bauinformatik als ein Querschnittsfach im Bauingenieurwesen befaßt sich mit diesen Veränderungen. Wesentliche Grundlagen sind hierbei die Mathematik, die Informatik und das Bauingenieurwesen.

Die vorliegende Arbeit erschließt die *Algorithmische Geometrie* im Rahmen der Bauinformatik und ist an Studenten in der Vertiefung und Bauingenieure gerichtet, die ein besonderes Interesse an der Informatik und damit verbundenen Gebieten haben. Ziel der vorliegenden Arbeit war die Darlegung von Grundlagen der Algorithmischen Geometrie und soll Anregungen geben, die vorgestellten Techniken auch auf andere Fragestellungen anzuwenden.

Die Mehrzahl der Ingenieurobjekte sowohl der natürlichen als auch der durch den Menschen geschaffenen sind von geometrischer Natur. Sie besitzen Ausmaße und eine Lage im Raum. Besonders durch die Entwicklung der Informationstechnik stehen Applikationen und Werkzeuge zur Verfügung, die es ermöglichen, nicht nur diese Ingenieurobjekte geometrisch zu modellieren, sondern auch deren Verhalten und Interaktionen mit ihrer Umwelt zu simulieren. Schon in der Einleitung (Kap. 1) als auch in den weiteren Abschnitten dieser Arbeit hat sich gezeigt, daß geometrische Problemstellungen nicht beschränkt sind auf das geometrische Modellieren. Vielmehr finden sich Anwendungen in methodischen und technischen Bereichen sowie bei der Beschreibung von Prozessen.

Nach einer Einleitung in die algorithmische Geometrie wurden im Kapitel 2 die notwendigen theoretischen Grundlagen dargestellt. Im Zentrum standen mathematische Räume in unterschiedlichen Abstraktionsgraden. Sind viele Algorithmen in der klassischen Geometrie im euklidischen Raum formuliert, so ist bei der Übertragung auf nichtgeometrische Probleme ein möglichst geringer Satz an notwendigen Eigenschaften des zugrundeliegenden Raumes wünschenswert. Ausgehend von der allgemeinsten Definition eines Raumes als eine Menge, wurden dieser Menge weitere Eigenschaften zugeordnet. Es wurden topologische, metrische und lineare Räume sowie Maßräume als die grundlegenden Räume eingeführt. Zu den Definitionen der Räume wurden wichtige Eigenschaften, die einen geometrischen Bezug besitzen, eingeführt. So ist der Begriff der Umgebung in erster Linie ein topologischer und der der Kugel dem metrischen Raum zuzuordnen. Die Konvexität, die in vielen Bereichen des geometrischen Modellierens eine Rolle spielt, ist gebunden an einen linearen Raum über den reellen Zahlen. Der Zusammenhang unterschiedlicher Räume kann zum einen durch eine Spezialisierung (Abb. 2.2.1) und zum anderen durch

Induktion von Eigenschaften (Abb. 2.7.1) beschrieben werden. Werden unterschiedliche (Ingenieur-)Objekte in ihrer Interaktion betrachtet, so kommt man nicht umhin ihre Relationen untereinander zu beschreiben. Werden eine Menge von Objekten und Relationen auf diesen Objekten betrachtet, so wird häufig von Graphen gesprochen. Begriffe und Eigenschaften aus der Graphentheorie, die im Rahmen der algorithmischen Geometrie von Bedeutung sind, werden zum Abschluß im Abschnitt 2.10 eingeführt.

Der Zelltheorie wurde das Kapitel 3 gewidmet. Sie bildet für eine Vielzahl von Körpermodellierern die theoretische Grundlage. Durch die enge Verknüpfung von Körpermodellen und Berechnungsverfahren in modernen Entwurfswerkzeugen gewinnt eine kompatible Modellvorstellung für beide Bereiche eine große Bedeutung. Neben Verallgemeinerungen von topologischen Zellen und allgemeinen Komplexen lag der Schwerpunkt in diesem Kapitel in der Modellierung konvexer Zellen und euklidischer Zellkomplexe.

Ausgehend vom Beneath-Beyond-Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle einer Punktmenge im euklidischen Raum wurde sowohl ein Sichtbarkeitskriterium als auch eine Konstruktionsvorschrift entwickelt, die nur noch auf den Eigenschaften des linearen Raumes basiert (Abschn. 3.1.2). Zusätzliche Eigenschaften wie Metrik, vorzeichenbehaftetes Volumen oder Orientierung sind für den vorgestellten Algorithmus nicht notwendig. Konstruiert der klassische Beneath-Beyond-Algorithmus die konvexe Hülle aus Simplexen, so generiert der vorgestellte Algorithmus als Facetten wiederum beliebige konvexe Zellen. Die so erzeugte konvexe Hülle ist, im Gegensatz zu einer Hülle, die nur aus Simplexen besteht, immer eindeutig.

Die Erzeugung von Netzen spielt sowohl bei Interpolationen als auch Approximationen eine zentrale Rolle. Typische Netze bei der Finite Element Methode sind Dreiecks- und Vierecks-Netze in der Ebene. Die Generierung von Delaunay-Dreiecks-Netzen wird häufig über die Dualität von Triangulierung und konvexer Hülle realisiert. Basierend auf dieser Dualität und dem allgemeinen Beneath-Beyond-Algorithmus (Abschn. 3.1.2) war es nun möglich, den Begriff der minimalen konvexen Zellzerlegung einzuführen (Abschn. 4.3.2) und einen Algorithmus zu deren Generierung anzugeben. Im Gegensatz zu einer Simplizialzerlegung, die nicht für alle Punktekonstellationen eindeutig ist, ist die minimale konvexe Zellzerlegung immer eindeutig.

Im Kapitel 4 bildeten die Voronoi-Zerlegungen einen weiteren Schwerpunkt. Voronoi-Zerlegungen stellen eine Strukturierung eines Gebietes auf der Grundlage einer gegebenen Punktmenge und einer Abstandsfunktion dar. Durch die Bestimmung von Einzugsbereichen ergeben sich *natürliche* Nachbarschaften und Umgebungen im Sinne einer Topologie (Abschn. 4.2.1), die zum einen bei der Verwaltung von Daten aber auch im Rahmen numerischer Modelle an Bedeutung gewinnen. Die in Abschnitt 4.2 dargestellten Verallgemeinerungen von Voronoi-Diagrammen sowohl in der Ordnung, in der verwendeten Metrik als auch durch die Einführung verschiedener Arten von Gewichten, eröffnen neue Einsatzbereiche. Insbesondere scheint der Bereich der Strukturerkennung durch den Einsatz von gewichteten Voronoi-Diagrammen profitieren zu können [160]. Der Einsatz von Voronoi-Diagrammen 2. Ordnung bei der natürlichen Nachbarschafts-Interpolation (Abschn. 5.6.4) stellt die Frage nach den Möglichkeiten des Einsatzes von Voronoi-Diagrammen höherer Ordnungen für neue Interpolations- und Approximationsmethoden.

