Präprozessor Janet

Approximationsverfahren

Methoden und Verfahren

smile consult GmbH
www.smileconsult.de

Version 1.0 (7.3.2005)

1 Einleitung

Die folgenden Kapitel des vorliegenden Dokumentes geben einen Einblick in die Methodik der im aktuellen Release des Präprozessor Janet (Versionsnummer 2.0) umgesetzten Approximationsmethoden. Es wird unterschieden zwischen

- Gitterbasierte Approximationsmethoden
- Gitterfreie Approximationsmethoden
- Sondermethoden

Die gitterbasierten Methoden benötigen für die Durchführung der Approximation eine Gebietszerlegung. Im Folgenden werden sowohl Verfahren vorgestellt, die auf Zellzerlegungen mit konvexen n-Ecken basieren als auch Methoden, die auf Dreicksvermaschungen formuliert sind.

Bei den gitterfreien Approximationsmethoden ist keine topologische Information für die Anwendung des Verfahrens notwendig. Als Datengrundlage sind Punktmengen ausreichend.

Unter Sondermethoden sind Approximationmethoden zusammengefaßt, die speziell für die Belange der Modellgittererstellung umgesetzt sind oder sich nicht eindeutig den oben genannten Kategorien zuordnen lassen.

2 Gitterbasierte Approximationsmethoden

2.1 Lineare Interpolation

Voraussetzungen: Dreickszerlegung

Parameter: keine

Berechnungsablauf: In der Dreickszerlegung wird zunächst das Dreieckselement gesucht (→ Suchverfahren für Dreieckszerlegungen), welches die Interpolationsstützstelle enthält. Liegt der Interpolationsort außerhalb des Dreiecksnetzes, ist eine lineare Interpolation nicht möglich, anderfalls wird die Interpolation durchgeführt.

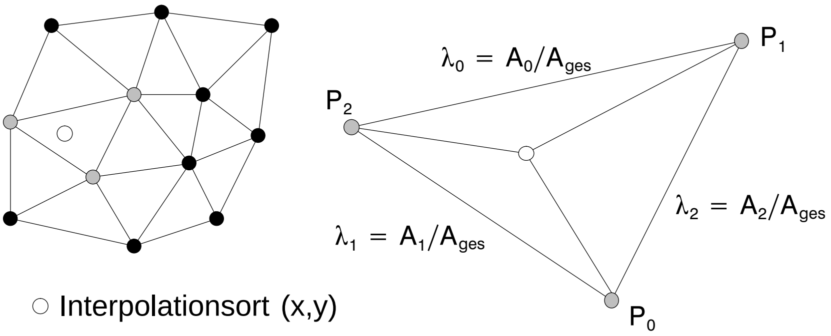


Bild 1-1. Schema der linearen Interpolation

Berechnungsergebnis:

$z(x, y) = \lambda_0 \cdot z_{P0} + \lambda_1 \cdot z_{P1} + \lambda_2 \cdot z_{P2}$ (Dreickselement gefunden**)**

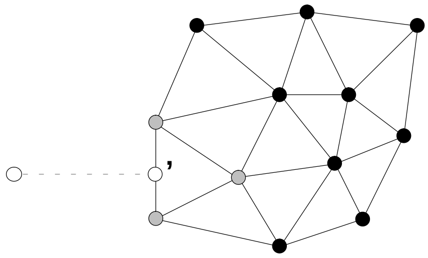
$z(x, y) = \text{NaN}$ ("Not a Number", kein Dreick gefunden**)**

2.1.1 Lineare Extrapolation (optional zur Interpolation)

Voraussetzungen: Dreickszerlegung

Parameter: keine

Berechnungsablauf: Die Extrapolation ist eine Ergänzung zur linearen Interpolation und approximiert Werte für Stützstellen, die außerhalb der Dreieckszerlegung liegen. Für diese Stützstelle wird ein Ort in der Dreieckszerlegung ermittelt, der einen minimalen Abstand zum Interpolationsort aufweist. Dieses ist entweder ein vorhandener Gitternetzknoten oder der lotrechte Fußpunkt auf einer Randkante.