Neben der Körper- und Netzmodellierung in CAD-Systemen spielt der Bereich der Interpolation und Approximation bei der Beurteilung von Ingenieurfragestellungen eine wichtige Rolle. Der Einsatz geometrischer Algorithmen bei der Lösung von Interpolationsaufgaben stand im Kapitel 5 im Vordergrund. Nach einer Einführung am Beispiel der Interpolation skalarer Funktionen im Abschnitt 5.1 wurde sowohl auf netzbasierte als auch auf netzfreie Interpolationsmethoden eingegangen. Die Finite Element Interpolation (Abschn. 5.4) diente in diesem Kapitel als Ausgangspunkt für verallgemeinerte Interpolationen auf Zellzerlegungen. Für Interpolationen auf allgemeinen Zellzerlegungen fehlt eine geschlossene Darstellung. Es wurden für unterschiedliche Zelltypen Interpolationen, wie die baryzentrische Interpolation, die Gordon-Coons-Methode, die Sibson-Interpolation oder die Grenzmethode auf Voronoi-Zerlegungen vorgestellt. Werden ausschließlich konvexe Zellen und euklidische Komplexe bis zur Ordnung 2 betrachtet, so ist es im Rahmen dieser Arbeit gelungen eine geschlossene Darstellung zu formulieren. Durch die Einschränkung der natürlichen Element Interpolation (Abschn. 5.6.4) auf konvexe Polygone in der Ebene ist eine Klasse von Ansatzfunktionen entstanden, die eine Finite Element Interpolation auf euklidischen Komplexen in der Ebene erlauben (Abschn. 5.6.4.4). Hierbei ordnen sich die lineare Interpolation auf Dreiecken wie auch die bilineare Interpolation auf Vierecken in diese allgemeine Interpolation ein. Diese neuen Ansatzfunktionen sind gekennzeichnet durch ihre Linearität auf dem Rand der konvexen Zelle (auf den Verbindungsstrecken benachbarter Ecken). Die Ausdehnung auf beliebig-dimensionale euklidische Vektorräume ist möglich und Gegenstand der aktuellen Forschung. Die besondere Stärke dieses Ansatzes ergibt sich aus der konsistenten Formulierung konvexer Zellen, euklidischer Zellkomplexe, der Definition einer minimalen konvexen Zellzerlegung und der Formulierung eines entsprechenden Algorithmus bis hin zur vorgestellten Familie Finiter konvexer Zell-Elemente. In Zukunft ist eine Erweiterung bis hin zu entsprechenden Approximationen auf euklidischen Komplexen wünschenswert und zu erwarten.

Netzfreie Interpolationsmethoden, die in Abschnitt 5.6 eingeführt wurden, gewinnen durch ihre hohe Flexibilität immer mehr an Bedeutung. Eine enge Bindung der vorgestellten Verfahren an die mathematischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Räume eröffnet hierbei neue Einsatzbereiche. Die Generierung von Anfangswerten (Abschn. 5.6.1) und die Randwerteadaption (Abschn. 6.5) unter Einsatz der Shepard-Interpolation sind hierfür Beispiele. Eine weitere einfache und universell einsetzbare Interpolationsmethode ist die natürliche Element Interpolation (Abschn. 5.6.4). Auf die Bedeutung bei der Formulierung einer ganzen Familie Finiter Elemente auf konvexen Zellen wurde bereits hingewiesen. Die natürliche Element Interpolation führt aber auch bei der Interpolation natürlicher Daten z.B. bei digitalen Geländemodellen zu ansprechenden Interpolationen.

In Erweiterung der netzfreien Shepard-Interpolation sind im Bereich der Geostatistik Interpolationsverfahren unter Einbeziehung der räumlichen Statistik der zu interpolierenden Größen entwickelt worden, die im Abschnitt 5.7 beschrieben wurden. Durch eine Ausdehnung der Anwendung geostatistischer Methoden auch in anderen Bereichen des Bauingenieurwesens erhält man nicht nur Interpolationen sondern auch Aussagen über die Güte dieser interpolierten Werte.

Werden nicht mehr skalare oder vektorielle Größen für die Interpolation herangezogen, sondern vollständige geometrische Objekte betrachtet, so spricht man vom Morphing (Abschn. 5.8). Ziel des Morphings ist die stetige Überführung eines Objektes in ein anderes. Das zukünftige Potential des Morphing liegt im wesentlichen in der konsequenten Erweiterung von Interpolationsalgorithmen auf beliebige Objekte. Der Einsatz im Bauingenieurwesen wird in Zukunft nicht auf die Visualisierung und Animation beschränkt sein, sondern ganz neue Bereiche erschließen.

Die dargestellten geometrischen Algorithmen bilden jedoch nicht nur die Grundlage für eine Vielzahl von Interpolationsalgorithmen, sondern finden ihre Anwendung in vielen weiteren Bereichen des Ingenieurwesens.

Das Kapitel 6 zeigt Anwendungen geometrischer Algorithmen in der Umweltsystemmodellierung und gibt Anregungen für die Erweiterung auf andere Bereiche des Bauingenieurwesens. Am Beispiel der bathymetrischen Modellierung werden im Abschnitt 6.1 nochmals die Unterschiede der verschiedenen Interpolationsverfahren aufgezeigt. Entstammen die zur Verfügung stehenden Daten aus Naturmessungen, so sind diese im allgemeinen zusätzlich durch den Zeitpunkt ihrer Messung gekennzeichnet. Topographische bzw. bathymetrische Interpolationen haben diesen zeitlichen Aspekt unter Umständen zu berücksichtigen (Abschn. 6.1.3). Für die entstehenden digitalen Geländemodelle als auch zur Modellierung geologischer Strukturen (Abschn. 6.2) haben sich Zellzerlegungen in Verbindung mit zugehörigen Interpolationsvorschriften als geeignet herausgestellt.

Digitale Geländemodelle bilden auch eine wesentliche Komponente in Geographischen Informations-Systemen. Mit der ständigen Weiterentwicklung Geographischer Informations-Systeme weg von reinen digitalen Karten wächst die Notwendigkeit einheitliche bzw. konsistente Modellvorstellungen für die Datenmodellierung zu entwickeln. Auch hier hat sich die Zelltheorie und die Theorie der Zellkomplexe als geeignete Modellvorstellung herausgestellt. So können Katasterpläne, Verkehrs- und Versorgungsnetze als auch Einzugsgebiete durch Zellkomplexe effizient auf Konsistenz überprüft, gespeichert und bearbeitet werden. Auch bei Geographischen Informations-Systemen werden zeitabhängige Problemstellungen in Zukunft weiter an Bedeutung gewinnen. Sind prognostische Aussagen gefordert, so wird eine enge Bindung zu numerischen Simulationsmodellen immer häufiger notwendig. Simulationsmodelle stellen immer eine Vereinfachung der realen Gegebenheiten dar und beinhalten häufig parametrisierte Ansätze. Die Bestimmung geeigneter Parameterkombinationen zu einer gegebenen Konstellation ist eine häufig auftretende Fragestellung und erfordert im allgemeinen viel Erfahrung des bearbeitenden Ingenieurs. Eine automatisierte Unterstützung, wie sie in Abschnitt 6.6 vorgestellt wurde, liefert im allgemeinen nicht nur eine passende Parameterkombination sondern eine ganze Schar von Parameterkombinationen, die das Problem lösen.

Nicht zuletzt sind die Bereiche Visualisierung, Animation und virtuelle Realität klassische Bereiche, in denen geometrische Modelle und Algorithmen zum Einsatz kommen.

Die in dieser Arbeit dargestellten Grundlagen und Anwendungsbereiche der Algorithmischen Geometrie verdeutlichen die Universalität der geometrischen Methoden und deren Verbindung zu anderen Bereichen des Bauingenieurwesens. Besonders die zunehmende

Leistungsfähigkeit von Computersystemen und deren weltumspannende Vernetzung wird zur Erschließung neuer Anwendungsbereiche der Algorithmischen Geometrie führen.

Abbildungsverzeichnis

1.2.1	Kugel mit zwei Lichtquellen	9
1.2.2	Digitales Bathymetriemodell der Gellenrinne	10
1.2.3	Dachkonstruktion	10
1.2.4	Steiner-Probleme	11
2.2.1	Raumhierarchie	15
2.3.1	Topologische und nichttopologische Abbildung	18
2.4.1	Verschiedene Metriken in \mathfrak{R}^2	22
2.4.2	Voronoi-Zerlegungen einer Punktmenge bezüglich unterschiedlicher Metriken	23
2.5.1	Konvexe und nichtkonvexe Mengen	30
2.5.2	Unbeschränkte konvexe Mengen	31
2.5.3	Geometrische Interpretation der Kombination zweier Punkte	31
2.7.1	Raumhierarchie mit Induktionspfeilen	34
2.10.1	Simulation einer Ampelkreuzung	39
2.10.2	Inzidenzgraph eines Simplizialkomplexes	39
2.10.3	Graphen	41
2.10.4	Planarer Graph mit seiner planaren Repräsentation	42
2.10.5	Planarer Graph mit seinem dualen Graph	43
3.1.1	Konvexe Zellen als Durchschnitt von Halbräumen	46
3.1.2	Duales Polyeder	47
3.1.3	Tetraeder mit seinen Subsimplexen	48
3.1.4	Orientierung von Simplexen	49
3.1.5	Induzierte Orientierung	50
3.1.6	Baryzentrische Koordinaten	51
3.1.7	Die konvexe Hülle als Durchschnitt endlich vieler Halbräume	53
3.1.8	Beneath-Beyond-Algorithmus in der Ebene	54
3.1.9	Sichtbarkeitskriterium über die Orientierung	55
3.1.10	Sichtbarkeitsstatus über Zellhalbraumbetrachtungen	55

3.1.11	Koordinatensystem zu einer Facette	57
3.1.12	Sonderfallbehandlung durch Rekursion	58
3.1.13	Beispiele konvexer Zellen	59
3.2.1	Die topologische Zelle als Bild eines konvexen Polyeders	61
3.2.2	Objekte, die keine topologischen Zellen sind	61
3.3.1	Kompositionen von konvexen Zellen, die keine euklidischen Komplexe sind	63
3.3.2	Simplizialkomplex mit zugehörigem Inzidenzgraphen	63
3.5.1	CAD-Modell eines Hauses	65
3.5.2	Körpermodellierer	66
4.2.1	Klassisches Voronoi-Diagramm	71
4.2.2	Voronoi-Diagramm der Ordnung 1 und 2	74
4.2.3	Voronoi-Diagramm des entferntesten Punktes	75
4.2.4	Voronoi-Zerlegung im 1-dimensionalen Fall	76
4.2.5	Bisektion für die L_1 -Metrik	77
4.2.6	Konvexe Abstandsfunktion in der Ebene	78
4.2.7	Kontrollvolumen eines Finites Volumen Verfahrens	80
4.3.1	Voronoi-Diagramm mit zugehöriger Delaunay-Triangulierung	81
4.3.2	Triangulierung a) erfüllt Umkreis-Kriterium, Triangulierung b) nicht, da ein anderer Punkt innerhalb des Kreises liegt	81
4.3.3	Projektionsabbildung auf einen Paraboloiden	83
4.3.4	Konstruktion des Voronoi-Kreises	84
4.3.5	Umkugelbedingung und Mehrdeutigkeit der Delaunay-Triangulierung	85
4.3.6	Minimale konvexe Zellzerlegung einer Menge bzgl. einer gegebenen Punktmenge	85
4.3.7	Minimale konvexe Zellzerlegungen im \mathfrak{R}^3	86
4.3.8	Dreidimensionale baryzentrische Zellzerlegung	86
4.3.9	Rekursive Konstruktion der baryzentrischen Zerlegung	87
5.1.1	Nitratkonzentration entlang eines Flußlaufes	91
5.1.2	Stückweise konstante Interpolation	91
5.1.3	Lineare Interpolation	92
5.1.4	Polynom-Interpolation	92
5.1.5	Bezier-Approximation	93
5.1.6	Dachfunktionen und eine stückweise lineare Funktion	94
5.1.7	Newton-Polynome	96
5.3.1	Bereichsweise konstante Interpolation	99