○ Extrapolationsort (x,y) ○' Interpolationssort (x',y')

Bild 1-2. Schema der linearen Extrapolation

Berechnungsergebnis:

$z(x, y) = z(x', y') = \lambda_0 \cdot z_{P0} + \lambda_1 \cdot z_{P1} + \lambda_2 \cdot z_{P2}$

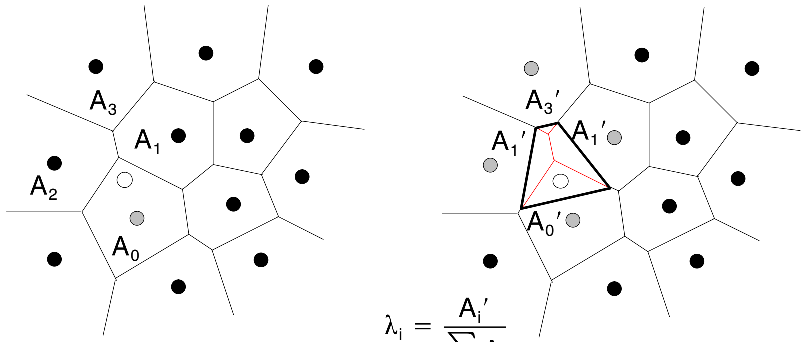
2.2 Natürliche-Nachbar-Interpolation (Sibson)

Voraussetzungen: Konvexe Delaunay-Triangulation (oder Voronoi-Zerlegung als duale Zerlegung)

Parameter: keine

Berechnungsablauf: Die Sibson Interpolation zieht zur Ermittlung des unbekannten z-Wertes an einem Interpolationsort die natürlichen Nachbarn heran. Hierzu wird die Voronoi-Zerlegung Vor(P) der zugrunde liegenden Punktmenge P betrachtet. Zur Ermittlung des Interpolationswertes wird der Interpolationpunkt temporär in die Voronoi-Zerlegung eingefügt und die Strukturänderung beobachtet. Die Voronoi-Zelle Vor(p) des zu interpolierenden Punktes setzt sich aus Teilen der Voronoi-Zellen Vor(q^i) der nächsten Nachbarn von p zusammen. Das Verhältnis dieser Teilflächen zur Gesamtfläche der Voronoi-Zelle Vor(p) ergibt das Gewicht des entsprechenden Nachbarn.
Die Berechnung ist sowohl unmittelbar auf einer Voronoi-Zerlegung als auch auf der Delaunay–Triangulation als duale Struktur zur Voronoi-Zerlegung durchführbar. Die vorliegende Implementierung ist auf der Delaunay-Verma-

schung formuliert und geht auf das Paper “Geophysical parametrization and interpolation of irregular data using natural neighbours” (Sambridge, Braun, McQueen, Geophys. J. Int., 1995) zurück.



$$\lambda_i = \frac{A_i'}{\sum A_i}$$

○ Interpolationsort (x,y)

Bild 1-3. Schema der Sibson Interpolation

Berechnungsergebnis:

$z(x, y) = \sum \lambda_i \cdot z_i$ (Interpolationsort innerhalb der konvexen Hülle)

$z(x, y) = NaN$ (Interpolationsort außerhalb der konvexen Hülle)

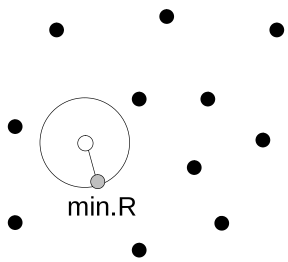
3 Gitterfreie Approximationsverfahren

3.1 Nächster-Nachbar-Interpolation

Voraussetzungen: Punktmenge

Parameter: keine

Berechnungsablauf: Für eine gegebene Menge an Datenpunkten wird der Datenpunkt mit dem geringstem Abstand zum Interpolationsort ermittelt. Als Abstandsfunktion wird die euklidische Metrik verwendet. Das Ergebnis der Interpolation ist der z-Wert des gefundenen Datenpunktes.