5.4.1	Interpolation auf Dreiecken	101
5.4.2	Lineare Ansatzfunktionen für ein 1D-Simplex	104
5.4.3	Quadratische Ansatzfunktionen für ein 1D-Simplex	105
5.4.4	Unterschiedliche Ansätze für Tetraeder	106
5.5.1	Gestuftes Landschaftsmodell	108
5.5.2	Baryzentrische Zerlegung	109
5.5.3	Interpolation auf einer Viereckzelle mit denselben Knotenwerten aber unter unterschiedlichen Simplexzerlegungen	109
5.5.4	Funktionale Fläche über dem Einheitsviereck	110
5.5.5	Lineare und kubische Bindefunktionen	111
5.5.6	Interpolation von Randfunktionen	112
5.5.7	Korrekturglied der Gordon-Coons-Fläche	113
5.5.8	Teilflächen der Sibson-Interpolation	114
5.5.9	Sibson-Interpolation auf einem Quadrat	114
5.5.10	Sibson-Interpolation	115
5.6.1	Shepard-Interpolation ($\mu = 2$)	116
5.6.2	Shepard-Interpolation mit verschieden μ Werten	117
5.6.3	Glättende Shepard-Approximation	120
5.6.4	Interpolierte Wasserstände aus den Randwerten	121
5.6.5	Lineare Wichtungsfunktion für den 1d-Fall	124
5.6.6	Natürliche Nachbarschaftskoordinaten im 1-dimensionalen Fall	126
5.6.7	Bilineare Interpolation auf einem regulären Netz	128
5.6.8	Lineare Eigenschaft der NEM-Interpolation	130
5.6.9	Natürliche Element Interpolation eines Punktes	131
5.6.10	Interpolation auf einer konvexen Zelle	131
5.6.11	Finite Zellen Interpolation über einer konvexen Zellzerlegung	132
5.7.1	Typische Variogramme	137
5.7.2	Kriging-Interpolation zweier Punkte	141
5.8.1	Morphing von drei geometrischen Objekten	142
5.8.2	Linearität der Morphing-Funktion	144
6.0.1	Strömungszustände an der Südspitze von Sylt	149
6.1.1	Vergleich der Interpolationen	151
6.1.2	Lage der Meßpunkte der Sedimentaufnahme	153
6.1.3	Experimentelles und theoretisches Variogramm	153
6.1.4	Ergebnis des Kriging Verfahrens	154

6.1.5	Vermessungsbereiche im Orts-Zeit-Raum	155
6.1.6	Interpolation im Orts-Zeit-Raum	155
6.1.7	Identifikation von überfluteten Bereichen	156
6.2.1	Geländeoberfläche und Bohrkerne	157
6.2.2	Aus den Bohrkerne interpolierte Bodenschichten	158
6.2.3	2-dimensionale Voronoi-Zerlegung	159
6.2.4	3-dimensionale Voronoi-Zerlegung	160
6.3.1	Grafische Nutzeroberfläche der Informationsbasis in MorWin	161
6.4.1	Prinzipmodell eines Ästuars	165
6.4.2	Durch baryzentrische Verfeinerung erzeugtes Berechnungsnetz der Lagune von Venedig	166
6.4.3	Verfeinerungen unstrukturierter Gitter	167
6.5.1	Prinzipskizze inverses Problem	169
6.6.1	Parameteridentifikation im eindimensionalen Raum	171
6.6.2	Balken auf zwei Stützen	171
6.6.3	Berechnung des Niveaus $f(l,q)=5$	172
6.7.1	Darstellung der Bathymetrie und der Wasserspiegellage einer Simulation	174

Index

- Adaption, 165
 - a posteriori, 165
 - a priori, 165
- Affine
 - Unabhängigkeit, 32
- Algebra, 35
 - σ -, 35
- Anisotropie, 138
- Approximation, 89
- Basis
 - einer Topologie, 18
 - eines linearen Raumes, 29
- Baum, 41
- BRep, 65
- CSG, 65
- Delaunay-Simplex, 82
- Dimension, 29
- Distanzfunktion, 20
- Dreiecke
 - Delaunay, 81
- Ecken, 47
- Eckpunkt, 30
- Element, 15
 - Dreieck, 105
 - Finites, 102
 - Rechteck, 107
- Extrapolation, 89
- Facette, 48, 53, 55, 57, 61
- Facetten, 47
- Finites Element, 102
- Folge, 14
- Fundamentalfolge, 24
- Funktion
 - Kernel, 123
- Gebiet
 - zulässiges, 101
- GIS, 160
- Graph, 40
 - antisymmetrischer, 40
 - dualer, 43
 - geometrischer, 42
 - planarer, 42
 - ungerichteter, 40
 - vollständiger, 40
- Grenzwert, 24
- Hülle
 - abgeschlossene, 17
 - affine, 32
 - konvexe, 31, 52
 - lineare, 32
- Halbraum, 29
- Homöomorphismus, 17
- Homotopie, 17
- Hyperebene, 29
- Informationfs-Systeme
 - Land-, 161
- Informations-Systeme
 - Geographische, 160
 - Raum-, 161
 - Umwelt-, 161
- Inhalt, 35
- Inkugel, 21
- Interpolation, 89
 - Hermite, 97
 - kombinatorische, 90
 - Lagrangesche, 95
 - mit Monomen, 95
 - natürliche Element, 125
 - Newton, 96
 - rationale, 97
 - Sibson, 113
- Intrinsische Hypothese, 135
- Isotropie, 138

- Körper, 26
- Kern
 - offener, 17
- Komplex, 62
 - abstrakter, 65
 - euklidischer, 62
 - Simplizialkomplex, 63
 - topologischer, 64
- konvex, 30
 - es Raumstück, 30
- Koordinaten, 29
 - baryzentrische, 51, 52
- Kriging, 133
 - Block-, 141
 - mit bekanntem Mittel, 134
 - Ordinary, 138
 - Punkt-, 139
- Kugel, 21
 - In-, 21
 - Um-, 21
- lineare Unabhängigkeit, 28
- Linearkombination, 28
- LIS, 161
- Mächtigkeit, 14
- Maß, 36
- Messbarkeit, 37
- Menge, 13
 - abgeschlossene, 16
 - beschränkte, 22
 - geordnete, 14
 - kompakte, 24
 - konvexe, 30
 - beschränkte, 30
 - meßbare, 37
 - nicht zusammenhängende, 19
 - offene, 16
 - separierte, 19
 - zusammenhängende, 19
- Metrik, 20
 - euklidische, 21
 - Halb-, 20
 - Manhattan-, 21
 - Maximum-, 21
 - Taxi-, 21
- Modell, 147
- Modellbildung, 148
- Morphing, 142
 - Funktion, 143
- Raum, 142
- Nachbarschaft, 70
 - Delaunay, 72
 - Voronoi, 72
- Natürliche Element Methode, 126
- natürliche Nachbarschaftskordinaten, 124
- NEM, 126
- Norm, 32
- offener Kern, 17
- Ordnung, 14
- Orthogonalität, 33
- Polyeder
 - konvexes, 30, 45
 - Dimension, 46
- Polyederformel
 - Eulersche, 43
- Potenz-Diagramme, 79
- Punkt, 15
 - äußerer, 17
 - Berührungspunkt, 17
 - innerer, 17
 - Randpunkt, 17
- Rand
 - regulärer, 101
- Rasterdaten, 162
- Raum, 15
 - euklidischer Vektorraum, 34
 - Hausdorffscher, 19
 - linearer, 27
 - metrischer, 20
 - vollständiger, 25
 - mit Skalarprodukt, 33
 - Morphing, 142
 - normierter, 32
 - topologischer, 16
 - separierter, 19
 - zusammenhängender, 18
 - unitärer, 33
- RIS, 161
- Seite, 47
- Semivariogramm, 136
- Simplex, 48
- Smooth Particle Hydrodynamic Method, 123
- SPH, 123
- Stationarität 2. Ordnung, 134
- Stetigkeit, 17

- System, 147
 - dynamisches, 147
 - statisches, 147
- Topologie, 16
 - Basis, 18
 - diskrete, 16
 - indiskrete, 16
 - metrische, 25
 - Relativtopologie, 19
 - Vergleichbarkeit, 16
- topologische Invarianten, 18
- Trennungssaxiom, 19
 - Hausdorffsches, 19
- Triangulation, 101
 - Delaunay, 80
 - eingeschränkte, 101
 - uneingeschränkten, 101
- Triangulierung, 81
- Überdeckung, 69
- UIS, 161
- Umgebung, 17
 - ε -, 25
- Umkreisbedingung, 82
- Umkugel, 21
- Unabhängigkeit
 - affine, 32
- Unterraum
 - linearer, 27, 28
- Variogramm, 136
 - Exponentielles, 138
 - Gauß'sches, 138
 - Sphärisches, 138
- Vektordaten, 162
- Verkehr
 - sknoten, 38
- Verkehrsströme, 38
- Voronoi, 22
 - Diagramm, 23, 71
 - abstraktes, 79
 - höherer Ordnung, 73
 - Grenze, 23
 - Kante, 80
 - Knoten, 80
 - Nachbar, 72
 - Region, 22, 72
 - Zerlegung, 23, 72
- Zählmaß, 36
- Zelle, 45
 - konvexe, 45
 - topologische, 60
 - verallgemeinerte, 62
- Zellzerlegung, 65, 163
 - konvexe
 - minimale, 84
- Zerlegung, 69
 - Delaunay, 84
 - simpliciale, 82
 - Voronoi, 75
- zusammenhängend, 19
- Zusammenhang, 18
- Zyklus, 40
- Winkel, 33

Literaturverzeichnis

- [1] *dtv-Atlas zur Mathematik*. Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1982.
- [2] *Duden Rechnen und Mathematik*. Dudenverlag, 1994.
- [3] M.B. Abbott. *Hydroinformatics; Informationtechnology and the aquatic environment*. Avebury Technical, Aldershot, England, 1991.
- [4] R. Abler, J. Adams, and P. Gould. *Patial Organization. The Geographer's View of the World*. Prentice Hall, 1977.
- [5] S. Abramowski und H. Müller. *Geometrisches Modellieren*. Band 75 *Reihe Informatik*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim; Wien; Zürich, 1991.
- [6] M.G. Agoston. *Algebraic Topology*. Inc. New York, 1976.
- [7] H. Akima. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data point. *ACM TOMS*, 4:148–159, 1978.
- [8] P.S Alexandroff. *Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der rellen Funktionen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.
- [9] P. Alfeldt. Scattered data interpolation in three or moor variables. In T. Lych and L.L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods in computer Aided Geometric Design*, pages 1–34, San Diego, 1989. Academic Press.
- [10] H. Alt, B. Behrends, and J. Blömer. Approximate matching of polygonal shapes. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 13:251–266, 1995.
- [11] H. Alt, J. Blömer, M. Godau, and H. Wagener. Approximation of convex polygons. In *Proc. 17th Internat. Colloq. Automata Lang. Program.*, volume 443 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 703–716. Springer-Verlag, 1990.
- [12] H. Alt, M. Godau, and S. Whitesides. Universal 3-dimensional visibility representations for graphs. In F. J. Brandenburg, editor, *Graph Drawing (Proc. GD '95)*, volume 1027 of *Lecture Notes Comput. Sci.*, pages 8–19. Springer-Verlag, 1996.
- [13] G. Altrogge. *Netzplantechnik*. Oldenbourg, München, 3 edition, 1996.
- [14] M. Ameskamp und J. Lamp. Regelgestützte Modellierung kontinuierlicher dreidimensionaler Bodenkörper. 8. Symposium: Informatik für den Umweltschutz, 1994. Hamburg.
- [15] S. Aronoff. *Geographic Information Systems. A Managment Perspective*. WDL Publications, Ottawa, 1991.
- [16] G. Auman und Spitzmüller. *Computerorientierte Geometrie*. Band 89 *Reihe Informatik*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim; Wien; Zürich, 1993.
- [17] F. Aurenhammer. Voronoi Diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Comput. Surv.*, 23:345–405, 1991.
- [18] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23:469–483, 1996.
- [19] F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi Diagrams. Informatik Berichte 198 - 5, Fern-Universität Hagen, 1996.
- [20] F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In J. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook on Computational Geometry*. Elsevier, Amsterdam, 1996.

- [21] D. Avis and D. Brenner. How good are convex hull algorithms? Technical Report TR95.1, School of Computer Science, McGill University, Canada, Januar, 1995.
- [22] M.L. Balinski. An algorithmus for finding all vertices of convex polyhedral sets. *SIAM J. Appl. Math.*, pages 72–81, 1961.
- [23] C. B. Barber and D. P. Dobkin. The quickhull algorithm for convex hull. Technical report, Geometry Center, 1993.
- [24] A. Bárdossy. *Introduction to Geostatistics*. University of Stuttgart, Institute of Hydraulic Engineering and Water Resources Management, 1997.
- [25] R.E. Barnhill. Representation and approximation of surfaces. *Rice, J.D.*, Mathematical Software III:69–120, 1977.
- [26] R.E. Barnhill. Three- and four-dimensional surfaces. *Rocky Mountain journal of mathematics*, (14):77–102, 1984.
- [27] N. Bartelme. *Geoinformatik. Modelle, Strukturen, Funktionen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [28] N. Bartelme. *Geoinformatik, Modelle, Strukturen, Funktionen*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [29] P. Bastian and R. Helmig. Efficient fully-coupled solution techniques for two-phase flow in porous media - Parallel multigrid solution and large scale computations. *Advances in Water Resources*, 23:199–216, 1999.
- [30] M.W. Beall and M.S. Shephard. A general topology-based mesh data structure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1997.
- [31] H. Behnke, F. Bachmann und K. Fladt. *Grundzüge der Mathematik, Teil A: Grundlagen der Geometrie, Elementargeometrie*, volume Band II. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1967.
- [32] T. Beier and Neely S. Feature-based image metamorphosis. In *Computer Graphics*, pages 35–42, 1992.
- [33] H. Belkner. *Metrische Räume*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1972.
- [34] W. Benz. Smooth Particle Hydrodynamics: A Review. Preprint No 2884, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 1989.
- [35] R. Boreis. *Darstellende Geometrie*. Band 1. Akademie Verlag Berlin, 1964.
- [36] M.W. Bern und R.L. Graham. Das Problem des kürzesten Netzwerkes. *Moderne Mathematik*, pages 52 – 58, 1996. Spektrum Akademischer Verlag.
- [37] R. Bill und D. Fritsche. *Grundlagen der Geo-Informationssysteme*. Wichmann, Heidelberg, 1994.
- [38] J.D. Boissonnat and S. Nilans. Reconstruction of geological structures from heterogeneous and sparse data. In *Proc. 4th ACM Workshop Adv. Geogr. Inform. Syst.*, 1996.
- [39] V.G. Boltjanskij. *Anschauliche kombinatorische Topologie*. Vieweg, 1986.
- [40] Bonham-Carter and F. Greame. *Geographic Information Systems for Geoscientists, Modeling with GIS*. Elsevier Science Ltd., 1994.
- [41] O. Borkner Delcarlo. Eine Halbfacetten-Datenstruktur für die Modellierung von non-manifold-Körpern. Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 4/96, Technische Universität München, 1996.
- [42] P.H.L. Boyy and E. Stern. *Route Choice: Wayfinding in Transport Networks*, volume 9 of *Studies in Operational Regional Science*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 1990.
- [43] A. Boyer. Computing dirichlet tesslations. *The Computer Journal*, 20:162–166, 1981.
- [44] H. Brauner. *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie*. Springer Verlag, New York, Berlin, 1986.
- [45] R.P. Brent. Algorithmus for minimization without derivatives. Technical report, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [46] E. Brisson. Representing geometric structures in d dimensions. In *3th Symp. on Computational Geometry*, New York, 1997. ACM Press.
- [47] Brondsted. *An Introduction to Convex Polytopes*, volume 90. Springer, Berlin, 1983.
- [48] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1979.
- [49] A. Browyer. Computing dirichlet tesslations. *The Computer Journal*, 24(2), 1981.