○ Interpolationsort (x,y)

Bild 1-4. Schema der Nächster-Nachbar-Interpolation

Berechnungsergebnis:

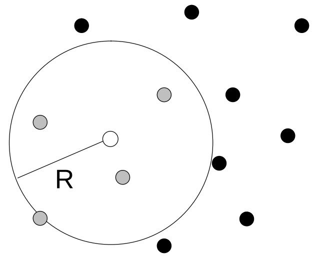
$z(x, y) = z_{P,min.Abstand}$

3.2 Umgebungsapproximation mit Abstandsfunktion

Voraussetzungen: Punktmenge

Parameter: Suchradius, Approximationsmethode

Berechnungsablauf: Für eine gegebene Menge an Datenpunkten werden die Datenpunkten innerhalb eines vorgebenen Suchradius ermittelt. Die Berechnung des z-Wertes erfolgt daraufhin mit einer Approximationsmethode. Mögliche Methoden sind: Mittelwert, Median, Maximaler Wert und Minimaler Wert der Datenreihe.



○ Interpolationsort (x,y)

Bild 1-5. Schema der Umgebungsapproximation mit Abstandsfunktion

Berechnungsergebnis:

$$z(x,y) = f\left(z_{0,} z_{1,} \ldots, z_n\right) \qquad \text{für} \quad n > 0$$

$$z(x,y) = \text{NaN} \qquad \text{für} \quad n = 0$$

3.3 Umgebungsapproximation mit polygonaler Begrenzung

Voraussetzungen: Menge an Datenpunkten aus denen interpoliert werden soll, Berechnungsgitternetz mit Interpolationsstützstellen

Parameter: keine

Berechnungsablauf: Diese Approximationsmethode ist speziell für die Interpolation von z-Werten der Stützstellen eines Berechnungsgitters formuliert. Die in Kapitel 3.2 vorgestellte Methodik wurde dahingehend erweitert, daß kein festgeschriebener Radius für die Suche der Datenpunkte herangezogen wird, sondern der Suchbereich mit der Auflösung des Gitternetzes in Beziehung gesetzt wird. Hierbei wird von der Modellvorstellung ausgegangen, daß eine Stützstelle des Berechnungsgitters als Repräsentant eines Gebietsbereiches, im folgenden Einflußbereich genannt, aufgefaßt wird. Der Einflußbereich wird als polygone Fläche beschrieben, deren Bestimmung nachfolgende Abbildung verdeutlicht.

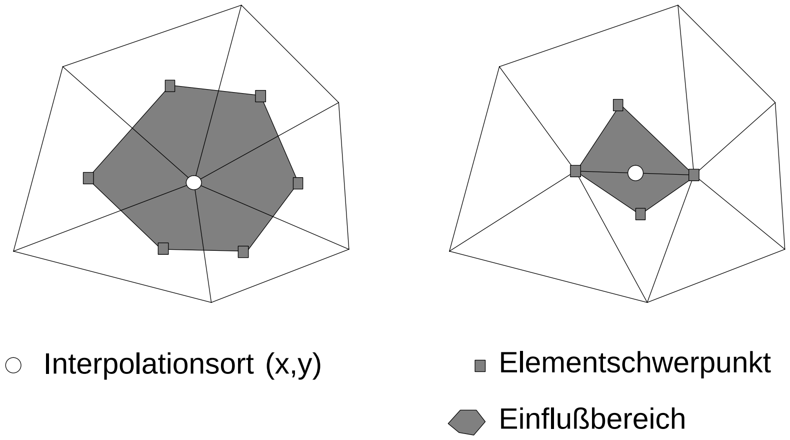


Bild 1-6. Schema für die Bestimmung der Einflußbereiche

Mit Hilfe des Polygones eines Einflußbereiches werden die Datenpunkte die zur Approximation des z-Wertes durch einen Punkt-In-Polygon-Test bestimmt.