- [50] E. Bruzzone and L. de Floriani. Two data structures for building tetrahedralizations. 266-283 5, Computer Graphics Society, Berlin, 1990.
- [51] Budach, Graw, Meinel, and Waack. *Algebraic and Topological Properties of Finite partially Ordered Sets*, volume 109 of *Teubner Texte*. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1988.
- [52] C.-A. Burdet. Generating all the Faces of a Polyhedron. *SIAM J. Appl. Math.*, pages 479–489, 1974.
- [53] P. Burrough. *Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [54] P.A. Burrough. Principles of geographical information systems for land resource assessment. *Mono-graphs on Soil and Resources Survey*, 1986.
- [55] J. Clarc. *Graphentheorie: Grundlagen und Anwendungen*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, 1994.
- [56] R. Damrath. Visualisierungsmodelle für Finite Elemente. In E. Ramm, E. Stein, and W. Wunderlich, editors, *Finite Elemente in der Baupraxis*, pages 395 – 404, Berlin, 1995. Ernst, Verlag für Architektur u. techn. Wiss.
- [57] J. Diaz. Objektorientierte Modellierung geotechnischer Systeme. Technical Report 2/98, Institut für Numerische Methoden und Informatik im Bauwesen, Technische Universität Darmstadt, 1998.
- [58] P.G.L. Dirichlet. Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. *Reine Angew. Mathematik*, 40:209–227, 1850.
- [59] M.Sc. Chongjiang Du. *Ein Finite-Punkt-Verfahren für stationäre zweidimensionale Strömungen mit freier Oberfläche*. Universität Fridericiana zu Karlsruhe, 1997. Dissertation.
- [60] S. Dyck und G. Peschke. *Grundlagen der Hydrologie*. Bauwesen, Berlin, 3. Auflage, 1995.
- [61] M.E. Dyer and L.G. Proll. An Algorithm for Determining all Extreme Points of a Convex Polytope. *Math. Programming*, 12:81–96, 1977.
- [62] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [63] H. Edelsbrunner and N. Shah. Triangulating topological spaces. Department of Computer Science, University of Illinois, 1994.
- [64] H. Edelsbrunner and T. S. Tan. An upper bound for conforming delauny triangulations. Department of Computer Science, University of Illinois, 1992.
- [65] G. Engeln-Müllges. *Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit C-Programmen*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.
- [66] G. Farin. Surfaces over Dirichlet Tesselations. *Computer Aided Geometric Design* 7, 1-4:281–292, 1990.
- [67] G. Farin. *Curves and Surfaces of Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, New York, 3 edition, 1993.
- [68] S. Felsner and K. Kriegel. Triangles in Euclidean Arrangements. Technical Report B 97-09, Freie Universität Berlin, 1997.
- [69] T.R. Fisher and R.Q. Wales. *Rational Splines and Multidimensional Geologic Modeling*. *Computer Graphics in Geology*. Springer Verlag, 1992.
- [70] R. Franke. Scattered Data Interpolation: Test of some Methods. *Mathematics of Computation*, 38:181–200, 1982.
- [71] H. Goering, H.-G. Roos, and L. Tobiska. *Finite-Element-Methode*. Band 68 *Deutsche Taschenbücher*. Thun, Frankfurt am Main, 1989.
- [72] G.H. Goloub and C.F. van Loan. Matrix computations. Technical report, Hopkins University, 1983.
- [73] W. Göpfert. *Raumbezogene Informationssysteme: Datenerfassung-Verarbeitung-Integration*. Wichmann, Karlsruhe, 1987.
- [74] W.J. Gordan and J.A. Wixom. Shepard’s Method of Metric Interpolation to Bivariate and Multivariate Interpolation. *Mathematics of Computation*, 32, 1978.
- [75] W. Göpfer. *Raumbezogene Informationssysteme: Datenerfassung - Verarbeitung - Integration*. Wichmann, Karlsruhe, 1987.

- [76] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. John Wiley & Sons, Chichester, 1967.
- [77] L. Guibas and J. Stolfi. Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and Computation of Voronoi Diagrams. *ACM Trans Graphics*, 4(2), 1985.
- [78] E.L. Gursoz and F.B. Prinz. *A Point Set Approach in Geometric Modelling. Advanced Geometric Modelling for Engineering Applications*. North-Holland, 1990.
- [79] R.L. Hardy. Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 76 8:1905–1915, 1971.
- [80] D. Helbig. *Verkehrsdynamik: Neue physikalische Modellierungskonzepte*. Springer-Verlag, 1997.
- [81] M. Heller. *Anwendung informationstechnischer Methoden zur computergestützten statischen Berechnung ebener Flächentragwerke*, volume 1. Institut für Bauinformatik, Universität Hannover, 1994.
- [82] S. Hiermaier. Numerische Simulation von Impaktvorgängen mit einer netzfreien Lagrange-Methode. Universität der Bundeswehr München, 1996.
- [83] K. Ho-Le. Finite Element Mesh Generation Methods. *Computer Aided Design*, 20(1), 1988.
- [84] J. Hoschek und D. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [85] J. Hoyte. The Cut&Glue Mesh Generation Algorithm. *Engineering with Computers*, (8):51–58, 1992.
- [86] R. Hüttermann und P. Milbradt. Entwicklung von Komponenten für den Einsatz bei bauingenieur-spezifischen Problemen. In *Forum Bauinformatik*. VDI-Verlag, 1996.
- [87] J.F. Hughes. Scheduled fourier volume morphing. *Computer Graphics*, pages 43–46, 1992.
- [88] W. Huhnt, A. Laabs, und R. Damrath. Visualisierung Physikalischer Zustände. DFG Forschungsbericht, 1994.
- [89] J. Estes J. Star. *GIS an Introduction*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.
- [90] H. Jordan und H.-J. Weder. *Hydrogeologie: Grundlagen und Methoden*. Enke, Stuttgart, 2. Auflage, 1995.
- [91] D. Jungnickel. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*. BI-Wissenschafts-Verl., 1994.
- [92] R. Kaiser, O. Kolditz, and W. Zielke. Automatic grid adaptation for subsurface fluid flow problems application for fractured-porous reservoirs. In *XII. Intern. Conf. on Computational Methods in Water Resources*, Crete, Greece, 1998.
- [93] J.R. Kent, W.E. Carlson, and R.E. Parent. Shape transformation for polyhedral objects. *Computer Graphics*, pages 47–54, 1992.
- [94] L.C. Kinsey. *Topology of Surfaces*. Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [95] V. Kirchner und J. Diaz. Diskretisierung dreidimensionaler Tragstrukturen als Teilproduktmodell. In *Forum Bauinformatik, VDI Fortschrittsberichte Reihe 20 Nr. 131*, S. 55-62, Darmstadt, 1994.
- [96] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. In *Science*, 1995.
- [97] V. Klee. On the complexity of d-dimensional voronoi diagrams. *Archives of Mathematics*, 34:75–80, 1980.
- [98] R. Klein. *Concret and Abstract Voronoi Diagrams*, volume 400 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1989.
- [99] R. Klein. *Algorithmische Geometrie*. Addison-Wesley-Longman, 1997.
- [100] R. Klein and A. Lingas. A Linear-Time Randomized Algorithm for the Bounded Voronoi Diagram of a Simple Polygon. *Informatik Berichte 150-12*, Fernuniversität Hagen, 1993.
- [101] R. Klein, K. Mehlhorn and S. Meiser. Randomized incremental construction of abstract Voronoi diagrams. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 3(3):157–184, 1993.
- [102] J.J. Koenderink. *Solid Shape*. MIT Press Cambridge, London, 1990.
- [103] O. Kolditz. Objekt-oriented methods for hydrosystem modeling. Hannover Workshop on Multifield Problems, Juli 1999. Hannover.
- [104] H. Kopp. *Graphische Datenverarbeitung*. Hanser Verlag, München, Wien, 1989.
- [105] M. van Kreveld, G. Neyer, S. Schirra, R. Rickenbach, F. Wagner, P. Widmayer, and A. Wolff. Geographic Information Systems. Report on the GIS part of CGAL task 4.1, 1997.
- [106] E. Kruschwitz. *Euler-Modellierung dreidimensionaler Körper*. Shaker Verlag, Achen, 1996.

- [107] F. Kuhnert. *Vorlesung über lineare Algebra*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976.
- [108] A. Laabs. Editiermethoden der physikalischen Visualisierung. In *Forum Bauinformatik*, pages 29–38. VDI Verlag, 1995.
- [109] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematical Computation*, 37:141–158, 1981.
- [110] R. Laurini and D. Thompson. Fundamentals of Spatial Information Systems. *The Apic Series*, 37, 1992.
- [111] R. Laurini and D. Thompson. *Fundamentals of Spatial Information Systems*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [112] C.L. Lawson. Properties of n-dimensional triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, (3):231–245, 1986.
- [113] S. Lee, K. Chwa, J. Hahn, and S. Shin. Image morphing using deformation techniques. *The Journal of Visualization*, 1995.
- [114] S. Lee, G. Wolberg, K. Chwa, and S. Shin. Image metamorphosis with scattered feature constraints. In *IEEE Transactions on Visualization*, 1996.
- [115] A. Leros, C.D. Garfinkle, and M. Levoy. Feature-based volume metamorphosis. In *Computer Graphics*, 1995.
- [116] L.D. Libersky. High strain lagrangian hydrodynamics. *Jornal of Computational Physics* 109, pages 67–75, 1993.
- [117] L.D. Libersky and A.G. Petschek. Smooth Particle Hydrodynamics with Strength of Materials. *Advances in the Free Lagrange Method, Lecture Notes in Physics*, page 395, 1990.
- [118] C. Lippert. Eine Punktbasierte Approximation eines stationären Transportproblems. Technical report, Bauinformatik Universität Hannover, 1999.
- [119] C. Lippert, P. Milbradt und F. Sellerhoff. Ein dimensionsunabhängiges topologisches Modell auf der Basis von Simplexen. In *IKM'97*, Weimar, 1997.
- [120] S. Lipschutz. *Allgemeine Topologie*. McGraw-Hill, 1977.
- [121] P. Litwinowicz and L. Williams. Animating images with drawings. *Computer Graphics*, 28:409–412, 1994.
- [122] R. Ludwig. "Dreiecksgeschichten". *C't*, 4/94, 1994.
- [123] H. Masuda, K. Shimada, M. Numao, and S. Kawabe. *A Mathematical Theorie and Applications of Non-Manifold Geometric Modelling*. North-Holland, 1990.
- [124] G. Matheron. *Les Variables Regionalisees et leur Estimation*. Masson, Paris, 1965.
- [125] T.H. Mattheiss and D.S. Rubin. A survey and comparison of methods for finding all vertices of convex polyhedral sets. *Math. Oper. Res.*, 2:167–185, 1980.
- [126] P. McMullen. The maximal number of faces of a convex polytope. *Mathematika*, 17:179–184, 1970.
- [127] P. McMullen and D. Walkup. A generalized lower-bound conjecture for simplicial polytopes. *Mathematika*, 18:246–273, 1971.
- [128] J. Menz. Anwendung der Geostatistik zur Gebirgs- und Lagerstätten-Geometrisierung. In *16. Mintrop-Seminar: Neue Wege in Exploration und Produktion*, Arnsberg-Neheim, 1996.
- [129] K.H. Meyer. *Algebraische Topologie*. Birkhäuser, 1989.
- [130] P. Milbradt. *Zur mathematischen Modellierung großräumiger Wellen- und Strömungsvorgänge*. Universität Hannover, 1995.
- [131] P. Milbradt. Technische Visualisierung. Institut für Bauinformatik, Universität Hannover, 1998. Vorlesungsskript.
- [132] P. Milbradt und M. König. Allgemeine komponenten-orientierte Finite-Element-Modellierung. In *Forum Bauinformatik*, 1996.
- [133] M.E. Mortenson. *Geometric Modeling*. John Wiley & Sons, 1985.
- [134] K. Mulmuley. *Computational Geometry*. Prentice Hall, 1994.
- [135] S. Nullans. *Reconstruction tridimensionnelle de structures géologiques à partir de données hétérogènes*. Thèse de doctorat en sciences, Université de Nice-Sophia Antipolis, France, 1998.