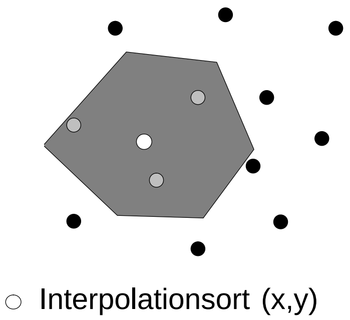


Bild 1-7. Schema der Umgebungsapproximation mit Einflußpolygon

Berechnungsergebnis:

$$z(x, y) = f\left(z_{0,} z_{1,} \ldots, z_n\right) \qquad \text{für} \quad n > 0$$

$$z(x, y) = \text{NaN} \qquad \text{für} \quad n = 0$$

3.4 Inverse-Distanz-Interpolation (Shepard)

Voraussetzungen: Punktmenge

Parameter: Suchradius R, μ

Berechnungsablauf: Für eine gegebene Menge an Datenpunkten werden alle Punkte im vorgegebenen Suchradius zu der Interpolationsstützstelle ermittelt. Die Berechnung des Funktionswertes erfolgt nunmehr auf dieser Teilmenge (lokale Shepard Interpolation) der Datenpunkte.

Berechnungsergebnis:

$$z(x, y) = \frac{\frac{1}{d_i^{\mu}}}{\sum \frac{1}{d_i^{\mu}}}$$

d_i : Abstand des Interpolationsortes zum Datenpunkt i

Die Wirkung des Parameters μ lässt sich wie folgt beschreiben und ist in Bild 1-8 beispielhaft gezeigt.

$0 < \mu < 1$ Die Interpolation führt an der Stützstelle zu einer Spitze.

$\mu = 1$ Die Interpolation führt an der Stützstelle zu einer Ecke.

$\mu > 1$ Die Interpolation führt an der Stützstelle zu einem Plateau.

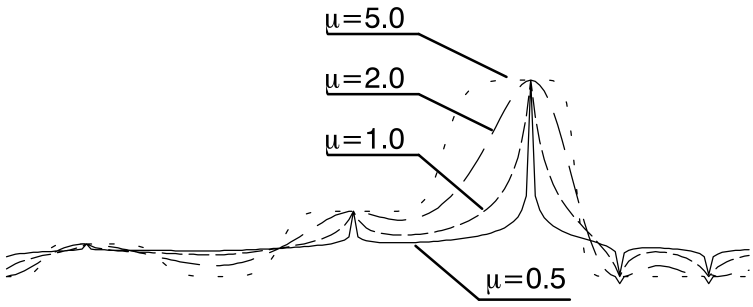


Bild 1-8. Einfluss des Parameters μ auf die Shepard Interpolation dargestellt im Schnitt.

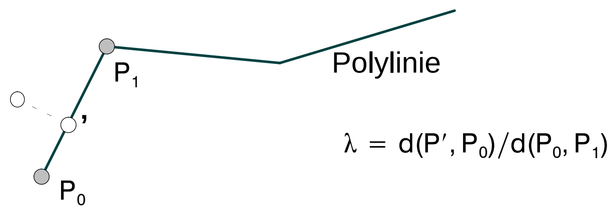
4 Sondermethoden

4.1 Nächste-Polygonkanten-Interpolation

Voraussetzungen: Polylinien und Polygone

Parameter: Toleranzradius R

Berechnungsablauf: Mit dieser Methode können Stützstellen innerhalb eines vorgegebenen Toleranzradius auf Polylinien bzw. Polygone interpoliert werden. Das Vorgehen ist vergleichbar mit der Methodik bei der Linearen Extrapolation, jedoch wird statt des minimalen Abstandes zu einer Randkante oder eines Randknotens der minmale Abstand zu einem Polygonsegment bzw. zu einem Polygonknoten betrachtet. Wird innerhalb des Toleranzradius ein Ort mit minimalem Abstand gefunden, so wird diese Interpolationstelle zur linearen Interpolation des z-Wertes auf dem Polygonsegment herangezogen. Nachfolgende Abbildung verdeutlicht das gewählte Vorgehen.



○ Extrapolationsort (x,y) ○' Interpolationssort (x',y')

Bild 1-9. Schema der linearen Extrapolation

Berechnungsergebnis:

$z(x, y) = z(x', y') = z_{p0} + \lambda \cdot (z_{p1} - z_{p0})$ für $d(P, P') \leq R$

$z(x, y) = NaN$ für $d(P, P') > R$