- [136] M. Obersdorfer. *Dreidimensionale Computergrafik in C*. IWT-Verlag, Vaterstetten, 1993.
- [137] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [138] T. Ottmann und Widmayer P. *Algorithmen und Datenstrukturen*. Band 70 *Reihe Informatik*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Zürich, Wien, 1993.
- [139] P.J. Pahl. *Technische Visualisierung*. Institut für Allgemeine Bauingenieurmethoden, Technische Universität Berlin, 1993. Skript.
- [140] P.J. Pahl und R. Damrath. *Mathematische Grundlagen der Ingenieurinformatik*. Springer Verlag, 2000.
- [141] J. Peschel und M. Mocosch. *Künstliche Intelligenz in den Geowissenschaften*. Verlag Sven von Loga, 1991.
- [142] A. Plüß. *Netzbearbeitung und Verfahrensverbesserung für Tidemodelle nach der Finiten Element Methode*, volume 35. Institut für Strömungsmechanik, Universität Hannover, 1994.
- [143] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer Verlag, New York, 1985.
- [144] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [145] W. Rinow. *Lehrbuch der Topologie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.
- [146] J. Roehrig. Datenstrukturen zur Körpermodellierung und Netzmodellierung. Mitteilung 99-2, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1999.
- [147] P. Ruland. *Numerische Simulation des Sedimenttransports unter Verwendung eines objektorientierten geographischen Informationssystems*, volume 87 of *Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft*. Academia Verlag, Sankt Augustin, Deutschland, 1993.
- [148] D. Ruprecht and H. Müller. Image warping with scattered data interpolation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 15:37–43, 1995.
- [149] R. Schaback. Creating Surfaces from Scattered Data using Radial Basis Functions. *Mathematical Methods in CAGD III*, pages 1–21, 1995.
- [150] F. Scheffer und P. Schachtschabel. *Lehrbuch der Bodenkunde*. Enke, Stuttgart, 12. Auflage, 1989.
- [151] G. Scheja und U. Storch. *Lehrbuch der Algebra*, volume Teil 1-3. B.G.Teubner, Stuttgart, 1981.
- [152] M Schlüter. *Einführung in geomathematische Verfahren und deren Programmierung*. Enke Verlag, Stuttgart, 1996.
- [153] G Schmidt und T. Ströhlein. *Relationen und Graphen*. Springer, Berlin, 1989.
- [154] W.J. Schroeder and M.S. Shepard. A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3-D Mesh Generation. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, (29):37–55, 1990.
- [155] A.E. Schroth. Topologie und Maßtheorie. Institut für Analysis, TU Braunschweig, 2000. Vorlesungsskript.
- [156] H. Schubert. *Mathematische Leitfäden*. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [157] A. Schwöppe. Entwicklung eines Modells für konvexe Zellen als Basis für Ingenieuranwendungen. Inst. f. Bauinformatik, Universität Hannover, 1997.
- [158] J. Sedlacek. *Keine Angst vor Mathematik*. Gondrom Verlag, Bildlach, 1986.
- [159] F. Sellerhoff. Objektorientiertes Modell für simpliziale Zerlegungen. Technical report, Inst. f. Bauinformatik, Universität Hannover, 1995.
- [160] F. Sellerhoff. Punktbasierte Informationsmodellierung. Seminarvortrag zu Ausgewählte Kapitel der Umweltströmungsmechanik und Informationsverarbeitung, Institut für ComputerAnwendungen im Bauingenieurwesen an der TU Braunschweig, 2000.
- [161] F. Sellerhoff and R. Damrath. Informationmodellierung in Hydrosience. Lecture held on ICHE in Cottbus, 1998.
- [162] F. Sellerhoff, P. Milbradt, and R. Lehfeldt. Modelvalidation in Webenvironment - Progress in distributed Modelling. In *Advances in Hydrosience and Engineering, Vol. III*, Cottbus, 1998.
- [163] M.I. Shamos. *Computational Geometry*. PhD thesis, Dept. Comput. Sci., Yale Univ., New Haven, 1978.

- [164] D. Shepard. A two dimensional Interpolation Function for Irregular Space Data. In *Proceedings 23rd.*, pages 517–524, 1968.
- [165] M.S. Shepard. *Automatic Generation of Finite Element Moells.* Wiley & Sons, 1993. Edited by Papadrakakis, M.
- [166] R. Sibson. A Vector Identity for the Dirichlet Tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 87, pages 151–155, 1980.
- [167] R. Sibson. A brief Description of the Natural Neighbour Interpolant. *Interpolating Multivariate data*, 1981.
- [168] D.B. Smythe. *A Two-Pass Mesh Warping Algorithm for Object Transformation and Image Interpolation.* Lucasfilm Ltd, 1990.
- [169] M.R. Spiegel. *Vector Analysis.* chaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- [170] J. Star and J. Estes. Geographical Information Systems. Technical report, University of California, Santa Barbara., 1990.
- [171] R. Stoecker and H. Zieschang. *Algebraische Topologie.* Teubner, Stuttgart, 1988.
- [172] H. Taosang, S. Wang, and A. Kaufmann. Wavelet. In *Proceedings of Visualization*, 1994.
- [173] D. Tomlin. *Geographic Information Systems and Cartographic Modelling.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1990.
- [174] V. Unruh and C. Anderson. Feature-based modeling for automatic mesh generation. *Engineering with Computers*, 8:1–12, 1992.
- [175] P. Van Oosterom, W. Vertegaal, M. van Hekken, and T. Vijlbrief. Integrated 3D Modelling within GIS. In *AGDM*, pages 1–16, Holland, 1994.
- [176] G.M. Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. premier Mémoire: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *J. Reine Angew. Math.*, 133:97–178, 1907.
- [177] G.M. Voronoi. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. deuxième Mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifs. *J. Reine Angew. Math.*, 134:198–287, 1908.
- [178] D.F. Watson. Computing the n-dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes. *The Computer Journal*, 24(167-172), 1981.
- [179] R. Webster. Quantitative Spatial Analysis of Soil in Field. *Adv. Soil Sci.*, 3:1–70, 1985.
- [180] K. Weiler. *Topological Structures for Geometric Modeling.* PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institut, New York, 1986.
- [181] G. Wolberg. *Digital Image Warping.* IEEE Computer Society Press, 1990.
- [182] T. Zienkiewicz. *The Finite Element Method.* Springer Verlag, 4 edition, 1992.